

# 理想塑性固体中逐步扩展裂纹 的弹塑性场\*

王 自 强

(中国科学院力学研究所, 1985年9月17日收到)

## 摘 要

本文从三维的塑性流动理论出发, 导出了关于理想塑性固体平面应变问题的基本方程. 利用这些方程, 分析了不可压缩理想塑性固体的逐步扩展裂纹顶端的弹塑性场, 得到了关于应力和速度的一阶渐近场. 分析了弹性卸载区的演变过程和中心扇形区的发展过程. 预示了出现二次塑性区的可能性. 最后给出了关于应力场二阶渐近分析.

## 一、引 言

裂纹顶端应力应变场的精确分析一直是断裂力学发展的前沿课题. 对于线弹性裂纹问题, Irwin<sup>[1]</sup>, William<sup>[2]</sup>的早期研究, 阐明了在裂纹尖端应力应变场具有  $r^{-1/2}$  的奇异性.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$$

$K$ 称为应力强度因子, 表征应力场奇性强度.

对于韧性断裂问题, 断裂过程区是由塑性区包围; 裂纹尖端的应力应变场是受塑性区的奇性场所控制. 因此, 塑性区奇性场的分析是韧性断裂的关键问题.

对于静止裂纹, HRR奇性场提供了一个清晰的描述. 而  $J$  积分则在一定条件下成为一个有效的控制参量.

对于扩展裂纹, 由于问题的高度复杂, 进展是曲折而缓慢的. 迄今为止, 虽然经过许多学者的努力, 只对有限几个问题得到了正确的结果. 问题的提炼通常是比较简单而明瞭, 而问题的求解却往往出人意外的困难.

对于不可压缩理想塑性平面应变 I 型定常扩展裂纹问题, Rice<sup>[3]</sup>首先讨论了裂纹顶端附近应力应变场的渐近性质, Cherepanov<sup>[4]</sup>又将它推广到非常扩展的情况. 但他们的分析均未考虑二次塑性区, 对这个问题的正确解答是由 Слепян<sup>[6]</sup>首先给出的. 他采用 Tresca 准则得到了渐近场的完整结果 (同一篇文章还得到 II 型问题的正确解答). 六年之后, Rice, Drugan 和 Sham<sup>[6]</sup>及高玉臣<sup>[7]</sup>重新研究了这个问题, 采用 Mises 准则得到了与 Слепян<sup>[6]</sup>相同

\* 郭仲衡推荐.

的结果.他们的结果与Слепян<sup>[6]</sup>一致是可以预料的.因为对不可压缩理想塑性介质的平面应变问题, Tresca准则与Mises准则实质上是一样的.

对于同一个问题,如果把可压缩性考虑进去就遇到了意外的困难, Drugan, Rice和Sham<sup>[8]</sup>及高玉臣<sup>[9]</sup>经过曲折,各自提出了解答.但这两个解答有原则差别,双方展开了激烈的争论. Drugan, Rice和Sham<sup>[8]</sup>认为高玉臣<sup>[9]</sup>的解答包含着若干错误.而高玉臣<sup>[11]</sup>认为Drugan等<sup>[8]</sup>对裂纹前方应变无奇性的证明是错误的.而作者的一项工作<sup>[10]</sup>表明Drugan等人的解<sup>[8]</sup>和高玉臣<sup>[9]</sup>的解在中心扇形区内均不满足高阶渐近方程,因此都不是合适的主渐近解.

对于平面应力的情况,理想塑性介质中I型定常扩展裂纹的尖端场,虽然有不少人作过尝试,但至今未获解答.

仅从上述例子不难看出扩展裂纹问题的进展是艰难而缓慢的.很多问题都有待于进一步工作.

另一方面韧性断裂通常与微观空洞的成核、扩展、合并相联系的.实验表明,宏观裂纹的扩展常常是一步一步地间断进行的.在裂纹扩展之前,裂纹前方有可能形成微观空洞.主裂纹与微观空洞的合并导致宏观裂纹的一步扩展.图1提供了一个铝合金薄板的宏观裂纹前方出现微观空洞的典型例子.

对于平面应变试样,裂纹前方的微观空洞一般说来不可能连接成贯穿厚度的柱形空洞.这无疑给实验观察带来了困难,但是裂纹扩展的Z字型路径也暗示着裂纹扩展是逐步进行的.因此,采用逐步扩展的模型来研究扩展裂纹的尖端场是值得的.

## 二、基本方程

以 $x, y, z$ 表示固定的直角坐标系.  $x_1, x_2, x_3$  乃是其张量写法.  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  分别为应力张量和应变张量, 相应的物理分量表示为  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  及  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ .

### 1. 屈服条件

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2/4 + \tau_{xy}^2 + 3S_z^2/4 = k^2 \quad (2.1)$$

### 2. 本构关系

三维的Prandtl-Reuss流动法则可表示为,

$$D_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \lambda S_{ij} \quad (2.2)$$

其中 $S_{ij}$ 是应力偏量张量. $D_{ij}$ 是应变率张量它们可用速度场表示:

$$D_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2 \quad (2.3)$$

### 3. 平面应变控制方程

对于平面应变问题,有关的物理量都只是 $x_1, x_2$ 的函数而与 $x_3$ 无关.又有

$$D_{33} = \frac{(1+\nu)}{E} \dot{\sigma}_{33} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} + \lambda S_{33} = 0$$

由上式推得,

$$\dot{S}_{33} + \frac{2}{3} E \lambda S_{33} = -\frac{2}{3} \varepsilon \dot{\sigma}_{\alpha\alpha} \quad (2.4)$$

这里  $\varepsilon = -\nu + 1/2$  而字母  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  只取值 1, 2. 重复下标是求和的缩写. 方程 (2.4) 是平面应变控制方程. 令

$$P_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} (\sigma_{\rho\rho}/2)$$

利用方程 (2.4), 本构关系 (2.2) 化为

$$D_{\alpha\beta} = \{\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \nu \delta_{\alpha\beta} \dot{\sigma}_{\rho\rho}\} / 2\mu + \lambda P_{\alpha\beta} - \varepsilon \lambda S_{33} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

#### 4. 应力函数及应力分量

应力平衡方程可以通过引入应力函数  $\phi$  自动满足.

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

方程 (2.1)(2.3)~(2.6) 即是理想塑性固体平面应变问题的基本方程. 方程 (2.5) 也可改写为

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \dot{P}_{\alpha\beta} + \lambda P_{\alpha\beta} + \frac{3\varepsilon}{2E} [\dot{\sigma}_{\rho\rho} + \dot{S}_{33}] \delta_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

对于弹性不可压缩的理想塑性固体,  $\nu = 1/2, \varepsilon = 0$ . 由 (2.4) 得,  $S_{33} = 0$ ; 基本方程为

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 / 4 + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (2.8)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \dot{P}_{\alpha\beta} + \lambda P_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

$$D_{\alpha\beta} = (\partial v_\alpha / \partial x_\beta + \partial v_\beta / \partial x_\alpha) / 2 \quad (2.10)$$

$$\sigma_x = \phi,_{yy} \quad \sigma_y = \phi,_{xx} \quad \tau_{xy} = -\phi,_{xy} \quad (2.11)$$

### 三、裂纹起步扩展的渐近场

讨论平面应变问题. 考虑不可压缩的理想塑性固体. 静止裂纹顶端的弹塑性应力场为

$$\sigma_x = \pi k, \quad \sigma_y = (\pi + 2)k, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{在} A \text{区})$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(1 + \frac{3}{2} \pi - 2\theta\right)k, \quad \tau_{r\theta} = k \quad (\text{在} B \text{区})$$

$$\sigma_x = 2k, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (\text{在} C \text{区})$$

设想裂纹起始扩展后, 裂纹顶端将移至  $O$  点, 以  $O$  为极点建立起极坐标  $(r, \theta)$ . 由于裂纹扩展步子很小, 在线段  $O^*O$  上可以认为周向正应力  $\sigma_\theta$  是均匀分布的 (严格地说,  $O$  点附近的应力场与  $A$  区渐近应力场略有差别. 但是, 从渐近意义上来分析,  $O$  点附近的应力场总可以认为是均匀应力场.) 将线段  $O^*O$  割开形成新的裂纹面. 在新裂纹面上作用着正应力  $\sigma_\theta$ . 将该作用力释放至零即可模拟裂纹扩展过程. 此时有下述边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta(r, \pi, t) &= (1-t)\sigma_\theta(r, \pi, 0) \\ \tau_{r\theta}(r, \pi, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

广义时间  $t=0$  对应着释放起始时刻. 而  $t=1$  对应着释放终了.

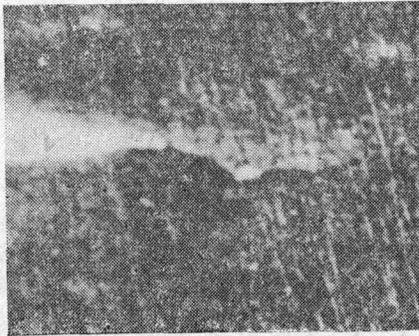


图 1

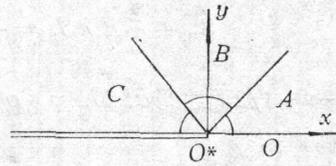


图 2

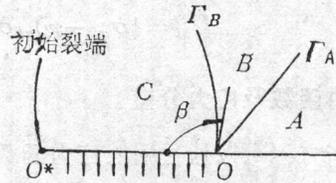


图 3

现在来分析释放过程中，新裂纹顶端O附近的应力应变场。鉴于对称性，只需讨论上半平面的情况。

设想裂纹顶端场由三个区或拼集而成(图3)。其中A区为均匀应力区，B区为中心扇形区，C区为弹性卸载区。释放前O点附近渐近场是均匀应力场，中心扇形区并不存在。相应的应力函数 $\phi_0^*$ 为，

$$\phi_0^* = \frac{k}{2} r^2 [A_1(0) + \cos 2\theta] + O(r^3)$$

其中  $A_1(0) = 1 + \pi$

随着释放过程的进行，中心扇形区B逐步扩大。时刻t，应力函数 $\phi$ 可表示为

$$\phi = \begin{cases} kr^2 [A_1(t) + \cos 2\theta] / 2 & (0 \leq \theta \leq \pi/4) \\ \frac{kr^2}{2} [A_1(t) - 2(\theta - \frac{\pi}{4})] & (\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi - \beta) \\ kr^2 [C_1(t) + C_2(t)\theta + C_3(t)\cos 2\theta + C_4(t)\sin 2\theta] / 2 + \phi_0^*(r, \theta) & (\pi - \beta \leq \theta \leq \pi) \end{cases} \quad (3.2)$$

虽然 $\Gamma_A$ 处的应力全连续条件已经满足。 $\Gamma_B$ 处的应力分量全连续条件导致

$$[\phi]_{\Gamma_B} = [\phi']_{\Gamma_B} = [\phi'']_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.3)$$

将(3.2)代入到(3.1)和(3.3)，得

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2(\pi - \beta) &= A_1^* - 2\left(\frac{3}{4}\pi - \beta\right) \\ C_2 + 2C_3\sin 2\beta + 2C_4\cos 2\beta &= -2[1 + \sin 2\beta] \\ C_3\cos 2\beta - C_4\sin 2\beta &= -\cos 2\beta \\ C_1 + C_2\pi + C_3 &= -(1 + A_1(0))t \\ C_2 + 2C_4 &= 0, \quad A_1^* = A_1(t) - A_1(0) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由上述方程解得，

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\{(1 + A_1(0))t + C_2\pi + C_3\} \\ C_2 &= \frac{2\cos 2\beta}{(1 - \cos 2\beta)}, \quad C_3 = \frac{\cos 2\beta - 1 - \sin 2\beta}{(1 - \cos 2\beta)} \\ C_4 &= \frac{-\cos 2\beta}{(1 - \cos 2\beta)}, \quad A_1^* = C_1 + C_2(\pi - \beta) + 2\left(\frac{3}{4}\pi - \beta\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

现在考察C区的等效应力 $\tau_e$ ; C区的应力函数 $\phi$ 及应力值分别为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{k}{2} r^2 \left\{ A_1(0) + C_1 + \frac{2\cos 2\beta}{(1-\cos 2\beta)} \theta - \frac{\sin 2(\theta+\beta)}{(1-\cos 2\beta)} \right\} + O(r^3) \\ S_r &= \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{k \sin 2(\theta+\beta)}{(1-\cos 2\beta)} + O(r) \\ \tau_{r\theta} &= -k [\cos 2\beta - \cos 2(\theta+\beta)] / (1-\cos 2\beta) + O(r) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

由此

$$\tau_e^2 = \frac{k^2}{(1-\cos 2\beta)^2} [1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta \cos 2(\theta+\beta)] + O(r) \quad (3.7)$$

若  $\cos 2\beta \leq 0$  则有,

$$1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta \cos 2(\theta+\beta) = (1 + \cos 2\beta)^2 - 2\cos 2\beta (1 + \cos 2(\theta+\beta)) \geq 0 \quad (3.8)$$

又有

$$\begin{aligned} (1 - \cos 2\beta)^2 - \{1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta \cos 2(\theta+\beta)\} \\ = -2\cos 2\beta \{1 - \cos 2(\theta+\beta)\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

从(3.8), (3.9)推得

$$0 \leq \frac{1 + \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta \cos 2(\theta+\beta)}{(1 - \cos 2\beta)^2} \leq 1 \quad (3.10)$$

这就表明, 只要  $\pi/4 \leq \beta \leq 3\pi/4$ , 必有:

$$\tau_e^2 \leq k^2 \quad (3.11)$$

也就是说弹性卸载区C, 满足屈服约束. 另一方面, 由(3.7)得,

$$(\tau_e^2)' = 2\tau_e \dot{\tau}_e = \frac{4k^2 \cos 2\beta}{(1 - \cos 2\beta)^2} \sin 2(\theta+\beta) \frac{d\beta}{dt}$$

在卸载边界显然满足卸载条件:

$$[\dot{\tau}_e]_{\Gamma_B} = 0 \quad (\text{在 } \theta = \pi - \beta \text{ 处})$$

综合上述论证, 不难看出(3.2)·(3.5)所提供渐近场, 满足了基本方程, 区域之间的应力连接条件、边界条件及卸载条件. 关于速度场的连续条件将在下一节论述. 总之(3.2)、(3.5)所提供的渐近场确实是本问题的解答. 这个解答包含着一个待定参数 $\beta$ .  $\beta$ 需要通过全场求解得到.

从(3.7)式不难看出, 当 $\beta = \pi/4$ 或 $3\pi/4$ 时, 区域C处处满足屈服条件.

$\beta = 3\pi/4$ , 对应着释放初始时刻 $t=0$ . 此时中心扇形区并不存在. C区与A区一样是均匀应力状态.

$\beta = \pi/4$ , 可能对应着释放过程的中间时刻 $t_e$ . 此时, 中心扇形区B发展到最大范围. 也就是 $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ , 而整个C区再次进入塑性状态, 成为二次塑性区. 对C区有:

$$\left. \begin{aligned} C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = -2 \\ C_1 = 2 - (1 + A_1(0))t_e \\ A_1^* = (1 + A_1(0))(1 - t_e) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\phi = kr^2 \{A_1^*(t) + 1 - \cos 2\theta\} / 2 \quad (3.13)$$

进一步释放作用在新裂纹面上的作用力, 可以不改变三个区域的应力偏量而只改变三个区域的平均应力. 此时, 塑性应变将会继续增加. 直至终了时刻 $t=1$ ,  $A_1^* = 0$ . 整个渐近应

力场将与静止裂纹顶端的应力场相同。但是裂纹顶端将移至  $O$  点。中心扇形区  $B$  能否由  $\theta=\pi/4$  扩展至  $\theta=3\pi/4$ 。这有待于进一步作全场分析。

#### 四、速度场与应变率场的渐近分析

先考察弹性卸载区的速度场。应力率函数  $\dot{\phi}$  为,

$$\dot{\phi} = kr^2[\dot{C}_1(t) + \dot{C}(t)\theta + \dot{C}_3(t)\cos 2\theta + \dot{C}_4(t)\sin 2\theta]/2 + O(r^3) \quad (4.1)$$

由方程(2.11), (2.12)得,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{1}{2\mu} \dot{P}_r = -\frac{k}{2\mu} [\dot{C}_3 \cos 2\theta + \dot{C}_4 \sin 2\theta] + O(r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} &= \frac{k}{2\mu} [\dot{C}_3 \cos 2\theta + \dot{C}_4 \sin 2\theta] + O(r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} &= -\frac{k}{2\mu} \dot{C}_2 + O(r) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

由(4.2)的前两个式子得,

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{k}{2\mu} r [\dot{C}_3 \cos 2\theta + \dot{C}_4 \sin 2\theta] - f'(\theta, t) + O(r^2) \\ v_\theta &= \frac{k}{2\mu} r [\dot{C}_3 \sin 2\theta - \dot{C}_4 \cos 2\theta] + f(\theta, t) + g(r, t) + O(r^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

将公式(4.3)代入(4.2)的第三式, 得,

$$f''(\theta, t) + f(\theta, t) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, t) - \frac{1}{r} g(r, t) = -\frac{k}{2\mu} \dot{C}_2(t) \quad (4.5)$$

由此,

$$g(r, t) = -\frac{k}{2\mu} \dot{C}_2(t) r \ln r + \dot{C}_7(t) r \quad (4.6)$$

$$f(\theta, t) = \dot{C}_6(t) \cos \theta + \dot{C}_8(t) \sin \theta \quad (4.7)$$

裂纹面附近的张开位移变化率  $\dot{\delta}$  将是:

$$\dot{\delta} = 2v_\theta(r, \pi, t) = -\frac{k}{\mu} r [\dot{C}_4 + \dot{C}_2(t) \ln r] + 2\dot{C}_7(t) r - 2\dot{C}_6(t) + O(r^2)$$

注意到释放初始时刻,  $\delta=0$ , 因此, 有,

$$\delta = -\frac{k}{\mu} r [C_4 + C_2 \ln r] + 2C_7(t) r - 2C_6(t) + O(r^2) \quad (4.8)$$

这里约定  $C_6(0) = C_7(0) = 0$ ; 由于在裂纹顶端张开位移为零, 因此,  $C_6(t) = 0$ 。

在中心扇形区  $B$  内,

$$\dot{\phi} = \frac{k}{2} \dot{A}_1(t) r^2 + O(r^3) \quad (4.9)$$

由方程(2.11)。(2.12)得,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{1}{2\mu} \dot{P}_r + \lambda P_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} &= \frac{1}{2\mu} \dot{P}_\theta + \lambda P_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} &= \frac{1}{\mu} \dot{P}_{r\theta} + \lambda P_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

考虑到 $\Gamma_B$ 上的速度分量的连续条件, 可以令

$$\lambda = \frac{\lambda_{-1}(\theta, t)}{r} + \lambda_0(\theta, t) + r\lambda_1(\theta, t) + \dots \quad (4.11)$$

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} F_n(\theta, t) \quad (4.12)$$

不难证实 (参照下一节公式(5.22))

$$P_r = S_r = (\sigma_r - \sigma_\theta)/2 = r\tilde{S}_{r1}(\theta, t) + O(r^3) \quad (4.13)$$

将(4.11)、(4.13)代入(4.10), 从(4.10)的前二式得,

$$\left. \begin{aligned} v_r &= f'(\theta, t) + O(r) \\ v_\theta &= f(\theta, t) + g(r, t) + O(r) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

代入(4.10)的第三式得,

$$f'' + f = -k\lambda_{-1}(\theta, t) \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} g(r, t) = k\lambda_0(\theta, t) \quad (4.16)$$

由方程(4.16)

$$\left. \begin{aligned} g(r, t) &= k\dot{B}_2(t)r \ln r + \dot{B}_6(t)r \\ \lambda_0(\theta, t) &= \dot{B}_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

速度场 $v_r$ ,  $v_\theta$ , 在 $\Gamma_B$ 处的连续性条件化为,

$$[f]_{\Gamma_B} = [f'(\theta, t)]_{\Gamma_B} = 0 \quad (4.18)$$

## 五、二级渐近场分析

令裂纹顶端 $O$ 附近, 应力函数 $\phi$ 可展成下列级数

$$\phi = \sum_{n=0,1}^{\infty} r^{2+n} F_n(\theta, t) = \sum_{n=0,1}^{\infty} \phi_n(r, \theta, t) \quad (5.1)$$

屈服条件可表示为

$$S_r^2 + \tau_{r\theta}^2 = k^2 \quad (5.2)$$

将公式(5.1)代入(5.2)并比较不同的 $r$ 幂次, 便得,

$$S_{r_0}^2 + \tau_{r_0\theta}^2 = k^2 \quad (m=0) \quad (5.3a)$$

$$\sum_{\substack{j=0,1 \\ j=m-i}}^m \{S_{r_i} S_{r_j} + \tau_{r_i\theta} \tau_{r_j\theta}\} = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \quad (5.3b)$$

其中

$$S_{r_m} = (\sigma_{r_m} - \sigma_{\theta_m})/2$$

$\sigma_{rm}$ ,  $\sigma_{\theta m}$ ,  $\tau_{r\theta m}$  分别是应力函数  $\phi_m(r, \theta, t)$  所产生的应力分量. 对  $m=0$  有

$$S_{r_0}^2 + \tau_{r\theta_0}^2 = k^2 \quad (5.4)$$

一级渐近场就是利用屈服条件(5.4)得到的. 当  $m=1$  有,

$$S_{r_0} S_{r_1} + \tau_{r\theta_0} \tau_{r\theta_1} = 0 \quad (5.5)$$

或改为直角坐标形式

$$S_{x_0} S_{x_1} + \tau_{xy_0} \tau_{xy_1} = 0 \quad (5.6)$$

注意到各区的渐近应力场及裂纹面上的应力边界条件. 由(5.5)、(5.6)得

$$\phi_1 = \begin{cases} A_{11} r^3 [(\cos\theta + \sin\theta)^3 + (\cos\theta - \sin\theta)^3] & (\text{在} A \text{区}) \\ B_{11} r^3 & (\text{在} B \text{区}) \\ r^3 \{C_{11} \cos 3\theta + C_{12} \sin 3\theta + C_{13} \cos\theta + C_{14} \sin\theta\} + \phi_1^*(r, \theta) & (\text{在} C \text{区}) \end{cases} \quad (5.7)$$

系数  $C_{1i}$ , 满足初始条件:

$$C_{1i}(0) = 0 \quad (i=1, \dots, 4) \quad (5.8)$$

在边界  $\Gamma_A$  上应力分量  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  必须连续, 由此推得

$$B_{11} = 8A_{11}$$

对于释放前  $O$  点附近应力场的分析, 推得,

$$\begin{aligned} \phi_1^*(r, \theta) &= A_{11}(0) r^3 [(\cos\theta + \sin\theta)^3 + (\cos\theta - \sin\theta)^3] \\ &= A_{11}(0) r^3 [2 - \cos 2\theta] 2\cos\theta \end{aligned} \quad (5.9)$$

在边界  $\Gamma_B$  上, 应力分量的全连续条件导致,

$$[\phi]_{\Gamma_B} = [\phi']_{\Gamma_B} = [\phi'']_{\Gamma_B} = 0$$

将(5.1)代入上式得,

$$\left. \begin{aligned} r^2 \{[F_0(\theta, t)] + r[F_1(\theta, t)] + r^2[F_2(\theta, t)] + \dots\} &= 0 \\ r^2 \{[F_0'(\theta, t)] + r[F_1'(\theta, t)] + r^2[F_2'(\theta, t)] + \dots\} &= 0 \\ r^2 \{[F_0''(\theta, t)] + r[F_1''(\theta, t)] + r^2[F_2''(\theta, t)] + \dots\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

将方程组(5.10)各式除以  $r^2$ , 令  $r$  趋于零, 得,

$$[F_0(\pi - \beta, t)] = [F_0'(\pi - \beta, t)] = [F_0''(\pi - \beta, t)] = 0 \quad (5.11)$$

条件(5.11)即是第三节公式(3.3)利用过的条件. 如图3所示,  $\Gamma_B$  的曲线方程是

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (\theta - \theta_2)^n \quad (\theta_2 = \pi - \beta) \quad (5.12)$$

将(5.10)的各式除以  $r^2$ , 并对  $\theta$  求一次导数. 再利用(5.10)方程组, 得,

$$\frac{dr}{d\theta} \{[F_1(\theta, t)] + 2r[F_2(\theta, t)] + \dots\} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{dr}{d\theta} \{[F_1'(\theta, t)] + 2r[F_2'(\theta, t)] + \dots\} = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{dr}{d\theta} \{[F_1''(\theta, t)] + 2r[F_2''(\theta, t)] + \dots\} + \{F_0'''(\theta, t)] + r[F_1'''(\theta, t)] + \dots\} = 0 \quad (5.15)$$

令  $r$  趋于零, 得,

$$\left. \begin{aligned} [F_1(\pi - \beta, t)] &= 0, & [F_1'(\pi - \beta, t)] &= 0 \\ [F_1''(\pi - \beta, t)] + \rho_1 [F_0'''(\pi - \beta, t)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

将(5.7)代入(5.16)得,

$$-C_{11}\cos 3\beta + C_{12}\sin 3\beta - C_{13}\cos \beta + C_{14}\sin \beta + A_{11}(0)[(\sin \beta - \cos \beta)^3 - (\sin \beta + \cos \beta)^3] = B_{11} \quad (5.17)$$

$$3(C_{11}\sin 3\beta + C_{12}\cos 3\beta) + C_{13}\sin \beta + C_{14}\cos \beta = 6A_{11}(0)\cos 2\beta \sin \beta \quad (5.18)$$

$$9(-C_{11}\cos 3\beta + C_{12}\sin 3\beta) - C_{13}\cos \beta + C_{14}\sin \beta + 6A_{11}(0)(\cos \beta \cos 2\beta + \cos 3\beta - \cos \beta) \\ = \rho_1[F_0'''(\pi - \beta, t)] \quad (5.19)$$

此外由裂纹面上的边界条件导得,

$$3C_{12} + C_{14} = 0 \quad (5.20)$$

$$C_{11} + C_{13} = -2A_{11}(0)t \quad (5.21)$$

方程组(5.17)~(5.21)一共包括 5 个方程。但是总共包含了 6 个待定系数 (除了待定系数  $\beta$  之外) 选择  $\rho_1$  作为待定的自由参数, 则其余的系数均可由上述方程确定。限于篇幅, 这里不列出关于系数  $C_{1i}$  的公式。

从公式(5.7), 不难看出,

$$S_{r1} = (\sigma_{r1} - \sigma_{\theta 1})/2 = B_{11}(t)3r/2 \quad (5.22)$$

## 六、裂纹继续逐步扩展的渐近场分析

以上讨论了裂纹起步扩展的渐近场。现在进一步讨论裂纹继续逐步扩展的情况。值得注意的是裂纹起步扩展后, 裂纹前方区域  $A$  与静止裂纹的情况相同是个均匀应力场。如果中心扇形区  $B$  能扩展至  $\theta = 3\pi/4$ 。那么系数  $A_1(0)$  也与静止裂纹相同。因此, 裂纹进一步扩展的渐近场分析可以重复以上各节方法。如果中心扇形区  $B$  未能扩展至  $\theta = 3\pi/4$ , 那么系数  $A_1(0)$  可能不等于  $(1+\pi)$ , 这并不影响我们的分析。

总之裂纹继续逐步扩展的渐近场分析实质上与裂纹起步扩展的渐近场分析是一样的。

### 参 考 文 献

- [1] Irwin, G. R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 361—364.
- [2] William, M. L., On the stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 109—114.
- [3] Rice, J. R., Mathematical analysis in mechanics of fracture, *Fracture*, Vol. II, Chapter 3, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, N. Y. (1968).
- [4] Cherepanov, G. P., *Mechanics of Brittle Fracture*, Nauka, Moscow (1974).
- [5] Слепя Л. И., *Механика Твер. Тела*, 9 (1974), 57—67.
- [6] Rice, J. R., W. J. Drugan and T. L. Sham, Elastic-plastic analysis of growing cracks, *Fracture Mechanics*, ASTM STP, 700 (1980), 189—219.
- [7] 高玉臣, 理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性场, *力学学报*, 1 (1980), 48—56.
- [8] Drugan, W. J., J. R. Rice and T. L. Sham, Asymptotic analysis of growing Plane strain tensile cracks in elastic-ideally plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 30, 6 (1982).
- [9] 高玉臣 (Gao, Y. C.), The influence of compressibility on elastic plastic field of a growing crack, *Elastic-Plastic Fracture*, ASTM-STP, 803 (1984), 176—190.

- [10] 王自强, 理想塑性体扩展裂纹的平面应变问题, 中国科学 (待发表).  
[11] 黄克智, 高玉臣, 断裂力学中裂纹尖端奇异场, 力学进展, 14, 4 (1984), 405—414.

## Elastic-Plastic Fields near Crack Tip Growing Step-by-Step in a Perfectly Plastic Solid

Wang Tzu-chiang

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

In this paper, based on the three-dimensional flow theory of plasticity, the fundamental equations for plane strain problem of elastic-perfectly plastic solids are presented. By using these equations the elastic-plastic fields near the crack tip growing step-by-step in an elastic incompressible-perfectly plastic solid are analysed.

The first order asymptotic solutions for the stress field and velocity field near the crack tip are obtained. The solutions show the evolution process of elastic unloading domain and the development process of central fan domain and reveal the possibility of the presence of the secondary plastic domain. The second order asymptotic solution for stress field is also presented.