第18卷 第6期　　力 学 学 报　　Vol. 18, No. 6
1986 年 11 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Nov., 1986

论气体混合物和两相流中的压强和热流

刘 大 有
(中国科学院力学研究所)

提要　本文首先给出单流体模型和双流体模型中压强和热流等物理量的两种不同定义. 然后通过引入流场中某面元 dS 的动量流密度 $\boldsymbol{M}$ 和能量流密度 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 来讨论压强和热流等量的物理意义. 指出,在描述混合物运动的守恒方程中以采用单流体模型定义的各量为宜,在描述组元运动的守恒方程中以采用双流体模型定义的各量为宜. 本文还详细讨论了稠密混合气体中的碰撞压强和碰撞热流,说明它们的来源,它们在动量方程和能量方程中的表达形式,以及它们同通常的分压和分热流的本质差别.

气固两相流可视为一种稠密的混合气体流动. 两相流中关于动量方程中是否应有"惯性耦合项"的长期争论,可以用分压的两种不同定义予以澄清.

一、引　言

压强是流体力学中最常用的、也是最重要的物理量之一.关于混合气体压强的 Dalton 分压定律也早已为人们所熟悉. 然而当人们把它推广到流动中的混合气体, 尤其是当气体分子的体积不能忽略(即稠密的混合气体)时,压强的概念变得很复杂,至今还有些争论由此引起. 例如,在两相流中关于动量方程中是否应包含所谓的"惯性耦合项"的长期争论[1-9],归根结底是因压强概念的混乱引起的. 气固两相流, 当颗粒的体积分数 ε 不很小时,就可视为一种稠密的混合气体流动[1)]. 因此上述争论表明,混合气体(尤其是稠密的混合气体)流动中的压强仍需要进一步分析和研究.

研究混合气体运动有两种流体力学模型,即单流体模型(或称扩散模型)和双(多)流体模型. 在双流体模型中,以组元的平均速度 $\bar{\boldsymbol{c}}_i$ 来定义该组元的热速度 $\boldsymbol{C}_i$, 分压 $\mathbf{P}_i$, 分热流和温度等物理量. 在单流体模型中, 各组元采用统一的混合物平均速度 $\boldsymbol{c}_0$ 来定义各组元的热速度 $\boldsymbol{C}_i^*$, 分压 $\mathbf{P}_i^*$, 混合物压强 $\mathbf{P}^*$, 热流和温度等. 在气体混合物和等离子体研究中,人们都采用 $\mathbf{P}^*$ 作为混合物压强[10,14-17],而在两相流中人们多数采用 $\mathbf{P}(=\sum\mathbf{P}_i)$ 作为混合物压强[18-20]. 这是两个不同的物理量,然而采用同一名称,关于惯性耦合项的争论就同这有关.

在稠密混合气体流动中由于增加了碰撞压强[10-12], 使压强的概念变得更复杂了: 混合物压强中除了各组元的分压外,还包括碰撞压强;各组元的分压, 根据平均运动定义的不同又可有两种不同的定义. "碰撞压强"引自 Chapman & Cowling 的著作[10]. 他们在研究稠密气体输运性质时使用过. 但是大多数两相流文献不是从动力论出发建立两相流

本文于 1985 年 8 月 7 日收到.
1) 在本文中"混合气体"是气体混合物,等离子体和气固两相流的统称.

方程的．动力论中的碰撞压强在那里被称为固相分压（或颗粒分压），而动力论中定义的颗粒群分压 $\mathbf{P}_2$ 在那里被忽略了（因为在两相流中，$\mathbf{P}_2$ 总是很小）． 由此可见压强概念的复杂：同一物理量往往采用不同的名称（如碰撞压强与固相分压，有些作者把它看作是气相分压的一部分），而不同的量有时却又采用同一名称，如固相分压可能指双流体模型中的分压 $\mathbf{P}_2$，也可能指单流体模型中的分压 $\mathbf{P}_2^*$，也可能指碰撞压强 $\mathbf{P}_{col}$．

由于两相流中压强概念的复杂，人们往往忽视了所采用的混合物压强 $\mathbf{P}_{den}(=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_{col})$ 的双流体模型特点，把它同单流体模型中的混合物压强 $\mathbf{P}^*_{den}$ 相混淆．在关于惯性耦合项的争论中，各方都没有联系到压强的两种不同定义来讨论这问题，因此长期未能取得一致．

本文将从气体动力论出发，首先对于通常密度下的混合气体流动，引入分压强、压强、热流和温度等物理量在两种流体力学模型中的不同定义，然后引入运动坐标系中的动量流密度 $\boldsymbol{M}$ 和能量流密度 $\mathscr{E}$ 来讨论上述定义的各量的物理意义． 最后详细讨论了稠密混合气体中所增加的碰撞压强和碰撞热流，说明它们的来源，它们在动量方程和能量方程中的表达形式，以及它们同通常分压和分热流在物理本质上的差别．

二、在两种流体力学模型中各物理量的定义

在本文中，字母上面的短横表示平均．同类量在两种流体力学模型中采用同一字母表示，仅以角标＊互相区别．带角标＊者为单流体模型中的量．

设 $\boldsymbol{r}$ 为空间某点矢径，t 为时间．m_i、n_i、ρ_i、$\mathbf{c}_i$、$\bar{\mathbf{c}}_i$、$\boldsymbol{C}_i$（或 $\boldsymbol{C}_i^*$）、$\bar{\boldsymbol{C}}_i^*$ 和 f_i 分别为组元 i 的分子质量、数密度、质量密度、分子速度、平均速度、热速度、扩散速度和速度分布函数．n、ρ 和 $\mathbf{c}_0$ 为混合物的数密度、平均质量密度和平均（质心）速度．

在单流体模型中，对于每个组元都是以混合物的平均速度 $\mathbf{c}_0$ 为参考速度来定义热速度、分压等．在双流体模型中，各组元以其本身的平均速度 $\bar{\mathbf{c}}_i$ 为参考速度来定义热速度、分压等．在单（双）流体模型中，组元 i 的热速度为 $\boldsymbol{C}_i^*(\boldsymbol{C}_i)$，分压强张量为 $\mathbf{P}_i^*(\mathbf{P}_i)$，分流体静压强为 $p_i^*(p_i)$，分粘性应力张量为 $\boldsymbol{\tau}_i^*(\boldsymbol{\tau}_i)$，分热流矢量为 $\boldsymbol{q}_i^*(\boldsymbol{q}_i)$，速度分布函数的一级近似（Maxwell 分布）为 $f_i^{(0)*}(f_i^{(0)})$，混合物的总压强张量为 $\mathbf{P}^*(\mathbf{P})$，流体静压强为 $p^*(p)$，粘性应力张量为 $\boldsymbol{\tau}^*(\boldsymbol{\tau})$，热流矢量为 $\boldsymbol{q}^*(\boldsymbol{q})$，温度为 $T^*(T)$．在双流体模型中组元温度为 T_i．有些作者[13]在单流体模型中引入组元温度 T_i^*． 这样的温度定义究竟反映怎样的物理意义，还值得探讨．$\mathbf{U}$为单位张量． k 为 Boltzmann 常数．$\int\cdots d\mathbf{c}_i$ 是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots du_i dv_i dw_i$ 的缩写．以上这些量的定义为

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_i^*=\mathbf{c}_i-\mathbf{c}_0\\
&\mathbf{P}_i^*=\int m_i\boldsymbol{C}_i^*\boldsymbol{C}_i^*f_i d\mathbf{c}_i\\
&p_i^*=\int\frac{1}{3}m_i\boldsymbol{C}_i^{*2}f_i d\mathbf{c}_i\\
&\boldsymbol{\tau}_i^*=p_i^*\mathbf{U}-\mathbf{P}_i^*\\
&\boldsymbol{q}_i^*=\int\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{C}_i^{*2}\boldsymbol{C}_i^*f_i d\mathbf{c}_i
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{2} n_i k T_i^* = \frac{1}{2}\rho_i \overline{C_i^{*2}}\right)\\
&f_i^{(0)*} = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi k T^*}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_i C_i^{*2}}{2kT^*}\right)\\
&\mathbf{P}^* = \sum \mathbf{P}_i^*\\
&p^* = \sum p_i^*\\
&\boldsymbol{\tau}^* = \sum \boldsymbol{\tau}_i^*\\
&\boldsymbol{q}^* = \sum \boldsymbol{q}_i^*\\
&\frac{3}{2} nkT^* = \sum \frac{1}{2}\rho_i \overline{C_i^{*2}}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i - \bar{\mathbf{c}}_i\\
&\mathbf{P}_i = \int m_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i f_i d\mathbf{c}_i\\
&p_i = \int \frac{1}{3} m_i C_i^2 f_i d\mathbf{c}_i\\
&\boldsymbol{\tau}_i = p_i \mathbf{U} - \mathbf{P}_i\\
&\boldsymbol{q}_i = \int \frac{1}{2} m_i C_i^2 \mathbf{C}_i f_i d\mathbf{c}_i\\
&\frac{3}{2} n_i k T_i = \frac{1}{2}\rho_i \overline{C_i^2}\\
&f_i^{(0)} = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi k T_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_i C_i^2}{2kT_i}\right)\\
&\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i\\
&p = \sum p_i\\
&\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i\\
&\boldsymbol{q} = \sum \boldsymbol{q}_i\\
&\frac{3}{2} nkT = \sum \frac{1}{2}\rho_i \overline{C_i^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

表 1

	定 义	单流体模型中的表达式	双流体模型中的表达式
$M_i(n, a)$	$\int \boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{c}_i - \boldsymbol{a}) m_i \mathbf{c}_i f_i d\mathbf{c}_i$	$\boldsymbol{n}\cdot[\mathbf{P}_i^* + (\mathbf{c}_0 - \boldsymbol{a})\rho_i\overline{\mathbf{C}_i^*} + \rho_i\overline{\mathbf{C}_i^*}\mathbf{c}_0 + (\mathbf{c}_0 - \boldsymbol{a})\rho_i\mathbf{c}_0]$	$\boldsymbol{n}\cdot[\mathbf{P}_i + (\bar{\mathbf{c}}_i - \boldsymbol{a})\rho_i\bar{\mathbf{c}}_i]$
$M(n, a)$	$\sum M_i(n, a)$	$\boldsymbol{n}\cdot[\mathbf{P}^* + (\mathbf{c}_0 - \boldsymbol{a})\rho\mathbf{c}_0]$	$\boldsymbol{n}\cdot\{\mathbf{P} + \sum[(\bar{\mathbf{c}}_i - \boldsymbol{a})\rho_i\bar{\mathbf{c}}_i]\}$
$\mathscr{E}_i(n, a)$	$\int \boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{c}_i - \boldsymbol{a})\frac{1}{2} m_i c_i^2 f_i d\mathbf{c}_i$	$\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{c}_0 - \boldsymbol{a})\left[\frac{1}{2}\rho_i c_0^2 + \rho_i\overline{\mathbf{C}_i^*}\mathbf{c}_0 + \frac{1}{2}\rho_i\overline{C_i^{*2}}\right] + \boldsymbol{n}\cdot\left[\frac{1}{2}\rho_i\overline{\mathbf{C}_i^*}c_0^2 + \mathbf{P}_i^*\cdot\mathbf{c}_0 + \boldsymbol{q}_i^*\right]$	$\boldsymbol{n}\cdot(\bar{\mathbf{c}}_i - \boldsymbol{a})\left[\frac{1}{2}\rho_i\bar{c}_i^2 + \frac{1}{2}\rho_i\bar{c}_i\right] + \boldsymbol{n}\cdot[\mathbf{P}_i\cdot\bar{\mathbf{c}}_i + \boldsymbol{q}_i]$
$\mathscr{E}(n, a)$	$\sum \mathscr{E}_i(n, a)$	$\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{c}_0 - \boldsymbol{a})\left[\frac{1}{2}\rho c_0^2 + \sum\frac{1}{2}\rho_i\overline{C_i^{*2}}\right] + \boldsymbol{n}\cdot[\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{c}_0 + \mathbf{q}^*]$	$\sum\left[\boldsymbol{n}\cdot(\bar{\mathbf{c}}_i - \boldsymbol{a})\left(\frac{1}{2}\rho_i\bar{c}_i^2 + \frac{1}{2}\cdot\rho_i\overline{C_i^2}\right) + \boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{P}_i\cdot\bar{\mathbf{c}}_i + \boldsymbol{q}_i)\right]$

设流场中有一速度为 $\boldsymbol{a}$、法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的面元 dS，穿过 dS 的组元 i 的动量流密度（和能量流密度）为 $\boldsymbol{M}_i$（和 $\mathscr{E}_i$），穿过 dS 的混合物总动量流密度（和总能量流密度）为 $\boldsymbol{M}$（和 $\mathscr{E}$）. 下表列出这些量的定义，以及它们在两种流体力学模型中的表达式.

三、通常密度下气体混合物的压强和热流的物理意义及流体力学方程

由 $\boldsymbol{M}_i$（以及 $\boldsymbol{M}$）的定义可知，动量交换率 $\boldsymbol{M}dS$ 就是以速度 $\boldsymbol{a}$ 运动的面元 dS 两边的流体之间相互作用力. 动量交换包括两部分：一是由分子热运动引起的；另一部分则是由宏观运动引起的，它与 $\mathbf{c}_0$、$\overline{\boldsymbol{C}_i^*}$ 或 $\bar{\boldsymbol{c}}_i$ 有关，也与面元 dS 的运动速度 $\boldsymbol{a}$ 有关. 当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{c}_0$ 时，对应的面元记为 dS_0；当 $\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{c}}_i$ 时，对应的面元记为 dS_i. 由表 1 可得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)&=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*+\mathbf{c}_0(\rho_i\overline{\boldsymbol{C}_i^*}\cdot\boldsymbol{n})\\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)&=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*\\ \boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\bar{\boldsymbol{c}}_i)&=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由式(3)$_2$ 可见，混合物的总压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*$ 等于穿过面元 dS_0 的动量流密度 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$. 由式(3)$_3$可见，分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i$ 等于穿过面元 dS_i 的组元 i 的动量流密度 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\bar{\boldsymbol{c}}_i)$. 可见 $\mathbf{P}^*$ 与 $\mathbf{P}_i$ 都有简单明瞭的物理意义. 下面讨论分压张量 $\mathbf{P}_i^*$. 尽管 $\sum\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)=\sum\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*$，但 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)\neq\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i$. 由式 (3)$_1$可见，穿过面元 dS_0 的组元 i 的动量流密度 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$，扣除扩散部分 $\mathbf{c}_0(\rho_i\overline{\boldsymbol{C}_i^*}\cdot\boldsymbol{n})$ 后才是分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*$. 关于"总压强张量"$\mathbf{P}$，它实际上只有数学内容，物理意义难以简单描述. 因为在 $\mathbf{P}$ 中，对于不同的组元所用的参考速度不同.

对于能流密度 $\mathscr{E}_i$ 及 $\mathscr{E}$ 也可作类似的讨论. 由表 1 得到

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)&=\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho_i\overline{\boldsymbol{C}_i^*}c_0^2+\mathbf{P}_i^*\cdot\mathbf{c}_0+\boldsymbol{q}_i^*\right)\\ \mathscr{E}(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)&=\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{c}_0+\boldsymbol{q}^*)\\ \mathscr{E}_i(\boldsymbol{n},\bar{\boldsymbol{c}}_i)&=\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{P}_i\cdot\bar{\boldsymbol{c}}_i+\boldsymbol{q}_i)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由式(4)$_2$可见，能流密度 $\mathscr{E}(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$ 由两部分组成：一是热流 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}^*$，二是压应力的作功率 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{c}_0)$. 前已说明，$\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*$ 表示以速度 $\mathbf{c}_0$ 运动的面元 dS_0 两边流体的相互作用力. 因此应视 $\mathbf{c}_0$ 为该力作用点的速度. 这与上述作功率的表达式一致. 类似地，由式(4)$_3$可见，分能流密度 $\mathscr{E}_i(\boldsymbol{n},\bar{\boldsymbol{c}}_i)$ 也是由两部分组成：分热流 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}_i$ 和分压应力的作功率 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i\cdot\bar{\boldsymbol{c}}_i)$. 这个作功率表达式也与前述的分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i$ 的物理意义一致，分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i$ 的力作用点速度为 $\bar{\boldsymbol{c}}_i$. 由式(3)$_1$可见，分解流密度 $\mathscr{E}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$ 由三部分组成：分热流 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}_i^*$，分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*$ 的作功率 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*\cdot\mathbf{c}_0)$ 以及由扩散伴随的能量交换率$\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{1}{2}\rho_i\overline{\boldsymbol{C}_i^*}c_0^2\right)$. 分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*$ 的力作用点速度是 $\mathbf{c}_0$. 由表 1 第四行可见，混合物"总热流矢量"$\boldsymbol{q}$ 的物理意义难以简单描述. 此外，人们很难说出"总压应力"$\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}$ 的力作用点速度. 由此又可见 $\mathbf{P}$ 的物理意义的含糊. 类似地还有压强 p 和温度 T 等.

下面考察函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{a})$ 和 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{b}_i)$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{a}) &= \sum \int \frac{1}{3} m_i |\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}|^2 f_i d\boldsymbol{c}_i \\ \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{b}_i) &= \int \frac{1}{3} m_i |\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{b}_i|^2 f_i d\boldsymbol{c}_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

不难证明,

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{a}) = p^* + \frac{1}{3} \rho |\boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{a}|^2$$

$$\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{b}_i) = p_i + \frac{1}{3} \rho_i |\bar{\boldsymbol{c}}_i - \boldsymbol{b}_i|^2.$$

由此可见,当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_0$ 时 $H(a)$ 达到其极小值 p^*, 当 $\boldsymbol{b}_i = \bar{\boldsymbol{c}}_i$ 时 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{b}_i)$ 达到其极小值 p_i. 这就是说,由式$(2)_3$定义的分压 p_i 是式$(5)_2$这类定义的压强中数值最小的. 对于混合气体整体而言,若以共同的参考速度去定义各组元的热速度,那么由式$(1)_3$定义的压强 p^* 是式 $(5)_1$这类定义的压强中数值最小的.

下面讨论两种流体力学模型中的动量方程和能量方程. 为简明起见, 忽略了体积力和组元间质量交换.

由 Boltzmann 方程积分得到组元 i 的动量方程和能量方程为[10]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \overline{\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{c}_i}) = \mathscr{F}_i \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho_i \overline{\boldsymbol{c}_i^2}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_i \overline{\boldsymbol{c}_i^2 \boldsymbol{c}_i}\right) = \mathscr{Q}_i \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$\mathscr{F}_i = \int m_i \boldsymbol{c}_i \frac{\partial_e f_i}{\partial t} d\boldsymbol{c}_i$$

$$\mathscr{Q}_i = \int \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{c}_i^2 \frac{\partial_e f_i}{\partial t} d\boldsymbol{c}_i$$

$\partial_e f_i / \partial t$ 是 Boltzmann 方程中的碰撞积分项. 在两种流体力学模型中 $\overline{\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{c}_i}$ 与 $\overline{\boldsymbol{c}_i^2 \boldsymbol{c}_i}$ 展开的方法不同,因而得到不同形式的组元 i 动量方程 (见下式(7)) 和能量方程(式(8)). 再对 i 求和就得到混合物动量方程(式(9))和能量方程(式(10)). 这些方程是:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i \bar{\boldsymbol{c}}_i) + \nabla \cdot \mathbf{P}_i = \mathscr{F}_i \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i \bar{\boldsymbol{c}}_i) - \nabla \cdot (\rho_i \overline{\boldsymbol{C}_i^* \boldsymbol{C}_i^*}) + \nabla \cdot \mathbf{P}_i^* = \mathscr{F}_i \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho \bar{\boldsymbol{c}}_i^2 + \frac{1}{2} \rho_i \overline{\boldsymbol{C}_i^2}\right) &+ \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_i \bar{\boldsymbol{c}}_i^2 + \frac{1}{2} \rho_i \overline{\boldsymbol{C}_i^2}\right) \bar{\boldsymbol{c}}_i\right] \\ &+ \nabla \cdot (\mathbf{P}_i \cdot \bar{\boldsymbol{c}}_i + \boldsymbol{q}_i) = \mathscr{Q}_i \end{aligned} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{c}_0) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{c}_0 \boldsymbol{c}_0) + \nabla \cdot [\sum \rho_i \overline{\boldsymbol{C}_i^* \boldsymbol{C}_i^*}] + \nabla \cdot \mathbf{P} = \sum \mathscr{F}_i \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{c}_0) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{c}_0 \boldsymbol{c}_0) + \nabla \cdot \mathbf{P}^* = \sum \mathscr{F}_i \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho c_0^2+\sum\frac{1}{2}\rho_i\overline{C_i^{*2}}\right)+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho c_0^2+\sum\frac{1}{2}\rho_i\overline{C_i^{*2}}\right)\mathbf{c}_0\right]+\nabla\cdot(\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{c}_0+\boldsymbol{q}^*)=\sum\mathscr{Q}_i \tag{10}$$

对于通常密度

$$\sum\mathscr{F}_i=0,\quad \sum\mathscr{Q}_i=0 \tag{11}$$

由动量方程(7)、(9)可见，若在组元方程中采用双流体模型中定义的分压张量 $\mathbf{P}_i$，在混合物方程中采用单流体模型中定义的混合物压强张量 $\mathbf{P}^*$，这时的动量方程的形式最简单，而且方程中每一项的物理意义最明瞭(如式$(7)_1$和$(9)_2$)。如果倒过来，在组元方程中采用单流体模型中定义的分压张量 $\mathbf{P}_i^*$，在混合物方程中采用双流体模型中定义的混合物压强张量 $\mathbf{P}$，方程中就增加了所谓的"惯性耦合项" $[-\nabla\cdot(\rho_i\overline{C_i^*C_i^*})]$ 或 $[+\nabla\cdot\sum\rho_i\overline{C_i^*C_i^*}]$。对于能量方程，情况类似。所以，在描述混合物运动的守恒方程中以采用单流体模型中定义的各物理量 $\mathbf{c}_0$、$\mathbf{P}^*$、p^*、$\boldsymbol{\tau}^*$、$\boldsymbol{q}^*$、T^* 等为宜；在描述组元运动的守恒方程中以采用双流体模型定义的各量 $\bar{\mathbf{c}}_i$、$\mathbf{P}_i$、p_i、$\boldsymbol{\tau}_i$、$\boldsymbol{q}_i$、T_i 等为宜。

在气体混合物与等离子体研究中，大多数作者也都是这样处理的。例如 Boyd & Sanderson[14]、Wood[15]、Pai[16]、Leontovich[17] 等研究各组元运动时采用的就是 $\bar{\mathbf{c}}_i$、$\mathbf{P}_i$、p_i、$\boldsymbol{\tau}_i$、$\boldsymbol{q}_i$ 和 T_i 等。Chapman & Cowling[10]、Boyd & Sanderson[14] 等研究混合物整体运动时采用的就是 $\mathbf{c}_0$、$\mathbf{P}^*$、p^*、$\boldsymbol{\tau}^*$、$\boldsymbol{q}^*$ 和 T^* 等。但是 Wood[15] 和 Pai[16] 是用 $\mathbf{c}_0$、$\mathbf{P}^*$、p、$\boldsymbol{\tau}^0$、$\boldsymbol{q}^*$ 和 T 等量描述混合物运动的，其中 $\boldsymbol{\tau}^0$ 的定义为 $(\boldsymbol{\tau}+\sum\rho_i\overline{C_i^*C_i^*})$，尽管他们给出的守恒方程在数学中是正确的，但要解释压强 p 的物理意义就比较困难，它的作功率是 $(p\mathbf{c}_0\cdot\boldsymbol{n})$，更难理解。

四、稠密混合气体中的碰撞压强和碰撞热流

在稠密混合气体中，由于分子体积不再能忽略，这时除式$(1)_{2,5}$和式$(2)_{2,5}$定义的分压张量和分热流矢量外，还增加了碰撞压强张量和碰撞热流矢量[10-12]。它们与单位体积中分子本身所占的体积成正比。

对于稠密混合气体，动量方程和能量方程(7)—(10)仍适用，只是碰撞项 $\mathscr{F}_i$ 与 $\mathscr{Q}_i$ 的处理不同。在这种情况下式(11)不再成立。当组元 1 的分子所占的体积分数很小(即 $4\pi r_1^3n_1/3\ll 1$)，并以 ε 表示组元 2 的分子所占的体积分数 $(4\pi r_2^3n_2/3)$ 时，若假设碰撞都是弹性的二体碰撞，那么碰撞积分项 $\mathscr{F}_i$ 与 $\mathscr{Q}_i$ 可表示为[12]

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{F}_1=-\rho_2\overline{\mathscr{F}}-\nabla\cdot\mathbf{P}_{col}\\
&\mathscr{F}_2=\rho_2\overline{\mathscr{F}}\\
&\mathscr{Q}_1=-(\rho_2\overline{\mathscr{F}}\cdot\bar{\mathbf{G}}+\tilde{Q})-\nabla\cdot(\mathbf{P}_{col}\cdot\bar{\mathbf{G}}+\tilde{q}_{col})\\
&\mathscr{Q}_2=\rho_2\overline{\mathscr{F}}\cdot\bar{\mathbf{G}}+\tilde{Q}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\rho_2\overline{\mathscr{F}}&=\int_{\mathbf{c}_2}\int_{\mathbf{c}_1}\int_{\boldsymbol{K}}\chi(m_1\mathbf{c}_1-m_1\mathbf{c}_1')f_1f_2\,\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{K}(r_1+r_2)^2d\boldsymbol{K}d\mathbf{c}_1d\mathbf{c}_2\\
\tilde{Q}&=\int_{\mathbf{c}_2}\int_{\mathbf{c}_1}\int_{\boldsymbol{K}}\chi(m_1\mathbf{c}_1-m_1\mathbf{c}_1')\cdot[(m_1\boldsymbol{C}_1+m_2\boldsymbol{C}_2)/(m_1+m_2)]\\
&\qquad\times f_1f_2\,\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{K}(r_1+r_2)^2d\boldsymbol{K}d\mathbf{c}_1d\mathbf{c}_2
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_{col}=\int_{\mathbf{c}_2}\int_{\mathbf{c}_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta}\chi(m_1\mathbf{c}_1-m_1\mathbf{c}_1')f_1f_2\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{K}\\&\qquad\times(r_1+r_2)^3\sin\theta dzd\theta d\varphi d\mathbf{c}_1d\mathbf{c}_2\\&\boldsymbol{n}\cdot\tilde{\boldsymbol{q}}_{col}=\int_{\mathbf{c}_2}\int_{\mathbf{c}_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta}\chi(m\mathbf{c}_1-m\mathbf{c}_2')\cdot[(m_1\boldsymbol{C}_1+m_2\boldsymbol{C}_2)/(m_1+m_2)]\\&\qquad\times f_1f_2\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{K}(r_1+r_2)^3\sin\theta dzd\theta d\varphi dc_1dc_2\\&\bar{\boldsymbol{G}}=(m_1\bar{\boldsymbol{c}}_1+m_2\bar{\boldsymbol{c}}_2)/(m_1+m_2),\ \boldsymbol{g}=\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

以上四个积分式中,其积分范围须满足条件 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{K}>0$. 当速度为 $\mathbf{c}_1$ 的分子 1 与速度为 $\mathbf{c}_2$ 的分子 2 碰撞时,由分子 1 的中心指向分子 2 的中心的单位矢量定义为 $\boldsymbol{K}$. 碰撞后的速度为 $\mathbf{c}_1'$ 与 $\mathbf{c}_2'$. $\boldsymbol{n}$ 为流场中某面元 dS 的法向单位矢量, (θ,φ) 为单位矢量 K 的球面坐标(以 $\boldsymbol{n}$ 方向为极轴). $\int\cdots d\boldsymbol{K}$ 等于 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\sin\theta d\theta d\varphi$. χ 是计及稠密效应而引入的对碰撞频率的修正因子. 当 $n_2r_2^3\gg n_1r_1^3$、$r_2\gg r_1$ 时, $\chi=1/(1-\varepsilon)$. r_1 和 r_2 是分子 1 和分子 2 的半径. $m_2\overline{\mathscr{F}}$ 和 $\tilde{Q}/n_2$ 代表组元 1 作用于一个分子 2 上的力的平均值和传热率平均值. 此外, $\mathbf{P}_{col}$ 和 $\rho_2\overline{\mathscr{F}}$ 可表示为

$$\mathbf{P}_{col}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}p_1\mathbf{U}-\boldsymbol{\tau}_{col},\quad\rho_2\overline{\mathscr{F}}=-\varepsilon\nabla\left(\frac{p_1}{1-\varepsilon}\right)+\rho_2\boldsymbol{F}_D\qquad(14)$$

当 $\bar{c}_1=\bar{c}_2$ 时, $\boldsymbol{\tau}_{col}=0$ 和 $\boldsymbol{F}_D=0$.

将式(12)代入方程(7)—(10),就可得到稠密混合气体的组元动量方程和能量方程、混合物的动量方程和能量方程. 结果可归纳为

对于单流体模型

混合物动量方程中的压强项和能量方程中的压强作功项与热流项为

$$\nabla\cdot\mathbf{P}_{den}^*$$

和

$$\nabla\cdot[(\mathbf{P}_1^*+\mathbf{P}_2^*)\cdot\mathbf{c}_0]+\nabla\cdot(\mathbf{P}_{col}\cdot\bar{\mathbf{G}})+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_{den}^*\ \text{或}\ \nabla\cdot(\mathbf{P}_{den}^*\cdot\mathbf{c}_0)+\nabla\cdot(\boldsymbol{q}_{den}^*+\boldsymbol{q}')$$

其中 $\mathbf{P}_{den}^*=\mathbf{P}_1^*+\mathbf{P}_2^*+\mathbf{P}_{col}$, $\boldsymbol{q}_{den}^*=\boldsymbol{q}_1^*+\boldsymbol{q}_2^*+\boldsymbol{q}_{col}$, $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{P}_{col}\cdot(m_1\overline{\boldsymbol{C}_1^*}+m_2\overline{\boldsymbol{C}_2^*})/(m_1+m_2)$. 也可将 $\boldsymbol{q}'$ 视为碰撞热流的一部分.

对于双流体模型

组元 1 和组元 2 的动量方程中压强项、组元间作用力项为

$$\nabla\cdot(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_{col})+\rho_2\overline{\mathscr{F}}\ \text{和}\ \nabla\cdot\mathbf{P}_2-\rho_2\overline{\mathscr{F}}$$

能量方程中的压强作功项、热流(通量)项、组元间作用力项、组元间传热项为

$$\nabla\cdot(\mathbf{P}_1\cdot\bar{c}_1+\mathbf{P}_{col}\cdot\bar{\mathbf{G}})+\nabla\cdot(\boldsymbol{q}_1+\tilde{\boldsymbol{q}}_{col})+\rho_2\overline{\mathscr{F}}\cdot\bar{\boldsymbol{G}}+\tilde{\boldsymbol{Q}}$$

和

$$\nabla\cdot(\mathbf{P}_2\cdot\bar{c}_2)+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_2-\rho_2\overline{\mathscr{F}}\cdot\bar{\boldsymbol{G}}-\tilde{\boldsymbol{Q}}$$

碰撞压强张量 $\boldsymbol{p}_{col}$ 与碰撞热流矢量 $\tilde{\boldsymbol{q}}_{col}$ 同通常的分压张量与分热流矢量有本质的差别:

1. 通常的分压与分热流来源于 Boltzmann 方程的对流项,它们在两种流体力学模型中有两种不同的定义;碰撞压强与碰撞热流来源于 Boltzmann 方程的碰撞项,在两种流体力学模型中它们的定义是一样的.

2. 碰撞压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_{col}$ 的力作用点速度既不是 $\bar{\boldsymbol{c}}_1$、$\bar{\boldsymbol{c}}_2$，也不是 $\boldsymbol{c}_0$，而是 $\bar{\boldsymbol{G}}$.

如果碰撞不都是弹性的，则应以 $(\tilde{\boldsymbol{q}}_{col}+\boldsymbol{q}_{col})$ 与 $(\tilde{Q}+Q)$ 代替式(12)中的 $\tilde{\boldsymbol{q}}_{col}$ 与 $\tilde{Q}$，其中 $\boldsymbol{q}_{col}$ 与 Q 是对应于非弹性碰撞的量. 非弹性碰撞导致气体分子内部能量（如振动能、转动能等）的改变，因此应以 $c_{v_i}dT_i$ 代替能量方程(8)中的 $d\left(\frac{1}{2}\overline{C_i^2}\right)$，其中 c_{v_i} 是组元 i 的定容比热. 此外，若 $n_2\ll n_1$，$m_2\gg m_1$（这是气固两相流中通常满足的条件），则 $\mathbf{P}_2\approx 0$，$\boldsymbol{q}_2\approx 0$（但 $\mathbf{P}_2^*\neq 0$，$\boldsymbol{q}_2^*\neq 0$），$\bar{\boldsymbol{G}}\approx\bar{\boldsymbol{c}}_2$，$\tilde{\boldsymbol{q}}_{col}\approx 0$，$\tilde{Q}\approx 0$. 若令 $p_{den}=p_1+p_{col}$，$\boldsymbol{\tau}_{den}=\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_{col}$，$\mathbf{P}_{den}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_{col}$，$\boldsymbol{q}_{den}=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_{col}$，则得到常用的两相流方程组(已保留了体积力 $\boldsymbol{F}_i$)

$$\left.\begin{aligned}
&\partial\rho_1/\partial t+\nabla\cdot(\rho_1\bar{\boldsymbol{c}}_1)=0\\
&\rho_1\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{c}}_1\cdot\nabla\right)\bar{\boldsymbol{c}}_1-\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{den}+(1-\varepsilon)\nabla p_{den}+\rho_2\boldsymbol{F}_D-\rho_1\boldsymbol{F}_1=0\\
&\rho_1 c_{v_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{c}}_1\cdot\nabla\right)T_1+\mathbf{P}_{den}:\nabla\bar{\boldsymbol{c}}_1-p_{den}\nabla\cdot[\varepsilon(\bar{\boldsymbol{c}}_1-\bar{\boldsymbol{c}}_2)]\\
&\qquad+\nabla\cdot[\boldsymbol{\tau}_{col}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}_1-\bar{\boldsymbol{c}}_2)]+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_{den}-\rho_2\boldsymbol{F}_D\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}_1-\bar{\boldsymbol{c}}_2)+Q=0\\
&\partial\rho_2/\partial t+\nabla\cdot(\rho_2\bar{\boldsymbol{c}}_2)=0\\
&\rho_2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{c}}_2\cdot\nabla\right)\bar{\boldsymbol{c}}_2+\varepsilon\nabla p_{den}-\rho_2\boldsymbol{F}_D-\rho_2\boldsymbol{F}_2=0\\
&\rho_2 c_{v_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{c}}_2\cdot\nabla\right)T_2-Q=0
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

其中已利用了式(14). p_{den}、$\boldsymbol{\tau}_{den}$、$\mathbf{P}_{den}$ 与 $\boldsymbol{q}_{den}$ 分别是计及稠密效应的双流体模型中的混合物流体静压强、粘性应力张量、压强张量与热流矢量.

在两相流文献中，人们有时忽视了式$(15)_5$中本来应有 $\nabla\cdot\mathbf{P}_2$ 这一项(因很小而被略去)，而把 $\varepsilon\nabla p_{den}$ 视为颗粒分压项，把式$(15)_2$中的 $(1-\varepsilon)\nabla p_{den}$ 视为气相分压项. 其实 $\varepsilon\nabla p_{den}$ 是相间作用力的一部分，浮力就包括在其中.

在两相流中，一方面因为 $\mathbf{P}_2$ 和 $\boldsymbol{q}_2$ 很小而被略去，另一方面又增加了碰撞压强 $\mathbf{P}_{col}$ 和碰撞热流 $\boldsymbol{q}_{col}$，因而使得压强和热流的概念变得很复杂. 在那里通常把 $\mathbf{P}_{den}$ 和 p_{den} 称为混合物压强张量和流体静压强，但似乎忽视了它们同单流体模型中的定义 $\mathbf{P}_{den}^*$ 和 p_{den}^* 的区别，由此引起了关于惯性耦合项的长期争论[1-9]. 所谓惯性耦合项产生于平均速度的定义和分压定义采用了不同的流体力学模型(见式$(7)_2$和$(9)_1$). 动量方程中是否应有惯性耦合项，取决于作者用了怎样的分压和总压强的定义. 可是在两相流文献中，包括上述辩论惯性耦合项的诸论文，作者都没有明确说明所用的压强的定义. 例如 Sha 等[4]给出的组元动量方程为

$$\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{c}}_i\cdot\nabla\right)\bar{\boldsymbol{c}}_i=-\nabla p_i+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_i+\nabla\cdot(\rho_i\overline{\boldsymbol{C}_i^*\boldsymbol{C}_i^*})+\text{相互作用力项}$$

人们很难说此方程正确与否，因为作者没有给出 p_i 与 $\boldsymbol{\tau}_i$ 的确切定义. 然后 Sha 等又把它推广到两相流，给出

$$\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{c}_i\cdot\nabla\right)\bar{c}_i=-\nabla(\alpha_i p)+\nabla\cdot\tau_i+\nabla\cdot(\rho_i\bar{C}_i^*\bar{C}_i^*)+\text{相间力项}$$

其中 p 是混合物压强，α_i 是组元 i 的体积分数 ($\sum\alpha_i=1$). 这方程显然是错误的，因为(如前所述)两相流方程中的压强是用双流体模型定义的，此处不应再有惯性耦合项. 可见 Sha 等混淆了两种压强的定义. 所以明确两种压强的定义，并在使用中加以鉴别，是十分重要的.

五、结 论

1. 在两种流体力学模型中，由于采用的平均速度不同，相应的热速度、分压强、分热流等的定义也不同(见第二节).

2. 流场中某点 A 的混合物压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*$ 等于穿过面元 dS_0 (它以速度 $\mathbf{c}_0$ 通过 A 点) 的混合物动量流密度 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$，它的作功率为 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{c}_0)$. A 点的组元 i 的分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i$ 等于穿过面元 dS_i (它以速度 $\bar{\mathbf{c}}_i$ 通过 A 点)的组元 i 动量流密度 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\bar{\mathbf{c}}_i)$，它的作功率为 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i\cdot\bar{\mathbf{c}}_i)$. A 点的分压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*$ 等于穿过面元 dS_0 的组元 i 的动量流密度 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{n},\mathbf{c}_0)$ 减去扩散伴随的动量流 $\mathbf{c}_0(\rho_i\bar{\mathbf{C}}_i^*\cdot\boldsymbol{n})$，它的作功率是 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_i^*\cdot\mathbf{c}_0)$. 关于混合物压应力 $(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P})$ 和它的力作用点速度，很难简单表达. 同 $\mathbf{P}$ 一样，总热流 $\boldsymbol{q}$ 也难简单解释.

3. 混合物流体静压强 p^* 和组元分压 p_i 分别对应于式 $(4)_1$ 定义的函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{a})$ 和式 $(4)_2$ 定义的函数 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{b}_i)$ 的极小值.

4. 当研究混合物整体运动时以采用单流体模型定义的各量为宜，当研究组元运动时以采用双流体模型定义的各量为宜. 这时不仅守恒方程的形式最简洁，不包含所谓的惯性耦合项，而且方程中各项的物理意义最简单明了.

5. 气固两相流可视为一种稠密的混合气体. 当颗粒群体积分数 ε 不很小时，就有碰撞压强和碰撞热流存在. 通常的分压、分热流来源于 Boltzmann 方程的对流项，在不同的流体力学模型中它们的定义不同. 而碰撞压强和碰撞热流来源于 Boltzmann 方程的碰撞项，它们的定义与所采用的流体力学模型无关. 碰撞压应力 $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{P}_{col}$ 的力作用点速度既不是 $\bar{\mathbf{c}}_i$，也不是 $\mathbf{c}_0$，而是 $\bar{\mathbf{G}}$. 这些都说明它们同通常的分压和分热流有本质差别.

林同骥教授曾对本文提出过许多宝贵的意见和建议，作者对此表示深切的感谢.

参 考 文 献

[1] Soo, S. L., On One Dimensional Motion of a Single Component in Two Phases, *Int. J. Multiphase Flow*, 3, 1(1976).

[2] Chao, B. T., Sha, W. T. and Soo, S. L., On Inertial Coupling in Dynamic Equation of Components in a Mixture, *Int. J. Multiphase Flow*, 4, 2(1978).

[3] Sha, W. T. and Soo, S. L., Multidomain Multiphase Fluid Mechanics, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 21, 12 (1978).

[4] Sha, W. T. and Soo, S. L., On the Effect of $P\nabla\alpha$ Term in Multiphase Mechanics, *Int. J. Multiphase Flow*, 5, 2 (1979).

[5] Chao, B. T., Sha, W. T. and Soo, S. L., In Response to Discussion of G. B. Wallis (1978) and J. A. Bouré (1979), *Int. J. Multiphase Flow*, 6, 4 (1980).

[6] Crowe, C. T., On Soos Equations for the One-Dimensional Motion of Single-Component Two-Phase Flow, *Int. J. Multiphase Flow*, 4, 2 (1978).
[7] Wallis, G. B., Discussion of the Paper "On Inertial Coupling in Dynamic Equations of Components in a Mixture", *Int. J. Multiphase Flow*, 4, 5, 6 (1978).
[8] Bouré, J. A., On the Form of the Pressure Terms in the Momentum and Energy Equations of Two-Phase Models, *Int. J. Multiphase Flow*, 5, 2(1979).
[9] Hee Checn No, On Soo's Equations in Multidomain Multiphase Fluid Mechanics, *Int. J. Multiphase Flow*, 8, 3 (1982).
[10] Chapman, S. and Cowling, T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge (1970).
[11] 刘大有，包含各种耗散因素的三维非定常两相流基本方程，第二届全国多相流体力学、非牛顿流体力学、物理-化学流体力学学术会议论文汇编，No. 001 (1982).
[12] 刘大有，建立两相流方程的动力论方法，力学学报.
[13] Mitchner, M. and Kruger, Jr. C. H., Partially Ionized Geses (Chapter 7), John Wiley & Sons (1979).
[14] Boyd, T. J. M. and Sanderson, J. J., Plasma Dynamics (Chapter 3), Thomas Nelson & Sons Ltd. (1969).
[15] Woods, L. C., The Thermodynamics of Fluid Systems (Chapter 9), Clarendon. Oxford (1975).
[16] Pai, S. I., Modern Fluid Mechanics, Science Press, Beijing (1981).
[17] Leontovich, M. A., Reviews of Plasma Physics, vol. 1.
[18] Soo, S. L., Fluid Dynamics of Multiphase System, Blaisdell Publishing Co. Waltham (1967).
[19] Drew, D. A. and Segel, L. A., Averaged Equations for Two-Phase Flow, *Studies in Applied Math.*, 50, 3 (1971).
[20] Ishii, M., Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow, Eyrolles, Paris (1975).

ON PRESSURE AND THERMAL FLUX IN GAS-MIXTURE FLOW AND IN TWO-PHASE FLOW

Liu Dayou
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

First the two different definitions of pressure and thermal flux etc. in diffusion model and in two-fluid model are given. Then a physical interpretation of pressure and thermal flux is discussed by introducing the momentum flux vector $\dot{M}$ and the energy flux $\dot{\mathscr{E}}$ through a surface dS in flow field. In describing the motion of mixture, it is suggested to use the quantities defined in diffusion model. In describing the motion of a component, it is suggested to use the quantities defined in two-fluid model. The collision pressure and the collision thermal flux in dense gas-mixture are also discussed in detail, i.e. their origin, their expressions in momentum equation and in energy equation, and the difference in physical character between them and the normal partial pressure and partial thermal flux.

A gas-particle flow can be treated as a flow of dense gas-mixture. The long-standing controvesy whether the "inertial coupling term" should exist in the momentum equation can be clarified by the two different definitions of pressure.