

# 二元拉伐尔喷管不可压缩流动精确解

林同骥 浦 群

(中国科学院力学研究所, 1985年5月2日收到)

## 摘 要

在物理平面上, 仔细分析沿拉伐尔喷管中心线和喷管型线的流动, 可以发现拉伐尔喷管流动的上下两半部分在速度平面中是两个相同的具有尾缘点前后错开的双尾的裂缝厚翼型。该两个翼型处在不同的黎曼面内。翼型的内部在复位势平面中可转绘成无限长的条带。利用这些结果得到了二元拉伐尔喷管内不可压缩位势流动的精确解。精确解对任意给定的收缩比  $n_1$ 、扩张比  $n_2$  和喉部壁面曲率半径  $R^*$  都适用。作为应用的举例, 给出了一些典型的喷管型线、喷管内的流速分布以及不同瞬间流体质点的所在位置。

## 一、引 言

本文考虑二维理想不可压缩流体在拉伐尔喷管内的流动问题。这是一个典型的基本流动问题, 但它的许多重要流动特性还未被系统地认识。例如喷管喉部壁面曲率半径  $R^*$ , 收缩比  $n_1$  和扩张比  $n_2$  怎样影响喷管喉部和喉部截面的流速分布? 对于收缩角和扩张角不等的喷管, 喉部最大流速出现在哪里? 喉部截面上的流向如何变化? 流体通过喉部各点的时间经历如何? 这些问题直接关系到喷管喉部型线的设计, 需要在定性和定量上予以回答。本文的目的是试图通过对喷管流动的仔细分析回答上述一些问题。

拉伐尔喷管内二元理想不可压缩流体流动问题的控制方程是拉普拉斯方程。由于计算技术的进步, 求解这类方程已经发展了许多数值方法。但是由于其边界条件的非线性性质, 采用数值方法来系统地全面地了解不同几何参数下拉伐尔喷管流动的种种特性需要耗费相当的机时, 且会引进数值计算所不可避免的误差。与此相比, 精确解能以用很少的工作量给出许多确切的定性和定量的结果而具有独特的意义, 同时它又可用以衡量其他求解方法的精确程度及误差范围。

速度图法有可能给出上述问题的精确解, 关键在于如何在速度面上选取适当型线, 使得在物理面上能给出所需要的喷管型线。本文分析了物理平面上沿拉伐尔喷管中心线和喷管型线的流动, 发现拉伐尔喷管流动的上下两半部分在速度平面中是两个相同的具有尾缘点前后错开的双尾的裂缝厚翼型。裂缝翼型的内部在复位势平面中可转绘成无限长的条带。利用这些结果得到了具有四个可调整参数的拉伐尔喷管流动的精确解。该解对任意给定的收缩比  $n_1$ , 扩张比  $n_2$  和喉部壁面曲率半径  $R^*$  均适用。文中还给出了  $n_1$ ,  $n_2$  和  $R^*$  与四个可调参数间关系的代数表达式。作为应用举例, 给出了一些典型的喷管型线、流速分布以及流体质点的时间经历。

## 二、速度面型线

图1(a)给出一般二元拉伐尔喷管的壁面型线。如图所示,它通常是对称于 $x$ 轴的,因此只需要分析它的上半部分。令 $y$ 轴通过喉部截面。不失一般,假定喷管喉部半高度为1。喷管的主要几何参数为收缩比 $n_1$ 、扩张比 $n_2$ 和喉部壁面曲率半径 $R^*$ 。图1(a)也给出了最大收缩角 $\theta_1$ 和最大扩张角 $\theta_2$ 。为讨论方便,设 $n_1 > n_2$ 。

首先分析喷管中心线 $AFE$ 上的流速。由于流动对称于 $x$ 轴,沿中心线上垂直速度分量 $v$ 均为零。由于喷管截面收缩,从 $A$ 到 $F$ 水平速度分量 $u$ 从 $u_A$ 单调上升到 $u_F$ ;而从 $F$ 到 $E$ ,由于截面扩张,从 $u_F$ 单调下降到 $u_E$ 。上述沿中心线 $AFE$ 上流速的变化情况,在速度面上形成折线 $AFE$ ,如图1(b)所示。因为 $n_1 > n_2$ ,所以 $u_A < u_E$ 。必须指出,对于收缩和扩张相对于喉部截面不对称( $n_1 \neq n_2$ )的拉伐尔喷管流动, $F$ 点的位置不在喷管喉部截面上,这在以后还将仔细讨论。

现在分析沿喷管壁面 $ABCDE$ 的流速。从图1(a)喷管壁面型线看:在 $ABC$ 线上,由于截面收缩,速度 $v$ 从零下降到一个负值 $v_B$ 后又回升到零;速度 $u$ 从进口处的流速 $u_A$ 单调上升到喉部壁面点 $C$ 处的流速 $u_C$ 。在 $CDE$ 线上,由于截面扩张, $v$ 从零上升到一个正值 $v_D$ 后又下降到零; $u$ 从喉部壁面流速 $u_C$ 单调下降到出口处流速 $u_E$ 。上述沿喷管壁面 $ABCDE$ 上流速( $w = u - iv$ )的变化情况,在速度面上形成开口的环形线 $ABCDE$ ,如图1(b)所示。

综上所述,物理面 $z$ 上一般拉伐尔喷管的上半部在速度面 $w$ 上形成尾部分叉、尾缘点前后错开的厚翼剖面,这就是拉伐尔喷管在速度面上的型线。由于问题的对称性,整个喷管是速度面上不同黎曼面的两个裂缝错尾翼型,两个黎曼面在图1(b)所示的公共折线 $AFE$ 上相连,公共折线对应于图1(a)中喷管中心流线 $AFE$ 上的流速分布。

有了速度面上的喷管型线,下一步是寻找将裂缝错尾翼型内部转绘到复平面 $\zeta$ 上无限长条带内部的转绘函数 $w = f(\zeta)$ 。这里 $\zeta = \Omega/K$ , $\Omega$ 是喷管流动的复位势, $K$ 是一常数。我们知道,尾部分叉的翼剖面的内部区域可由双曲线一侧的区域位移、反形、放大得到,这样得到的翼剖面,它的两个尾缘点是并列的<sup>[1]</sup>。为使两尾缘点前后错开,如图1(b)所示的情况,我们在 $w$ 作为 $\zeta$ 的函数关系式中增加一项 $\tau \text{sh}\zeta$ ,得到:

$$w = \frac{\text{ch}\zeta + \text{ch}\lambda}{\text{ch}\zeta - \tau \text{sh}\zeta + \sigma \text{ch}\lambda}, \quad w = u - iv, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (2.1)$$

边界条件为 $\eta = \eta_0$ 。这里 $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ 和 $\eta_0$ 都是由喷管几何参数 $R^*$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ 和 $\theta_1$ 或 $\theta_2$ 决定的待定参数, $U$ 是参考速度。这一关系式将 $\zeta$ 面上 $0 \leq \eta \leq \eta_0$ 的区域映象为 $w$ 面上尾部分叉、尾缘点前后错开的翼剖面的内部区域,如图1(b)和(c)所示。

从图1(a)、(b)、(c)看出,流线 $AFE$ 在 $z$ 或 $\zeta$ 面上是直线,而在 $w$ 面上形成折线。分

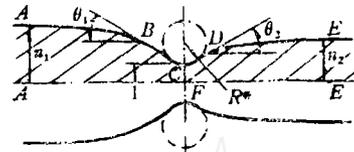
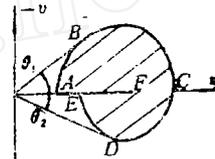
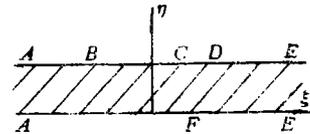
(a) 物理面 $z$ (b) 速度面 $w$ (c) 复位势面 $\zeta$ 

图1 喷管流动的平面转换

析物理面上的喷管流动,沿流线方向看,流速在  $F$  点有极大值;而沿等势线方向看,流速在  $F$  点则为极小值。因此,事实上喷管流场中的  $F$  点是个鞍点,而不是奇点。在速度面上分析流动性性质时,重要的是应把鞍点与奇点区分开来。

### 三、喷管型线

根据不可压缩位势流动理论:

$$z = K \int \frac{d\xi}{w}, \quad z = x + iy, \quad \Omega = \phi + i\psi = K\xi, \quad w = u - iv = qe^{i\theta} \quad (3.1)$$

其中  $K$  是常数,为方便起见,令  $K = n_0 U / \eta_b$ 。将式(3.1)代入(2.1)并积分,得到:

$$z(\xi) = \frac{n_0}{\eta_b} \left[ \xi - (1-\sigma) \coth \lambda \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}(\xi + \lambda)}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}(\xi - \lambda)} - \tau \ln(\operatorname{ch} \xi + \operatorname{ch} \lambda) - b \right] \quad (3.2)$$

分开实部和虚部,得到物理面上的喷管坐标:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \frac{n_0}{\eta_b} \left\{ \xi - \frac{1}{2}(1-\sigma) \coth \lambda \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{th} \lambda \operatorname{th} \xi + \cos \eta \operatorname{sech} \lambda \operatorname{sech} \xi}{1 - \operatorname{th} \lambda \operatorname{th} \xi + \cos \eta \operatorname{sech} \lambda \operatorname{sech} \xi} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \tau \ln [(\cos \eta \operatorname{ch} \xi + \operatorname{ch} \lambda)^2 + \sin^2 \eta \operatorname{sh}^2 \xi] - b \right\} \\ y(\xi, \eta) &= \frac{n_0}{\eta_b} \left\{ \eta - (1-\sigma) \coth \lambda \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\sin \eta \operatorname{th} \lambda}{\cos \eta + \operatorname{ch} \xi \operatorname{sech} \lambda} \right] \right. \\ &\quad \left. - \tau \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\sin \eta \operatorname{th} \xi}{\cos \eta + \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sech} \xi} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

取  $\xi$  或  $\eta$  为常数,方程(3.3)给出喷管流动的等势线和流线;  $\eta = \eta_b$ , 则给出喷管型线。

这里有六个可调整参数  $\lambda, \sigma, \tau, \eta_b, n_0$  和  $b$ , 它们用于调整喷管的几何形状、尺寸以及喷管在  $z$  平面中的位置。根据无量纲定义及  $y$  轴通过喉部截面和喉部半高度为 1 的假定,有:

$$n_1 = y(-\infty, \eta_b), \quad n_2 = y(+\infty, \eta_b), \quad x^* = x(\xi^*, \eta_b) = 0, \quad y^* = y(\xi^*, \eta_b) = 1 \quad (3.4)$$

这里下标  $b$  表示喷管壁面,上标  $*$  为喉部条件。

将式(3.4)代入(3.3),得到:

$$\left. \begin{aligned} b &= \xi^* - \frac{1}{2}(1-\sigma) \coth \lambda \ln \frac{\operatorname{ch}(\xi^* + \lambda) + \cos \eta_b}{\operatorname{ch}(\xi^* - \lambda) + \cos \eta_b} - \frac{\tau}{2} \ln [(\cos \eta_b \operatorname{ch} \xi^* + \operatorname{ch} \lambda)^2 \\ &\quad + \sin^2 \eta_b \operatorname{sh}^2 \xi^*] \\ n_0 &= \left[ 1 - \frac{(1-\sigma)}{\eta_b} \coth \lambda \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sh} \lambda \sin \eta_b}{\operatorname{ch} \xi^* + \operatorname{ch} \lambda \cos \eta_b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau}{\eta_b} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin \eta_b \operatorname{sh} \xi^*}{\cos \eta_b \operatorname{ch} \xi^* + \operatorname{ch} \lambda} \right]^{-1} \\ n_1 &= (1+\tau)n_0, \quad n_2 = (1-\tau)n_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

因为  $\eta = \text{常数}$  代表流线,根据微分几何,物理平面  $(x, y)$  中流线的曲率半径可写为:

$$\left. \begin{aligned} R &= [1 - (dy/dx)^2]^{3/2} (d^2y/dx^2)^{-1} \\ dy/dx &= y_{\xi} x_{\xi}^{-1}, \quad d^2y/dx^2 = (x_{\xi} y_{\xi\xi} - y_{\xi} x_{\xi\xi}) x_{\xi}^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

这里下标  $\xi$  表示对  $\xi$  的偏导数。在喉部壁面 ( $\eta = \eta_b$ ) 处  $\theta = \theta^* = (dy/dx)^* = (y_\xi)^* = 0$ , 于是从式(3.4)和(3.6)得到喉部壁面曲率半径的表达式:

$$\left. \begin{aligned} R^* &= (x_\xi^*)^2 (y_{\xi\xi}^*)^{-1} \\ x_\xi^* &= \frac{n_0}{\eta_b} \frac{\text{ch}^2 \xi^* - \sin^2 \eta_b + (1+\sigma) \text{ch} \lambda \cos \eta_b \text{ch} \xi^* + \sigma \text{ch}^2 \lambda - \tau \text{sh} \xi^* (\text{ch} \xi^* + \text{ch} \lambda \cos \eta_b)}{\text{ch}^2 \xi^* + 2 \text{ch} \lambda \cos \eta_b \text{ch} \xi^* + \text{ch}^2 \lambda - \sin^2 \eta_b} \\ y_{\xi\xi}^* &= \frac{n_0}{\eta_b} \frac{\text{ch} \lambda \sin \eta_b [(1-\sigma) \text{ch} \xi^* - \tau \text{sh} \xi^*]}{\text{ch}^2 \xi^* + 2 \text{ch} \lambda \cos \eta_b \text{ch} \xi^* + \text{ch}^2 \lambda - \sin^2 \eta_b} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

从式(3.5)和(3.7)可知, 当  $\lambda, \sigma, \tau$  和  $\eta_b$  给定时,  $R^*, n_1$  和  $n_2$  便确定了, 喷管的形状也完全确定, 因此, 对选定的  $\eta_b$  和  $\tau$ , 可以作出不同  $n_0$  和  $R^*$  下  $\sigma$  随  $\lambda$  变化曲线。  $\eta_b = \pi/2, \tau = 0.2$  的曲线给出于图 2(a);  $\eta_b = \pi/2, \tau = 0.5$  的曲线给出于图 2(b)。

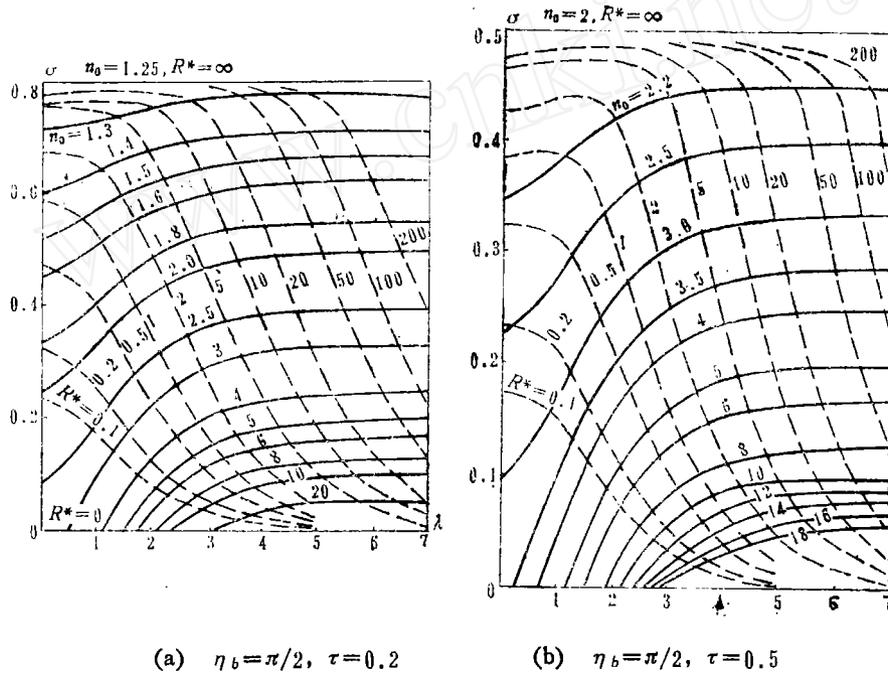


图 2 不同  $n_0$  和  $R^*$  下的形状参数  $\sigma$  和  $\lambda$

应用上述关系式, 当固定其余参数, 仅改变  $n_1$  或  $R^*$  时喷管型线的变化分别给出于图 3(a)和(b); 而  $R^*$  和  $n_0$  相同、 $\tau$  不同的喷管喉部型线给出于图 3(c)。由图可见喷管型线间的过渡是平滑的。上面得到的精确解对所有  $R^*, n_1$  和  $n_2$  的实用值都适用。由图 3(c)还可以看到  $\tau$  值增加将使收缩角  $\theta_1$  增加, 而使扩张角  $\theta_2$  减小。

这里给出的拉伐尔喷管不可压缩流动的流线和等势线, 为求解拉伐尔喷管跨声速流动提供了有效的贴体坐标系<sup>[2]</sup>。

#### 四、速度分布

分开式(2.1)的实部和虚部, 并利用  $q^2 = u^2 + v^2, \theta = \text{tg}^{-1}(v/u)$ , 得到喷管流动的速度分布,

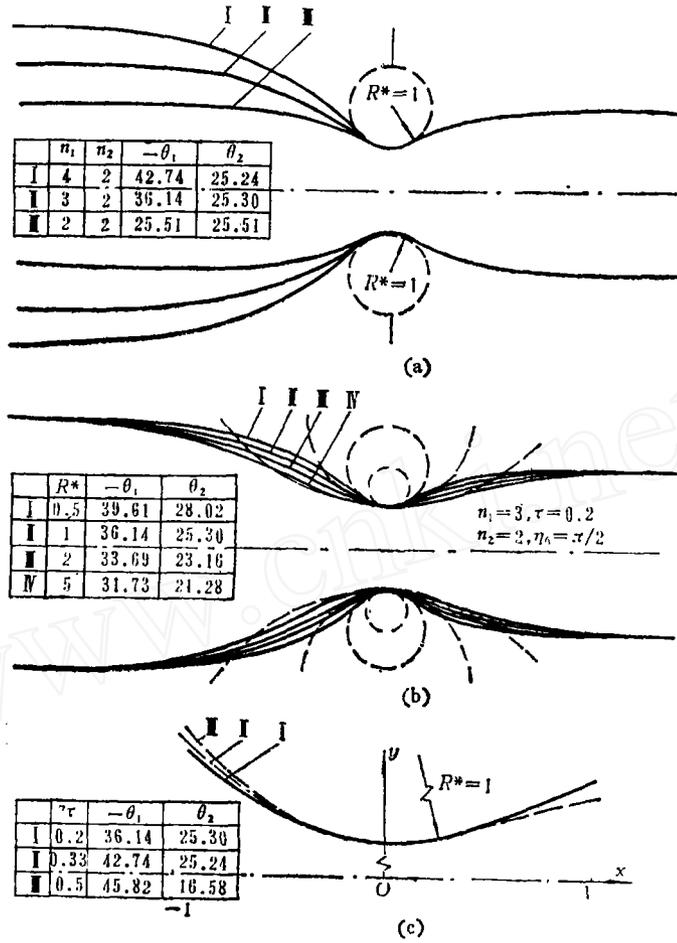


图3 喷管型线 (a)  $n_1$  不同, (b)  $R^*$  不同, (c)  $\tau$  不同

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{u}{U} &= [(\cos\eta\text{ch}\xi + \text{ch}\lambda)(\cos\eta\text{ch}\xi - \tau\cos\eta\text{sh}\xi + \sigma\text{ch}\lambda) + \sin^2\eta\text{sh}\xi(\text{sh}\xi - \tau\text{ch}\xi)]A^{-1} \\
 \frac{v}{U} &= \sin\eta[\text{sh}\xi(\cos\eta\text{ch}\xi - \tau\cos\eta\text{sh}\xi + \sigma\text{ch}\lambda) - (\cos\eta\text{ch}\xi + \text{ch}\lambda)(\text{sh}\xi - \tau\text{ch}\xi)]A^{-1} \\
 \frac{q}{U} &= [(\cos\eta\text{ch}\xi + \text{ch}\lambda)^2 + \sin^2\eta\text{sh}^2\xi]^{1/2}A^{-1/2} \\
 \text{tg}\theta &= \sin\eta[(1-\sigma)\text{ch}\lambda\text{ch}\xi - \tau(\text{ch}\lambda\text{ch}\xi + \cos\eta)]B^{-1} \\
 A &= (\cos\eta\text{ch}\xi - \tau\cos\eta\text{sh}\xi + \sigma\text{ch}\lambda)^2 + \sin^2\eta(\text{sh}\xi - \tau\text{ch}\xi)^2 \\
 B &= \text{ch}^2\xi - \sin^2\eta + (1+\sigma)\text{ch}\lambda\cos\eta\text{ch}\xi + \sigma\text{ch}^2\lambda - \tau\text{sh}\xi(\text{ch}\xi + \text{ch}\lambda\cos\eta)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

在式(4.1d)中令  $\theta=0$ , 可以得到  $\xi$  和  $\eta$  的关系式, 这是流动方向为零的点上  $\xi$  和  $\eta$  的关系. 当  $\eta=\eta_0$  和  $\eta=0$  时该关系式分别给出  $\xi^*$  和  $\xi_r$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \xi &= \text{sh}^{-1}(\text{sh}\nu\text{sech}\lambda\cos\eta) + \nu, \quad \xi^* = \text{sh}^{-1}(\text{sh}\nu\text{sech}\lambda\cos\eta_0) + \nu \\
 \xi_r &= \text{sh}^{-1}(\text{sh}\nu\text{sech}\lambda) + \nu, \quad \nu = \frac{1}{2}\ln[(1-\sigma+\tau)/(1-\sigma-\tau)]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

从式(4.2a)知道喷管流动中除了中心线上  $\theta=0$  外, 在喉部区域中由鞍点  $F$  到壁面点  $C$  的曲

线上  $\theta$  亦为零。

### 五、 $\eta_b = \pi/2$ 的情况

不同的  $\eta_b$  对应着速度面上不同的裂缝错尾翼型。 $\eta_b = \pi/2$  对应着收缩段不出现逆压梯度的最大收缩角。 $\eta = \eta_b = \pi/2$  时, 从式(3.3)、(3.5)和(3.7)可知喷管型线为:

$$\left. \begin{aligned} x_b &= \frac{2n_0}{\pi} \left[ \xi - \frac{1}{2} (1-\sigma) \coth \lambda \ln \frac{1 + \text{th} \lambda \text{th} \xi}{1 - \text{th} \lambda \text{th} \xi} - \frac{\tau}{2} \ln(\text{sh}^2 \xi + \text{ch}^2 \lambda) - b \right] \\ y_b &= \frac{2n_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - (1-\sigma) \coth \lambda \text{tg}^{-1} \frac{\text{sh} \lambda}{\text{ch} \xi} - \tau \text{tg}^{-1} \frac{\text{sh} \xi}{\text{ch} \lambda} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

几何参数是:

$$\left. \begin{aligned} R^* &= \frac{2n_0 \sigma^2 \text{ch} \lambda}{\pi(1-\sigma)} \cdot \frac{(1 - \text{th}^2 \lambda \text{th}^2 \nu)}{(1 - \text{th}^2 \nu)^{\frac{3}{2}}} \\ n_0 &= \left[ 1 - \frac{2}{\pi} (1-\sigma) \coth \lambda \text{tg}^{-1} \frac{\text{sh} \lambda}{\text{ch} \nu} - \frac{2}{\pi} \tau \text{tg}^{-1} \frac{\text{sh} \nu}{\text{ch} \lambda} \right]^{-1} \\ b &= \nu - \frac{1}{2} (1-\sigma) \coth \lambda \ln \frac{1 + \text{th} \lambda \text{th} \nu}{1 - \text{th} \lambda \text{th} \nu} - \frac{1}{2} \tau \ln(\text{sh}^2 \nu + \text{ch}^2 \lambda) \\ \nu &= \frac{1}{2} \ln[(1-\sigma+\tau)/(1-\sigma-\tau)] \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

同样从式(4.1)可得到沿喷管壁面的速度分布和壁面倾角  $\theta_b$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_b}{U} &= [\text{sh}^2 \xi - \tau \text{ch} \xi \text{sh} \xi + \sigma \text{ch}^2 \lambda] / [(\text{sh} \xi - \tau \text{ch} \xi)^2 + \sigma^2 \text{ch}^2 \lambda] \\ \frac{v_b}{U} &= -\text{ch} \lambda [(1-\sigma) \text{sh} \xi - \tau \text{ch} \xi] / [(\text{sh} \xi - \tau \text{ch} \xi)^2 + \sigma^2 \text{ch}^2 \lambda] \\ \text{tg} \theta_b &= -\text{ch} \lambda [(1-\sigma) \text{sh} \xi - \tau \text{ch} \xi] / [\text{sh}^2 \xi - \tau \text{ch} \xi \text{sh} \xi + \sigma \text{ch}^2 \lambda] \\ \frac{q_b^2}{U^2} &= (\text{sh}^2 \xi + \text{ch}^2 \lambda) / [(\text{sh} \xi - \tau \text{ch} \xi)^2 + \sigma^2 \text{ch}^2 \lambda] \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

从式(5.3c), 利用  $d\theta_b/d\xi=0$ , 得到求解拉伐尔喷管收缩角  $\theta_1$  和扩张角  $\theta_2$  的方程:

$$\frac{\tau \sigma}{1-\sigma} \text{sh}^2 \lambda \text{th}^3 \xi - (1 + \sigma \text{ch}^2 \lambda) \text{th}^2 \xi + \frac{\tau}{1-\sigma} (2 - \sigma \text{ch}^2 \lambda) \text{th} \xi - \frac{\tau^2}{1-\sigma} + \sigma \text{ch}^2 \lambda = 0 \quad (5.4)$$

方程(5.4)的三个根中只有两个满足  $|\text{th} \xi| \leq 1$ , 将此两根代入式(5.3c)即给出  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。

与图2类似, 可以对给定的  $\tau$  和  $\eta_b$ , 给出不同  $\sigma$  和  $\lambda$  下收缩角  $\theta_1$  和扩张角  $\theta_2$  的变化曲线。对拉伐尔喷管喉部流动来说, 收缩角和扩张角的影响比喷管收缩比和扩张比的影响更为直接。 $\eta_b = \pi/2$ ,  $\tau = 0.2$  时不同  $n_0$  下  $R^*$  对  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的影响给出于图4(a)。可见  $R^*$  越小,  $R^*$  对  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的影响越大; 对给定的  $R^*$ ,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  随  $n_0$  增长而增长。图4(b)给出  $\eta_b = \pi/2$ ,  $R^* = 1$  下不同  $n_1$  和  $n_2$  时  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的变化。可见  $n_1$  的变化主要影响  $\theta_1$ , 而  $n_2$  的变化主要影响  $\theta_2$ 。因此可以主要通过调节收缩比和扩张比以满足所要求的  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。

了解喉部壁面曲率半径  $R^*$  如何影响喉部截面的流速分布是很重要的。对于收缩段和扩张段对称于喉部截面的喷管,  $\tau = 0$ ,  $n_1 = n_2 = n_0$ 。在喉部截面上  $\xi = 0$ 。利用这些关系, 并令  $\eta_b = \pi/2$ , 式(4.1c)、(3.3b)和(5.2a,b)分别成为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{U} &= (\cos\eta + \operatorname{ch}\lambda) / (\cos\eta + \sigma \operatorname{ch}\lambda) \\ y &= \frac{2n_0}{\pi} \left[ \eta - (1-\sigma) \operatorname{coth}\lambda \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin\eta \operatorname{th}\lambda}{\cos\eta + \operatorname{sech}\lambda} \right] \\ R^* &= 2n_0 \sigma^2 \operatorname{ch}\lambda / [\pi(1-\sigma)] \\ n_0 &= \left[ 1 - \frac{2}{\pi} (1-\sigma) \operatorname{coth}\lambda \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{sh}\lambda \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

利用式(5.5)、 $n_0=20$  时不同  $R^*$  下喉部截面的流速分布示于图 5。由图可见, 当喉部壁面曲率半径  $R^*$  减小时, 靠近喷管壁面处的流速很快增长。

上面所给拉伐尔喷管型线的收缩段部分也可用于水洞或低速风洞的收缩型线设计, 但应以所用场合不同选用不同的喉部壁面曲率半径  $R^*$ 。如对水洞或亚声速风洞, 要求收缩段出口处的流速分布高度均匀, 故宜采用大  $R^*$ 。适用于不可压缩流动的收缩段对可压缩流动同样适用, 因为在收缩段压缩性影响是增加沿壁面的正压梯度, 从而提高流动的稳定性<sup>[3]</sup>。对于超声速风洞, 收缩段后面紧接有扩张段, 可进一步调整流速沿截面分布的不均匀, 因而可

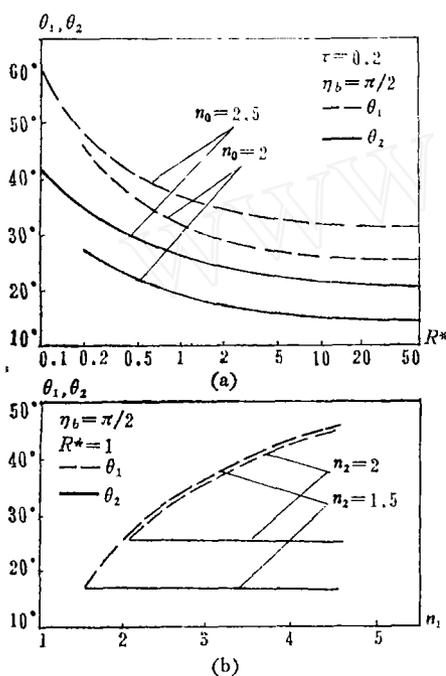


图 4  $n_1, n_2$  和  $R^*$  对收缩角和扩张角的影响

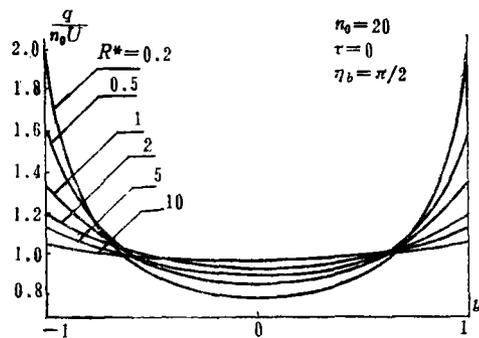


图 5 喉部截面流速分布 ( $\tau=0, \eta_b=\pi/2$ )

采用中等大小的  $R^*$ 。对于气动激光喷管, 为提高喷管对高温气体振动能的冻结效率, 要求气流通过收缩段喉部的时间尽量缩短, 一般采用  $R^*$  为 1 左右或更小。

## 六、质点流动时间经历

流场中的等时线给出不同瞬间流体质点所在的位置。令  $\bar{t}$  表示时间,  $s$  表示物理面上任一流线的长度。从速度  $q$  和势函数  $\phi$  的定义有:  $q = d\phi/ds = ds/dt$ , 从中消去  $ds$ , 得到流体质点沿流线流动的时间  $\bar{t}$ :

$$\bar{t} = \int q^{-2} d\phi \quad (6.1)$$

定义无因次时间为  $\bar{t}/\bar{t}_r$ , 而参考时间  $\bar{t}_r = 1/(n_0 U)$  是流体质点以喉部平均流速  $n_0 U$  通过一个喉部半高度的距离所需要的时间; 同时, 由式(3.1c)和(3.3)已得到  $\phi = K\xi$ ,  $K = n_0 U/\eta_b$ ,

于是从式(6.1)可得:

$$t = (1 + \tau)(n_0^2 U^2 / \eta_b) \int q^{-2} d\xi \quad (6.2)$$

将  $q$  的表达式(4.1c, e)代入(6.2)进行积分便可导出喷管内质点沿各条流线的流动时间经历表达式。作为举例, 对  $\eta_b = \pi/2$  和  $\tau = 0$ , 有:

$$t(\xi, \eta, \lambda, \sigma) = \frac{n_0^2}{\pi} \left\{ \xi - A(\eta, \lambda, \sigma) \ln \frac{\operatorname{ch}(\lambda + \xi) + \cos \eta}{\operatorname{ch}(\lambda - \xi) + \cos \eta} - B(\eta, \lambda, \sigma) \operatorname{ctg} \eta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin \eta \operatorname{sh} \xi}{\cos \eta \operatorname{ch} \xi + \operatorname{ch} \lambda} \right\} \quad (6.3)$$

$$A(\eta, \lambda, \sigma) = \operatorname{coth} \lambda \left[ (1 - \sigma) - \frac{1}{2} B(\eta, \lambda, \sigma) \right]$$

$$B(\eta, \lambda, \sigma) = (1 - \sigma)^2 / (1 - \operatorname{sech}^2 \lambda \cos^2 \eta)$$

图6给出  $n_0 = 20$ ,  $\tau = 0$ ,  $\eta_b = \pi/2$  时不同  $R^*$  下壁面流体质点的等时线。可以看到  $R^*$  越小, 流体加速越晚, 加速越集中在喉部。

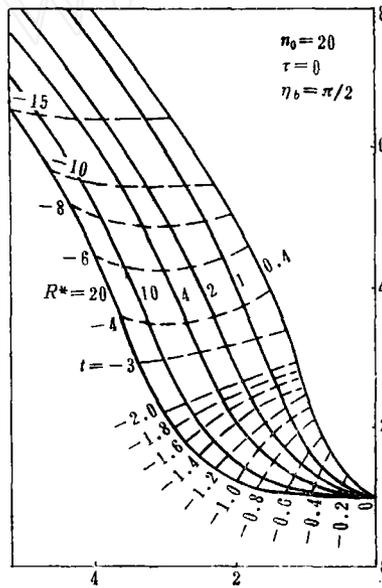


图6 不同  $R^*$  下壁面流体质点等时线  $n_0 = 20, \tau = 0, \eta_b = \pi/2$

## 七、结 论

综上所述, 本文有如下结论:

1. 用速度图法得到了二元拉伐尔喷管不可压缩位势流动的精确解, 该解适用于任意收缩比  $n_1$ , 扩张比  $n_2$  和喉部壁面曲率半径  $R^*$ 。
2. 给出了喷管几何参数  $n_1$ ,  $n_2$  和  $R^*$  与喷管可调整参数  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$  和  $\eta_b$  之间的代数关系式及相应的曲线, 从而可按所需的喷管几何参数方便地得到相应喷管流动的解。
3. 给出了喷管流动的速度分布以及不同瞬间流体质点的所在位置, 这将有助于喷管型

线的选择。

4. 精确解提供了一系列典型的喷管型线。变化喷管几何参数之一而保持其余参数不变时, 喷管型线间过渡平滑。可供不同要求下喷管型线设计参考。

5. 对喉部区域流速分布的分析表明, 在速度平面内图 1(b)所示的折线  $AFE$  是允许的, 因为  $F$  是鞍点而不是奇点。

### 参 考 文 献

- [1] Lin, T. C. and L. G. Witehead, The St. Venant torsion problem for the hyperbolic airfoil cross section, *Bulletin, Experimental Station, Univ. of Wash., Seattle, Wash., U. S. A.*, 118 (1951), 103—111.
- [2] 浦群, 林同骥, 二元拉伐尔喷管中的亚、跨声速流动, *力学学报*, 16, 6 (1984), 535—545.
- [3] Lin, T. C., Ducts for accelerated flow, *Proc. of the Second U. S. National Congress of Applied Mechanics* (1954).

## An Exact Solution for Incompressible Flow Through a Two-Dimensional Laval Nozzle

Lin Tong-ji    Pu Qun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

A careful examination of the variation of the velocity along the centerline and the contour of a Laval nozzle in the physical plane shows that either the upper or the lower half of the Laval nozzle assumes the same form of a slitted thick airfoil with tandem trailing edges. These two airfoils lie on different Riemann sheets in the hodograph plane. The interior of the airfoil is then mapped onto an infinite strip in the complex potential plane. Making use of these results, we obtained an exact solution for the incompressible potential flow through a two-dimensional Laval nozzle. The solution is applicable for nozzles with any given contraction ratio  $n_1$ , expansion ratio  $n_2$ , and throat wall radius  $R^*$ . As examples of the method, various nozzle contours, the velocity distribution of the flow, and the locations of the fluid particles at different time intervals are presented.