

用应力杂交法计算Reissner型板复合型 弯曲应力强度因子

中国科学院力学研究所 李英治 柳春图

摘 要

本文在Reissner型平板裂纹尖端应力应变场一般解^[2,3]的基础上,采用应力杂交法构造高阶奇异元。由于采用了奇异元并解决了单元协调问题,使得Ⅰ型、Ⅲ型应力强度因子均获得较好的计算精度。本文计算了有限尺寸板复合型弯曲应力强度因子,并对Reissner型板若干力学特性进行了讨论分析。

一、前 言

有限尺寸板复合型弯曲断裂问题是工程结构中常遇到的问题。由于数学上的困难,至今还没有获得解析解答。在板壳有限元分析中,由于剪力比弯矩小一个量级,因此剪力的计算精度低于弯矩的计算精度。而在复合型弯曲断裂问题中,Ⅰ型、Ⅲ型应力强度因子同时出现,Ⅰ型应力强度因子与扭矩有关,Ⅲ型应力强度因子与剪力有关,欲同时获得 K_I , K_{II} 的精确结果十分困难。在文献〔2〕中,作者以裂纹尖端应力应变场一般解^[2,3]为基础,首次采用高阶奇异元进行了有限尺寸板复合型断裂分析的尝试。惟文献〔2〕采用非协调元,影响了计算精度(主要指 K_{II} 的计算精度)进一步提高。而杂交法是解决单元协调问题的有力工具,本文拟用应力杂交法构造高阶奇异元,实现了奇异元和常规元之间的协调,计算了有限尺寸板复合型弯曲应力强度因子,并对Reissner板若干力学特性进行了讨论分析。

二、有限元基本公式的建立

考虑含半无限穿透裂纹的平板,取裂纹尖端为坐标原点,见图1。当采用Reissner理论时,以三个广义位移 ψ_x , ψ_y 和 w 表示的基本方程为^[6]

$$\left. \begin{aligned} D\left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{2y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) &= 0 \\ D\left(\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}\right) + C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) &= 0 \\ C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1985年11月4日收到。

ψ_x, ψ_y 是变形前垂直中面法线的转角, w 为挠度。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ 为抗弯刚度}$$

$$C = \frac{5}{6}Gh \text{ 为抗剪刚度}$$

裂纹面边界条件为

$$\theta = \pm \pi, M_\theta = M_{y_\theta} = Q_\theta = 0 \quad (2)$$

文献〔3〕用特征函数展开方法, 给出了裂纹尖端应力应变场包括 I, II, III 型的一般解。我们截取前若干项作为裂纹尖端奇异元内部应力场的模式。

$$\sigma = P\beta \quad (3)$$

从公式 (3) 可以获得边界力的表达式

$$T = R\beta \quad (4)$$

假定边界位移为

$$u = Lq \quad (5)$$

式中 σ 为奇异元内部应力场, T 为边界力, u 为假定的边界位移, β 为广义力列向量, q 为广义位移列向量。若记 ∂V_n 为全部边界, S_{σ_n} 为应力已知边界, 则修正余能原理表达为〔1〕

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left(\int_{V_n} \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{\partial V_n} T_i u_i dS + \int_{S_{\sigma_n}} \bar{T}_i u_i dS \right) \quad (6)$$

将式 (3), 式 (4), 式 (5) 代入式 (6) 中得

$$\Pi_{mc} = \sum_n \left(-\frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T G q + Q^T q \right) \quad (7)$$

式中

$$H = \int_{V_n} P^T C P dV \quad (8)$$

$$G = \int_{\partial V_n} R^T L dS \quad (9)$$

$$Q^T = \int_{S_{\sigma_n}} \bar{T}^T L dS \quad (10)$$

对 β, q 变分得

$$H\beta - Gq = 0$$

所以

$$\beta = H^{-1}Gq \quad (11)$$

于是式 (6) 可改写为以下形式

$$\Pi_{mc} = - \sum_n \left(\frac{1}{2} q^T K q - Q^T q \right) \quad (6')$$

式中

$$K = G^T H^{-1} G \quad (12)$$

K 便是应力杂交元的单元刚度矩阵。

常规单元采用八节点退化等参厚壳元, 其刚度矩阵形成详见文献〔6〕。

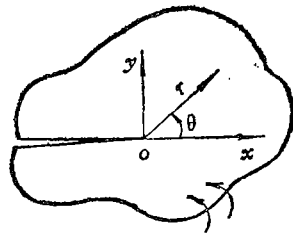


图1 含半无限裂纹的受弯平板

三、数值计算

为了验证计算模型的精确性和有限元程序的正确性, 首先将计算结果和已有结果作一比较。

1. 无裂纹板的弯曲

为了检验本文采用的八节点退化等参厚壳元的计算精度, 并确认其作为断裂分析中的常规单元的可靠性, 首先对无裂纹板弯曲进行计算校核。本文计算了四边简支板以及对边简支、对边固支板在均布荷载下的挠度和内力。在本文计算例子中, 挠度和内力与Reissner理论解^[7]相比, 相对误差均不超过 2%。

2. 含裂纹无限大板受均匀扭矩作用

Delale & Erdogan 用积分变换研究了这个问题^[4], 根据积分方程数值解给出了无量纲应力强度因子的数值。

$$k_2 = \frac{K_I(h/2)}{\frac{6M}{h^2} \sqrt{\pi a}} \quad (13)$$

$$k_3 = \frac{K_I(0)}{\frac{6M}{h^2} \sqrt{\pi a}} \quad (14)$$

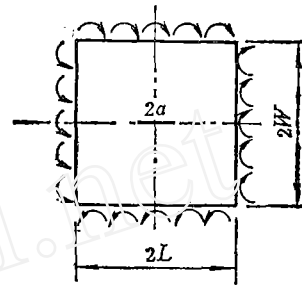


图 2 含裂纹板受均匀扭矩作用

式中 $K_I(h/2)$, $K_I(0)$ 分别为 II 型, III 型应力强度因子的最大值。其中, II 型应力强度因子最大值发生在板上下边缘, III 型应力强度因子最大值发生在截面中部。 k_2 、 k_3 分别为 II 型, III 型无量纲应力强度因子, 此时 M 为扭矩。

为了模拟无限大板的情况, 板的长度要取得足够大。本文取为 $L = 100a$ (L 为板的半长, a 为裂纹半长), 选择了 $a/h = 0.5$ 、 0.625 、 1 、 2 几种板进行数值计算, 并与无限大板的解答进行比较^[4], 计算简图如图 2 所示, 计算结果列于表 1。

表 1 不同 a/h 值时无量纲应力强度因子

a/h	0.5			0.625			1			2		
	本文	文献 [4]	相差	本文	文献 [4]	相差	本文	文献 [4]	相差	本文	文献 [4]	相差
k_2	0.727	0.705	3.0%	0.676	0.659	1.7%	0.547	0.521	4.9%	0.369	0.352	4.8%
k_3	-0.034	-0.036	4.9%	-0.044	-0.044	0.3%	-0.067	-0.070	3.9%	-0.087	-0.091	4.3%

3. 有限尺寸板的应力强度因子

为了探讨有限尺寸板在不同板厚、不同板宽时应力强度因子的变化, 本文计算了板宽比 $a/L = 0.01 \sim 0.8$ 范围内几种情况下应力强度因子的数值。计算结果见表 2、表 3 和图 3、图 4。

在图 3 和图 4 中, 纵坐标均取无量纲应力强度因子 $K/(6M\sqrt{\pi a}/h^2)$, 即 Reissner 型有限尺寸板应力强度因子与 Kirchhoff 板在尺寸无限大时应力强度因子的比值。图 3 和图 4 分别表示 II 型和 III 型无量纲应力强度因子随 a/L 和 a/h 的变化规律。

表2 II型应力强度因子有限尺寸效应

a/h	k ₂					k ₂ /k ₂ [∞]				
	0.5	0.625	1	2	3	0.5	0.625	1	2	3
a/L = 0.01	0.727	0.676	0.547	0.369	0.288	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.16	0.793	0.738	0.622	0.429	0.329	1.090	1.092	1.137	1.162	1.145
0.60	0.909	0.816	0.634	0.415	0.319	1.250	1.207	1.158	1.124	1.107
0.80	1.181	1.031	0.697	0.438	0.338	1.624	1.525	1.275	1.188	1.172

注: k₂[∞] 表示无限大板时k₂的值。

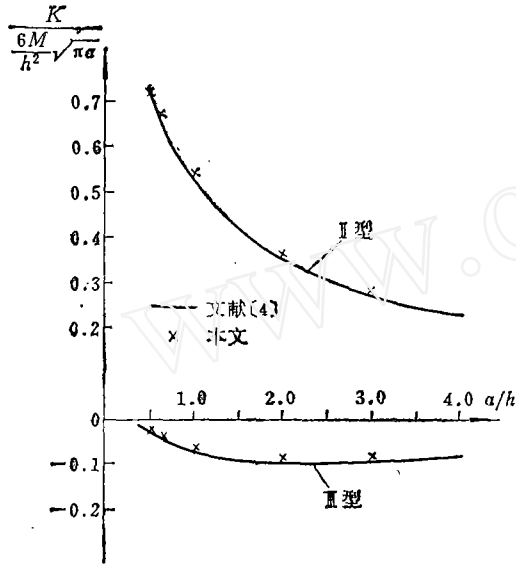


图3 本文计算结果与积分方程解的比较 (无限大板情况)

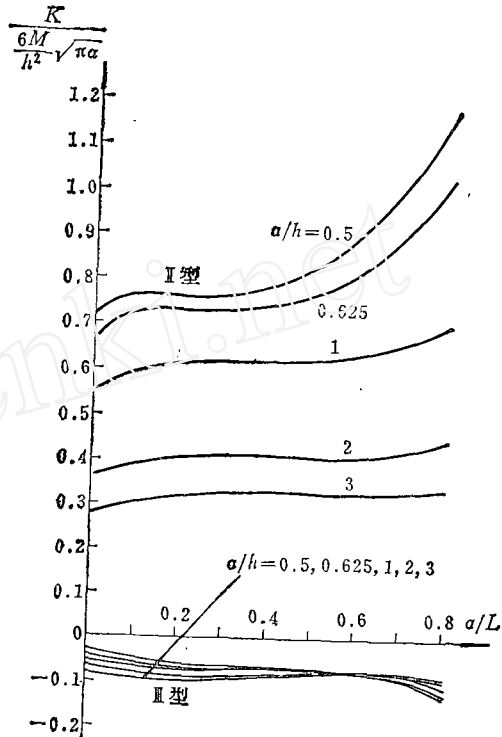


图4 应力强度因子随板厚、板宽的变化规律

表3 III型应力强度因子有限尺寸效应

a/h	k ₃					k ₃ /k ₃ [∞]				
	0.5	0.625	1	2	3	0.5	0.625	1	2	3
a/L = 0.01	-0.034	-0.045	-0.067	-0.087	-0.088	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.16	-0.039	-0.051	-0.079	-0.102	-0.099	1.126	1.135	1.168	1.175	1.137
0.60	-0.051	-0.061	-0.085	-0.103	-0.100	1.488	1.374	1.257	1.182	1.138
0.80	-0.128	-0.132	-0.131	-0.117	-0.105	3.740	2.964	1.948	1.341	1.204

注: k₃[∞] 表示无限大板时k₃的值。

如果将不同板宽时Reissner型板应力强度因子分别除以Reissner型板尺寸无限大时应力强度因子, 就得到Reissner型板的有限尺寸效应系数, 如图 5, 图 6 所示。可以看出, 对于各种 a/h 的板, 当 a/L 增大时, 对于 K_I 和 K_{II} 的有限尺寸效应系数均随之增大, 但在 $a/L=0.2\sim 0.6$ 之间有一个平缓的区段, 当 $a/L>0.6$ 之后, 有限尺寸效应系数才增大比较明显。这与对称 I 型情况下 K_I 的有限尺寸效应系数的性态是不同的⁽⁸⁾。

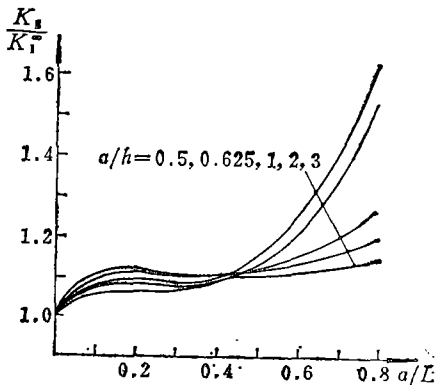


图 5 I 型应力强度因子的有限尺寸效应

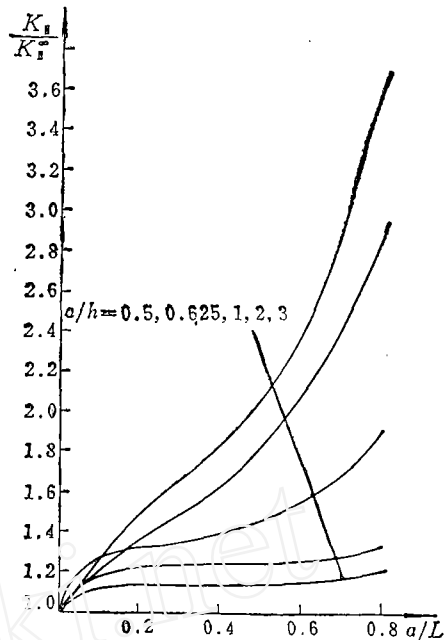


图 6 II 型应力强度因子的有效尺寸效应

四、结 论

1. 用杂交法构造奇异单元, 解决了奇异元和常规元之间协调问题, 因而是板壳弯曲断裂分析的有效途径。文献〔2、3〕提出的裂纹尖端应力应变场的一般解, 为构造应力杂交元的内部应力场提供较好的力学基础。

2. 本文用 $L=100a$ 的板模拟无限大板的情况, 计算了无量纲应力强度因子与 a/h 的关系曲线。计算结果表明, 本文的有限元解与文献〔4〕的积分方程数值解十分接近, 这说明本文的方法有较好的计算精度。

3. 为了提高复合型弯曲断裂参量的计算精度, 必须提高板壳有限元计算中剪力的计算精度, 以及采用更精确的位移模式(或应力模式)为裂纹尖端单元的模式并解决单元的协调问题。本文提出的方法被证明是进行复合型断裂问题分析的有效方法。

4. 本文探讨了有限尺寸板受均匀扭矩作用时应力强度因子 K_I , K_{II} 随 a/L 的变化。随着 a/L 增大, 对于 K_I 和 K_{II} , 均同时增大。当 $a/L<0.6$ 时, 增加比较平缓, K_I 和 K_{II} 分别比无限大板的相应值增加 15~20% 左右。仅当 $a/L>0.6$ 时, 应力强度因子才有较显著增加。对于 a/h 较小的情况, 即裂纹短而板较厚的情况, 随着 a/L 增大应力强度因子增加更多一些。

5. 对于均匀受扭情况, 奇异元最佳尺寸约在 $0.03\sim 0.06[a, h]_{\min}$, 其中 $[a, h]_{\min}$ 表示裂纹半长 a 与板厚 h 中最小者。

参 考 文 献

- [1] Pin Tong and Pian, H. H., A variation principle and the convergence of a finite element method based on assumed stress distribution, *Int. J. Solid Structure*, 5 (1969), p.463.
- [2] Liu Chuntu and Li Yingzhi, The stress strain fields at crack tip and stress intensity factors in Reissner's plate, proceedings of ICF International Symposium on Fracture Mechanics (1983), Beijing, pp. 95~103.
- [3] 柳春图, 李英治, Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算, *力学学报*, 16, 4 (1984).
- [4] Delale F. and Erdogan F., The effect of transverse shear in a cracked plate under Skew-symmetric loading, *J. Appl. Mech.*, 46, 3 (1979).
- [5] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社 (1981), 北京。
- [6] Zienkiewicz O. C., *The Finite Method in Engineering Science*, McGraw-Hill (1971), London.
- [7] 中国科学院力学研究所固体力学研究室, 夹层板的弯曲振动和稳定, 科学出版社 (1978), 北京。
- [8] 李英治、柳春图, Reissner 型板弯曲断裂问题分析, *力学学报*, 4, (1983), 366~375页。

THE CALCULATION OF MIXED STRESS INTENSITY FACTORS
FOR REISSNER'S PLATE USING HYBRID METHOD

Li Yingzhi and Liu Chuntu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

Based on general solution of stress strain fields at crack tip in Reissner's plate, a high order singular element is proposed by using hybrid stress method. In this paper the bending stress intensity factors for finite size Reissner's plate were calculated with good accuracy both for mode II and III. Some features for finite size Reissner's plate were discussed.