

加筋圆柱壳纯弯作用下蠕变屈曲 及弹塑性屈曲

李芳忠¹⁾ 李国琛

(中国科学院力学研究所)

摘要 利用给定温度下等时蠕变曲线的几何相似性及比应力-应变曲线法,将蠕变屈曲化为弹塑性屈曲。导出了大挠度情况下加筋圆柱壳一般性的平衡方程、屈曲方程以及相应的变分分解法。提出了纯弯下加筋圆柱壳屈曲的简化处理办法。考虑了分叉屈曲和极值屈曲。计算了不同半径-厚度比及不同加筋情况的壳体临界弯矩。结果与已知的实验数据做了间接的对比。

主要符号

x, y, z	坐标(轴向,环向,横向)	切线模量
l, h_0, R	圆柱壳的长,厚及中面的曲率半径	ψ_0, ψ_1, ψ_2 壳壁,纵筋及环框的塑性系数
d_1, d_2	纵筋,环框的间距	u, v, w 壳壁中面上沿 x, y, z 方向的位移
A_1, A_2	纵筋,环框的横截面积	u_p, w_p 壳横截面沿环向和径向的相对位移
h_1, h_2	纵筋,环框的高度	$n_x, n_y, n_{xy} = n_{yx}$ 壳壁单位长度上的法向力和剪力
I_1, I_2	纵筋,环框的横截面面积对壳壁中面的惯性矩	$m_x, m_y, m_{xy} = m_{yx}$ 壳壁单位长度上的弯矩和扭矩
e_1, e_2	纵筋和环框的偏心距(对壳壁中面)	N_1, N_2 纵筋,环框横截面上的法向力
$F_i = \frac{1}{I_i - A_i e_i^2} \left(\frac{I_i^2}{A_i} - e_i \int \int_{A_i} z^3 dA_i \right) \quad i = 1, 2$		M_1, M_2 纵筋,环框横截面上的弯矩
$G_i = \frac{1}{I_i - A_i e_i^2} \left(\int \int_{A_i} z^3 dA_i - e_i I_i \right) \quad i = 1, 2$		$\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_{xy}, \bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_{xy}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{M}_1, \bar{M}_2$ 上述力在边界上的给定值
E, ν, E_t, E_s	蠕变中的等时模量或瞬时弹性模量, Poisson 系数,蠕变中的比应力-应变曲线或瞬时单向拉伸曲线的割线模量及	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 应力
		$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 应变
		$\epsilon_x^{(0)}, \epsilon_y^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}, K_x, K_y, K_{xy}$ 壳壁中面的广义应变

引 言

Hoff[1] 在 1957 年根据 Brazier 提出的圆柱壳受弯变扁为椭圆状的假设及时间硬化(也称流动)蠕变理论,首先研究了受弯圆柱壳的蠕变屈曲问题。在此基础上于 1971 年又提供了一个简化计算公式并与实验做了比较^[2]。在塑性屈曲方面, Gellin[3] 将位移展为三角级数,在环向无伸长的前提下,研究了长圆柱壳受纯弯的问题。

在有加筋的情况下,由于壳体受弯后截面上的应力分布的不均匀性,筋条和壳壁截面

1) 现在北京建工学院。

本文于 1984 年 11 月 21 日收到。

内的塑性模量值也随之而变化,问题比单纯轴压的(如文[4])要复杂得多。

由于将一般金属材料的蠕变曲线转换为等时应力-应变曲线时有较好的相似性,蠕变规律可以近似为

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)E(t_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

其中 $E(t_i)$ 称为等时模量是与时间 t_i 有关的已知材料参数, φ 是应变 ε (包括瞬时的弹性应变与蠕变)的函数。为此本文作者之一曾提出比应力-应变曲线方法^[5], 将(1)式改写为此应力形式

$$\bar{\sigma} = \sigma/E(t_i) = \varphi(\varepsilon) \quad (2)$$

这样就可以将蠕变问题变换为一般的弹塑性解法。求出此应力后,利用(2)式,可以或是由 t_i 值确定实际应力或反之给定 σ 后确定临界时间 t_{cr} 。

对于加筋元件,考虑到结构型式的复杂性和应力分布的不均匀性,为尽可能地简化问题和提高近似解的精度,采用广义变分原理来确立广义力,广义位移及它们所应满足的基本方程可以得到较好的效果(见文[6])。

应用以上方法本文建立了加筋圆柱壳体蠕变屈曲及弹塑性屈曲的理论,分析了纯弯屈曲,在光壳的情况下与 Hoff 的结果^[2]做了比较,相符良好。

一、求解方法

设壳壁中的应力,应变及采用塑性形变理论时塑性系数 ϕ_0 的各项值沿壁厚为线性分布,于是

$$\sigma_x = \frac{n_x}{h_0} + \frac{12 m_x}{h_0^3} Z, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + K_x Z \quad (xy) \quad (3)$$

$$\phi_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{E_0}{E_{s0}} - 1 \right) = \phi_0^{(0)} + 2\phi_0^{(1)} \frac{Z}{h_0} \quad (4)$$

类似地,在筋框中分别设

$$\sigma_x = \frac{1}{I_1 - A_1 e_1^2} \left[\left(\frac{I_1}{A_1} N_1 - e_1 M_1 \right) + (M_1 - e_1 N_1) Z \right] \quad (xy) \quad (5)$$

已知广义应变与位移的关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ K_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & K_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R^2}, \\ K_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由此可设屈曲时的挠动为

$$\delta \varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \delta K_x = -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}, \quad \delta^2 \varepsilon_x^{(0)} = \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 \quad \text{等} \quad (7)$$

设广义力与广义应变之间已满足塑性形变理论中的关系,于是文献[6]中的广义变分

式简化为势能原理的方程

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \iint \left[\left(n_x + \frac{N_1}{d_1} \right) \delta\varepsilon_x^{(0)} + \left(n_y + \frac{N_2}{d_2} \right) \delta\varepsilon_y^{(0)} + n_{xy} \delta\gamma_{xy}^{(0)} \right. \\ & \left. + \left(m_x + \frac{M_1}{d_1} \right) \delta K_x + \left(m_y + \frac{M_2}{d_2} \right) \delta K_y + 2m_{xy} \delta K_{xy} \right] dx dy \\ & - \int \left[\left(\bar{n}_x + \frac{\bar{N}_1}{d_1} \right) \delta u + \bar{n}_{xy} \delta v - \left(\bar{m}_x + \frac{\bar{M}_1}{d_1} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \bar{V}_x \delta w \right]_0^l dy \\ = & 0 \end{aligned} \quad (8)$$

屈曲时

$$\begin{aligned} Q = \delta^2\Pi = & \iint \left[\left(\delta n_x + \frac{\delta N_1}{d_1} \right) \delta\varepsilon_x^{(0)} + \left(\delta n_y + \frac{\delta N_2}{d_2} \right) \delta\varepsilon_y^{(0)} + \delta n_{xy} \delta\gamma_{xy}^{(0)} \right. \\ & \left. + \left(\delta m_x + \frac{\delta M_1}{d_1} \right) \delta K_x + \left(\delta m_y + \frac{\delta M_2}{d_2} \right) \delta K_y \right. \\ & \left. + 2\delta m_{xy} \delta K_{xy} + \left(n_x + \frac{N_1}{d_1} \right) \delta^2\varepsilon_x^{(0)} + \left(n_y + \frac{N_2}{d_2} \right) \delta^2\varepsilon_y^{(0)} \right. \\ & \left. + n_{xy} \delta^2\gamma_{xy}^{(0)} \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

对 Q 再做新的变分并使其为零

$$\delta^*Q = 0 \quad (10)$$

可得屈曲解。

二、纯弯下加筋长圆柱壳体屈曲

如图 1 所示,随着长壳整体曲率 $1/\rho$ 的增长,力矩 M 的加大,横截面由圆形变扁。以下取曲率值为单调增加的自变量。设

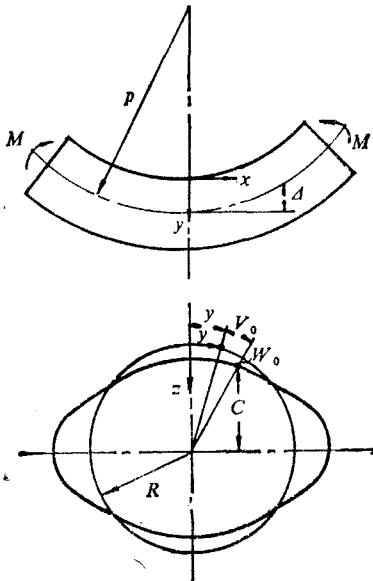


图 1 壳体整体弯曲示意图

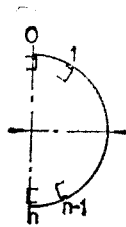


图 2 纵筋排列示意图



图 3 结点分布示意图

$$\varepsilon_x^{(0)} = -\frac{1}{\rho} \left[(R - w_0) \cos \frac{y}{R} - v_0 \sin \frac{y}{R} \right] = -\frac{c}{\rho} \quad (11)$$

又中轴线的整体挠曲在 $x = 0$ 附近为

$$\Delta = \rho \left(1 - \cos \frac{x}{\rho} \right) \quad (12)$$

于是可得在 $x = 0$ 附近的壳体位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{c}{\rho} x \\ v &= v_0 - \rho \left(1 - \cos \frac{x}{\rho} \right) \sin \frac{y}{R} \\ w &= w_0 - \rho \left(1 - \cos \frac{x}{\rho} \right) \cos \frac{y}{R} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中取

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= R \sum_{k=1}^4 B_k \sin \frac{k y}{R} \\ w_0 &= R \left(A_0 + \sum_{k=2}^4 A_k \cos \frac{k y}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由(8)式解出 v_0, w_0 后即得到了屈曲前的整体弯曲解且有整体弯矩

$$M = \int_0^{2\pi R} \left[- \left(n_x + \frac{N_1}{d_1} \right) c \right] dy \quad (15)$$

在逐级增大给定曲率时,每一级的整体弯曲解都是由修改的 Newton-Raphson 方法逐次迭代得到的。与此同时,在每一级解中还要利用(10)式所形成的行列式判断有无分叉解(在分叉时行列式出现奇性)。由分叉波型所引起的分叉应变为

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{1}{\rho} \left[\delta w_0 \cos \frac{y}{R} + \delta v_0 \sin \frac{y}{R} \right] \\ \delta \varepsilon_y^{(0)} &= \frac{d}{dy} (\delta v_0) - \frac{1}{R} \delta w_0 + \frac{dw_0}{dy} \frac{d}{dy} (\delta w_0) \\ \delta K_x &= 0 \\ \delta K_y &= -\frac{d^2}{dy^2} (\delta w_0) - \frac{1}{R^2} (\delta w_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

按图 2, 图 3 中所示意情况,用差分法可将 δv_0 及 δw_0 离散化并由(9)式中的 Q 可取其驻值

$$\frac{\partial Q}{\partial v_0^{(k)}} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial w_0^{(k)}} = 0.$$

形成以结点挠动 $\delta v_0^{(k)}, \delta w_0^{(k)} (k = 1, 2, \dots, s)$ 为未知数的齐次方程组后即可组成判别分叉的行列式。

三、计算结果与分析

利用已有的铝合金 2024-0 (温度为 500° F) 的蠕变试验曲线 [7] 可以制作比应力 ($\bar{\sigma}$)-应变 (ε) 曲线及等时模量 (E)-时间 (t) 曲线, 如图 4 所示。由此可按一般弹塑性

方法计算圆柱壳体在纯弯作用下的蠕变屈曲。共计算了半径厚度比 $R/h_0 = 125 - 200$ 的五种壳壳和不同加筋情况的六种加筋壳的屈曲弯矩。壳壁, 纵筋和环框都取作同一材料。主要的几何尺寸是, $R = 150 \text{ mm}$, 纵筋是截面积为 29.2 mm^2 的角材, 环框也为角材其截面积是 55.2 mm^2 , 间距 100 mm 。计算结果都列在表 1 中。计算时采用修改的 Newfon-Raphson 法逐级迭代求解。

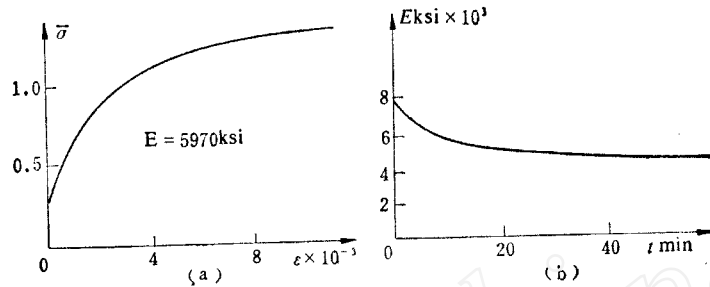


图 4 比应力-应变曲线与等时模量-时间图

表 1 屈曲弯矩 $\bar{M} = \frac{M}{ER^3} \times 10^{-3}$

R/h_0	125	150	175	185	200	200	200	200	200	200	125
纵筋	0	0	0	0	0	4	6	8	12	24	12
环框	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	有
分叉	/	/	/	1.633	1.467	1.554	1.655	1.704	1.824	/	/
极值	2.770	2.174	1.765	1.636	1.469	1.555	1.657	1.705	1.827	2.158	6.140

通过计算分析,可以得到以下一些看法:

- (1) 随着 R/h_0 值加大(壳壁减薄),屈曲型式由极值型转为分叉型。其分界约在 R/h_0 等于 180。
- (2) 从表 1 中可见,在极值屈曲前有分叉屈曲的情况下分叉点与极值点所对应的屈曲弯矩值十分接近。

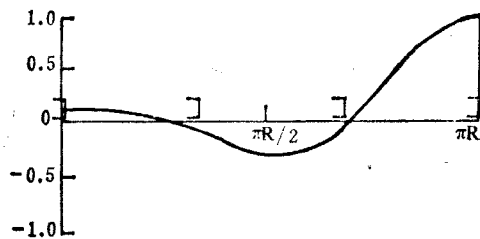


图 5 横截面内有 6 根纵筋时的屈曲波型分布

表 2 $\sigma_{cr}/E \times 10^{-4}$

R/h_0	本文	[5]中公式 (3.4)
200	8.305	9.060
180	8.662	9.250

(3) 如无环框又纵筋布置稀疏时,沿壳的环向有类似于局部屈曲现象发生,如图 5 所示。

为检验文中结果,采用了以下两条途径做分析比较。

(1) 与按无矩理论分析均匀轴压圆柱壳的临界压应力相比较,本文计算的最大临界压应力值仍低于它(见表 2)。这是考虑了屈曲前变形的结果。

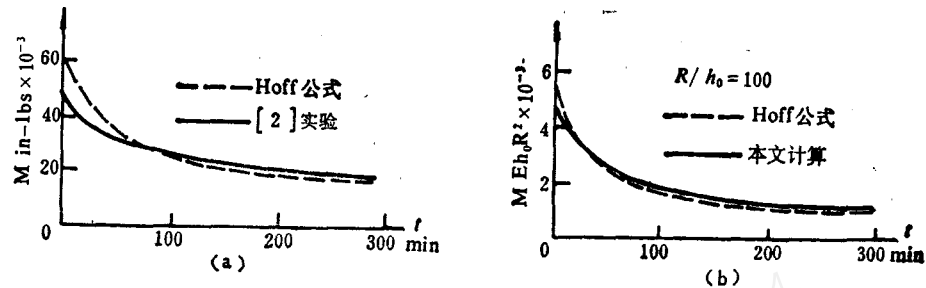


图 6 屈曲弯矩-临界时间图

(2) 用这里的程序与 Hoff 的公式 [2] 在同一温度和材料下计算了光壳的屈曲弯矩与临界时间的关系曲线。图 6 中转印了文献 [2] 中的图 4(a), 另外一边绘制了这里计算的 $R/h_0=100$ 的结果。本文的计算曲线更接近实验的分布趋势(间接的)。对于 $R/h_0=150$ 的壳体也有类似的情况。

参 考 文 献

- [1] Hoff, N. J., Buckling at high temperature, *J. Roy. Aeronautical Society*, 61(1957), 756.
- [2] Hoff, N. J., Wang, L., Creep buckling of circular cylindrical shells in pure bending, *Aeronautical J.*, 75(1971), 471.
- [3] Gellin, S., The plastic buckling of long cylindrical shells under pure bending *Int. J. Solids Structures*, 16(1980), 397.
- [4] Duffett, G. A., Reddy, B. D., Plastic buckling of initially imperfect stiffened cylinders in axial compression, *J. A. M.*, 50(1983), 88.
- [5] 李国琛, 圆柱壳体的轴压蠕变屈曲, *力学学报*, 1(1981), 38.
- [6] 李国琛, 用形变理论分析结构塑性屈曲时的一类广义变分原理, *力学学报*, 5, 5(1984), 512.
- [7] Papirno, R., Goldman, R. Experimental Creep buckling of aluminum cylinders in axial compression, *Exp. Mech.* 9(1969), 356.
- [8] 李国琛, 圆柱壳体的弯曲蠕变屈曲, *固体力学学报*, 4(1981), 554.

CREEP BUCKLING AND ELASTIC-PLASTIC BUCKLING OF STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS UNDER PURE BENDING

Li Fangzhong and Li Guochen
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

Solutions for creep buckling problems can be converted to elastic-plastic buckling analyses, as formerly explained by the ratio stress-strain method, which is based on the geometric similarities of isochronic creep curves at each constant temperature. Large deflection equilibrium equations and buckling equations of stiffened cylindrical shells are presented with their corresponding variational solution methods. For the case of pure bending, a simplified method is proposed accounting for both bifurcation type and limit type of buckling. Shells of various radius-thickness ratios and with several stiffening conditions are computed. The results are compared indirectly with some existing experimental data.