

表 4 不同尺寸的三点弯曲试样计算得到 K_I

支距 s	宽度 w	厚度 B	裂缝长 a	作用力 P	中心线上 K_I	平均 K_I	文[2]中(2.8) 式计算 K_I
16.0	3.4	2.4	1.6	16.0	42.74	40.65	41.67
16.0	4.0	2.8	1.6	16.0	23.47	22.36	22.67

用 20 节点等参元、裂缝尖端用退化的三棱柱奇异元及过渡元时,奇异元 $\frac{1}{4}$ 边点位移偏大而角点的位移偏小,从而使利用这些点及其附近点的位移外推求 K_I 失效。(而这种现象在二维计算时用 8 节点等参元退化的三角形奇异元中没有发生)。现采用缩小奇异单元及过渡元的尺寸,增加单元层次,从正常单元处选择合适的外推点可得到满意的结果。在上述各例计算中,当裂缝表面单元划分为 6 层, r/a : 1.0、0.5、0.2、0.08、0.05、0.02, 并从 r/a : 0.2、0.14、0.08 三点的位移外推求 K_I 能达到一定的精度。

2. 在三维问题计算中还必须注意厚度方向单元划分层次的影响: 从表面到中心至少要划分二层单元。

3. 奇异单元的大小还要影响到边缘张开位移, 从我们计算实践看来, 当奇异元边长 r 与裂缝长度 a 之比小于 0.05 时, 对边缘张开位移的影响就较小了。

以上出现的这些问题似乎表明: 用 20 节点等参元退化的奇异元所“描述”的应力场虽然具

有 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 的奇异性, 但与裂缝尖端理论的应力场还有着值得重视的差异, 因此我们只能利用它从一个具有 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 特性的应力区过渡到正常应力区。至于用这种奇异元为什么会产生上述的一些现象而在二维问题中为什么不出现(或者说不那么严重), 这些问题有待于作进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] 徐博侯、丁浩江, 提高应力强度因子计算精度的三个方法, 固体力学学报 (1984), 1.
- [2] 陈镜、蔡其巩、王仁智等编著, 工程断裂力学 (上册).
- [3] Barsoum, R. S., On the use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *International Journal for Numerical Method in Engineering* Vol. 10. (1976).
- [4] 中国航空研究院主编, 应力强度因子手册, 科学出版社 (1981).
- [5] Delorenzi, H. G., 3-D Elastic-Plastic Fracture Mechanics with ADINA.
- [6] Alwar, R. S. and Ramachandran K. N., Nambissan, Three-Dimensional Finite Element Analysis of Cracked Thick Plates in Bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 19, 293-303 (1983).

(本文于 1985 年 9 月 16 日收到)

三 角 形 等 参 奇 异 元

张 双 寅

(中国科学院力学研究所)

1. 三角形奇异元的构造

二维八节点四边形等参元的坐标变换式为:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \quad (1a)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (1b)$$

位移插值函数为:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \quad (2a)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (2b)$$

式(1)与(2)中的形状函数为(图1)

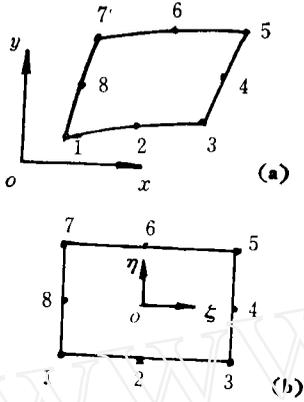


图 1

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1), \quad i = 1, 3, 5, 7, \quad (3a)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad i = 2, 6 \quad (3b)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \xi_0) \quad i = 4, 8 \quad (3c)$$

其中,

$$\xi_0 = \xi_i \xi \quad (4a)$$

$$\eta_0 = \eta_i \eta \quad (4b)$$

在裂纹顶点附近采用极坐标 r, θ 表示, 令 r_1, r_2, r_3 为单元侧边(与裂纹面重合)上三个节点距离裂纹顶点的距离, (图2).

$$\text{当 } r_2 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3})^2}{4} \quad (5)$$

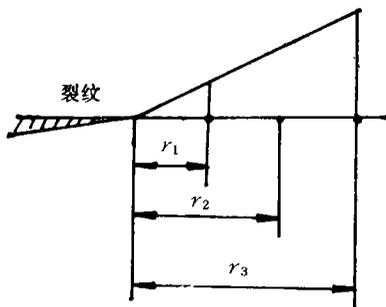


图 2

时,由坐标变换式(1),得到

$$\xi = -\frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3}}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} + \frac{2}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} \sqrt{r} \quad (6)$$

于是位移表达式(2)中包括 \sqrt{r} 项.

当 $r_1 = 0$ 时 $r_2 = \frac{r_3}{4}$, 于是我们得到四分之一节点元素;在裂纹顶点,有三个节点重迭在一起,这个元素又称为压坍三角形奇异元.

2. 应力强度因子与裂纹近场位移之间的关系

根据各向同性体线弹性断裂力学, 裂纹近场位移由下式给出:

$$u_r = \frac{K_I}{4G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(2k-1) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] + o(r), \quad (7a)$$

$$u_\theta = \frac{K_I}{4G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{3\theta}{2} - (1+2k) \sin \frac{\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(2k+1) \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] + o(r). \quad (7b)$$

其中 G 是剪切模量,

$$K = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{对平面应变状态} \\ 3 - \nu & \text{对平面应力状态} \\ 1 + \mu \end{cases}$$

当 $\theta = \pm \pi$ 时,

$$u_r = K_{II} \{ (k+1) / [2G\sqrt{2\pi}] \} \sqrt{r} + o(r) \quad (8a)$$

$$u_\theta = K_I \{ (k+1) / [2G\sqrt{2\pi}] \} \sqrt{r} + o(r) \quad (8b)$$

利用(8a)与(8b),可以求对应于不同 r 值的 K_I 与 K_{II} 值. 欲求 $r=0$ 处的应力强度因子,可以利用外插法,但外插法有一定随意性,会产生误差,本文下边利用四分之一节点奇异元的构造公式,推导求解 K_I 与 K_{II} 的计算公式.

3. K_I 与 K_{II} 的计算公式

图3所示之三角形奇异元,在裂纹面上,

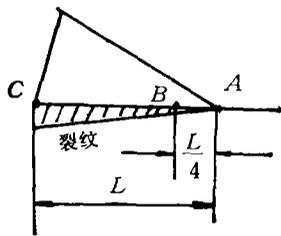


图 3

$\eta = -1$, 由式(2)得到

$$u_{\theta} = u_{\theta A} + (-3u_{\theta A} + 4u_{\theta B} - u_{\theta C})\sqrt{\frac{r}{L}} + (2u_{\theta A} - 4u_{\theta B} + 2u_{\theta C})\frac{r}{L} \quad (9a)$$

$$u_r = u_{r A} + (-3u_{r A} + 4u_{r B} - u_{r C})\sqrt{\frac{r}{L}} + (2u_{r A} - 4u_{r B} + 2u_{r C})\frac{r}{L} \quad (9b)$$

由于极坐标 (r, θ) 的原点取在裂纹顶点, 于是(9a)与(9b)变成:

$$u_{\theta} = (4u_{\theta B} - u_{\theta C})\sqrt{\frac{r}{L}}$$

$$+ (-4u_{\theta B} + 2u_{\theta C})\frac{r}{L} \quad (10a)$$

$$u_r = (4u_{r B} - u_{r C})\sqrt{\frac{r}{L}} + (-4u_{r B} + 2u_{r C})\frac{r}{L} \quad (10b)$$

对比式(8)与(10)得到如下公式:

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{(k+1)} \left[\frac{4u_{\theta B} - u_{\theta C}}{\sqrt{L}} \right] \quad (11a)$$

$$K_{II} = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left[\frac{4u_{r B} - u_{r C}}{\sqrt{L}} \right] \quad (11b)$$

以上二式就是利用三角形等参奇异元求解应力强度因子 K_I 与 K_{II} 的计算公式。

4. 算例

利用公式(11a)与(11b)计算了如图4所示之复合型裂纹的应力强度因子 K_I 与 K_{II} 。边界条件为一端完全固定; 另一端施加均布拉应力 σ_{∞} , 端面自由转动, 但限制横向位移为零。材料常数为 $E = 7.0 \text{ GPa}$, $\nu = 0.34$ 。计算结果列于表1。表中对比了公式(11)的结果与外插法的结果; 同时对于是否对三角形单元重迭在裂纹

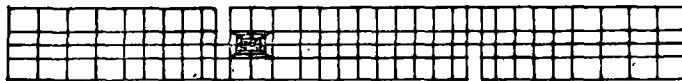


图 4a 变形前网格图

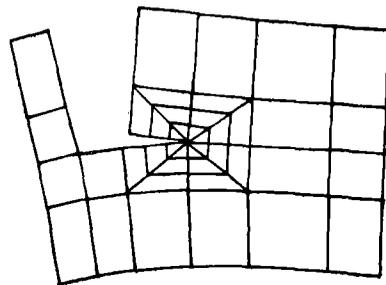


图 4b 变形后局部放大图

表 1 K_I 与 K_{II} 的计算结果

计算方法	对重迭节点所施加的约束条件	应力强度因子	
		$K_I/(\sigma_{\infty}\sqrt{a})$	$K_{II}/(\sigma_{\infty}\sqrt{a})$
公式(11)	令重迭节点位移相同	1.383	2.285
	重迭节点自由位移	1.386	2.488
外插法	令重迭节点位移相同	1.56	2.00

顶点的三个节点是否施加相同位移条件的影响进行了对比。

由表中结果可见, 外插法与公式(11)的结果, 偏别大于10%。

本文推导了计算应力强度因子 K_I 与 K_{II} 的计算公式(11)。它是根据三角形四分之一节点奇异元的构造公式推导而来的, 比外插法定 K_I 与 K_{II} 有明显的优越性。

(本文于1985年8月29日收到)