

近圆弧位形的约束无力场

李建国 胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 北京)

太阳磁场在大气中常常被描述为无力场, 无力场的理论模型常常考虑成延伸至无穷远, 或者人为地截止至有限的区域^[1]. 事实上, 太阳大气中的磁场往往被约束在有限的空间, 通过一间断面与大气交接.

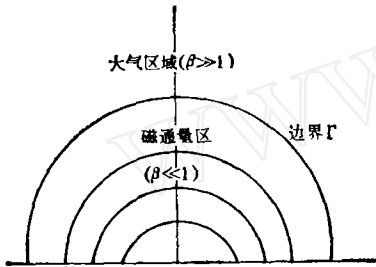


图1 约束无力场模型的示意图

我们讨论如图1的约束无力场模型, 其中磁通量区域中的磁场较强, 用无力场模型描述. 大气区域中压力梯度与重力平衡, 磁压远小于热力学压力. 边界面上满足总压守恒的间断条件.

在柱坐标系 (r, θ, z) 中, 考虑二维问题 $(\partial/\partial z = 0)$ 并将 z 轴取在 θ 面水平方向, 则磁场可以表述为

$$\mathbf{B}_* = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \alpha_* \psi \right), \quad (1)$$

其中 α_* 为常数. 引进无量纲量

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad H = \frac{h}{r_0}, \quad P = \frac{p_c}{p_0}, \quad \alpha = \alpha_* r_0, \quad R_\Gamma = \frac{r_\Gamma}{r_0},$$

$$\Psi = \frac{\psi}{r_0 \sqrt{8\pi p_0}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_*}{\sqrt{8\pi p_0}}, \quad (2)$$

其中标高 $h = \mathcal{R}T_c/g$, 大气压力 $p_c = p_0 \exp(-r \sin \theta/h)$, 而 r_0 , p_0 和 \mathcal{R} 分别为典型长度, 底部压力和气体常数. 问题的方程和边条件表为^[2]

$$\mathcal{L}(\Psi) \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Psi = 0, \quad (3)$$

$$\Psi(R, 0) = \Psi_0(R), \quad 0 \leq R \leq R_\Gamma, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Psi(R, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)^2 + \alpha^2 \Psi^2 = \exp(-R \sin \theta/H), \quad r \in \Gamma. \quad (6)$$

本文讨论等压大气模型, (6) 式右端简化为 1, 它是大标高 ($R \ll H$) 的近似情况. 此外, 约束无力场的边界 Γ 为一磁面, 它要求

$$\Psi(R, \theta)|_\Gamma = \Psi_\Gamma \text{ (常数)}. \quad (7)$$

本文 1986 年 1 月 13 日收到.
中国科学院科学基金资助的课题.

条件(6)是非线性的,而且边界 Γ 是待定的,这种非线性待定边值与水波问题类似^[3].

借鉴弱非线性水波的处理方法,本文讨论近圆弧位形的约束无力场. 在圆弧形一维问题中,已求得问题的解为^[2]

$$\varphi_0(R) = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}}. \quad (8)$$

一维问题的边界 $r = r_r$ 是圆弧,而一般问题的边界 $R = R_r^*(\theta)$ 是变化的. 近圆弧形近似分析对一维模型的小偏差,使问题可线性化. 这种二维问题就是弱非线性问题.

我们将磁通量区域的边界 Γ 表示为

$$R = R_r + \varepsilon S(\theta), \quad (9)$$

其中 R_r 为常数, ε 为小参数, $S(\theta)$ 为待定函数. 相应地,磁势 $\psi(R, \theta)$ 可以表示为

$$\psi(R, \theta) = \varphi_0(R) + \varepsilon \psi_1(R, \theta), \quad (10)$$

其中 $\varphi_0(R)$ 由(8)式给出. 将关系式(9)和(10)代入方程(3)和边界条件(4)–(6),利用一维解式,则二维问题扰动项的方程和边界条件为

$$\mathcal{L}[\psi_1(R, \theta)] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi_1(R, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad (12)$$

$$\psi_1(R, 0) = 0, \quad (13)$$

$$\psi_1(R_r, \theta) = - \frac{d\varphi_0(R_r)}{dR} S(\theta), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi_1(R_r, \theta)}{\partial R} = - \frac{d^2 \varphi_0(R_r)}{dR^2} S(\theta). \quad (15)$$

这些关系精确到 $O(\varepsilon^2)$. 推导边界条件(14)时要利用一维边条件 $\varphi_0(R_r) = \varphi_r$,再将(10)式代入边值(7),并将 $\varphi_0[R_r + \varepsilon S(\theta)]$ 对小参数展开. 类似地,将关系式(9)和(10)代入非线性边值(6),再利用一维解的边界条件 $\left[\frac{d\varphi_0(R_r)}{dR} \right]^2 + \alpha^2 \varphi_0^2(R_r) = 1$ 和关系(14)式,就导出边界条件(15). 这样,待定边值问题就化成固定边值的问题. 要指出的是,一维解 $\varphi_0(R)$ 是定义在 $R \leq R_r$ 内,在讨论二维解时,要将 $\varphi_0(R)$ 解析地延拓到区域 $R \leq R_r + \varepsilon S(\theta)$ 之中.

二维问题是线性的. 考虑到零边值(12)和(13),我们可以将解表示为

$$\psi_1(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R) \sin [(2n+1)\theta]. \quad (16)$$

由方程(13),不难导出问题的通解为

$$\psi_1(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{2n+1}(\alpha R) \sin [(2n+1)\theta], \quad (17)$$

其中考虑到解在原点的正则性,略去了 $Y_{2n+1}(\alpha R)$ 诸项. 解(17)式中的系数 C_n 及函数 $S(\theta)$ 将由边界条件(14)和(15)确定.

将待定边值函数 $S(\theta)$ 写成

$$S(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \sin [(2n+1)\theta], \quad (18)$$

其中的系数 s_n 待定。将解 (17) 式和展开 (18) 式代入边条件 (14) 和 (15), 它们要求

$$C_n J_{2n+1}(\alpha R_r) = - \frac{d\Psi_0(R_r)}{dR} s_n, \quad (19)$$

$$C_n \frac{dJ_{2n+1}(\alpha R_r)}{dR} = - \frac{d^2\Psi_0(R_r)}{dR^2} s_n. \quad (20)$$

齐次代数方程 (19) 和 (20) 有解的条件是

$$J_{2n+1}(\alpha R_r) \frac{d^2\Psi_0(R_r)}{dR^2} = \frac{dJ_{2n+1}(\alpha R_r)}{dR} \frac{d\Psi_0(R_r)}{dR}. \quad (21)$$

考虑到一维解 (8), 不难导出

$$C_n = \begin{cases} a s_n, & n = 0 \text{ 时,} \\ 0, & n \geq 1 \text{ 时,} \end{cases} \quad (22)$$

其中 $a = 1/\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}$. 代回 (17) 式, 我们有

$$\Psi_1(R, \theta) = s_0 a J_1(\alpha R) \sin \theta. \quad (23)$$

相应的边界条件 (9) 就成为

$$R = R_r + (\varepsilon s_0) \sin \theta. \quad (24)$$

根据关系 (10), 解 (18) 式和 (24) 式给出磁场分布为

$$B_r = (\varepsilon s_0) a \frac{J_1(\alpha R)}{R} \cos \theta, \quad (25)$$

$$B_\theta = \pm a J_1(\alpha R) - (\varepsilon s_0) \frac{a\alpha}{2} [J_0(\alpha R) - J_2(\alpha R)] \sin \theta, \quad (26)$$

$$B_z = \pm a J_0(\alpha R) + (\varepsilon s_0) a \alpha J_1(\alpha R) \sin \theta. \quad (27)$$

问题 (11)–(15) 式是线性的, 二维扰动解可相差一任意倍数, 不妨取 $s_0 = 1$.

若记 $Z = z/r_0$, 磁力线方程可写为

$$\frac{dR}{B_r} = \frac{R d\theta}{B_\theta} = \frac{dZ}{B_z}, \quad (28)$$

利用 (25)–(27) 式, 不难导出 (R, θ) 平面的磁力线

$$\frac{dR}{d\theta} = (\varepsilon s_0) \cos \theta + O(\varepsilon^2 s_0^2), \quad (29)$$

由此求出

$$R = C + (\varepsilon s_0) \sin \theta, \quad (30)$$

其中 C 为常数。当 $\theta = 0$ 时, $C = R_r$, 与边界方程 (24) 一致。图 2 给出了 $\varepsilon s_0 = \pm 0.2$ 时的磁力线分布。类似地, 对于固定的 R , (θ, Z) 平面上的磁力线关系为

$$Z = C_1 + \frac{J_0(\alpha R)}{J_1(\alpha R)} R \theta - (\varepsilon s_0) \alpha R \left\{ 1 + \frac{J_0(\alpha R) [J_0(\alpha R) - J_2(\alpha R)]}{2J_1^2(\alpha R)} \right\} \cos \theta, \quad (31)$$

其中 C_1 为常数。不难看出, 这里讨论的二维模型都有相同的磁通量, 而且与一维模型的值相同。

在求解 (31) 式时, 利用了小参数展开的关系, 它要求满足条件

$$\frac{J_1(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}} \gg (\varepsilon s_0) \frac{a\alpha^2}{2} [J_0(\alpha R) - J_2(\alpha R)] \sin \theta. \quad (32)$$

条件 (32) 在 $\alpha R \rightarrow 0$ 时显然不成立。因此, (31) 式不能用到 $\alpha R \simeq 0$ 的区域。这时, (28)

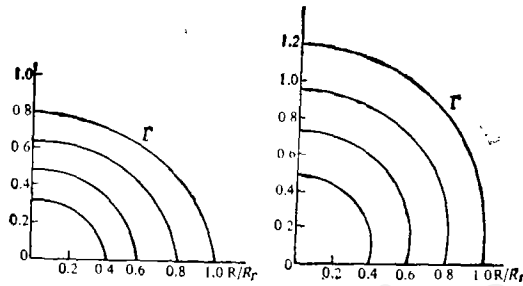


图2 二维模型中磁力线在 (R, θ) 平面的分布
左 $s_0 s = -0.2$; 右 $s_0 s = 0.2$

式可以导出

$$z = C_1 - \frac{4}{\alpha \sqrt{b^2 - 1}} \tanh^{-1} \left[\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right], \quad (33)$$

其中 C_1 为常数, 常数 b 为

$$b = \frac{\varepsilon s_0}{R} \alpha. \quad (34)$$

当 $R \rightarrow 0$ 时, (33) 式给出 $Z = C_1$.

在过去的二维无力场理论中, 注意力主要集中在求解无力场方程. 所有讨论的边界都是给定的, 边界条件是线性的. 对于约束无力场的位形, 其边界是待定的, 边界条件是非线性的. 对于这类待定的非线性边值问题, 即使方程是线性的, 也还没有很好的数学解法. 本文在近圆孤位形近似下, 用类似于弱非线性水波的方法求出了问题的解. 对于更一般的问题, 需要用数值的方法来求解.

非线性边值问题的解常常是不唯一的. Backus 曾证明地磁势场固定边界问题解的不唯一性^[4]. 本文的待定边值问题的解也是不唯一的. 事实上, 一维问题与二维问题满足同样的基本方程和自由边界条件, 并具有相同的磁通量. 不同的解对应于不同的能量状态, 当不同能量状态之间发生跃变时, 就可以释放出能量, 产生太阳大气中的活动过程.

约束磁通量概念广泛地应用于太阳物理中. 本文的处理方法还可以推广到分析孤立的磁拱或等离子体拱,^[5]以及孤立的磁力线管. 原则上, 也可以用到给定压力分布以及磁流体静力学约束区域的模型中. 这些问题的研究还有待于今后的进一步工作. 本文尝试地进行初步的探索.

参 考 文 献

- [1] 胡文瑞, 无作用力磁场, 太阳耀斑(胡文瑞等编著), 科学出版社, 1983.
- [2] 李建国, 胡文瑞, 天文学报, 待发表.
- [3] 梅强中, 水波动力学, 科学出版社, 1984.
- [4] Backus, G. E., *J. Geophys. Res.*, **75** (1970), 6339.
- [5] 李建国, 胡文瑞, 天体物理学报, 待发表.