低速运动二维物体产生的水波的解

陈 嗣 熊
(中国科学院力学研究所)

提要 本文采用匹配渐近展开法解二维低速物体的水波问题。文献〔1〕中已指出朴实渐近展开并不满足所有的边界条件。存在一个非齐次物体表面边界条件，它必须由势函数的波动部份来满足。在外部区，用广义WKB方法确定波运动的性质。除了量级的幂次与一个未知常数因子外，用这种方法求得了一级波动表达式。在接近物体的内部区，利用了由朴实渐近展开导得的非齐次物体表面边界条件。用源分布法，求得了内部解。通过内部解与外部解的匹配，确定了外部解中的非知常数因子与量级的幂次。

一、引 言

低速运动物体的水波问题近年来受到越来越多的重视。1969年Salvesen[2]在讨论二维沉体的高阶近似中，发现了当前进速度趋于零时，展开式并不一致有效。这一问题引起了Ogilvie[3]的注意，他把流场分成由不同的长度尺度刻划的二部份，第一部份就是“朴实”渐近展开的零级近似，它就是二重体（未扰动自由表面以下的实际物体部份加上它的对未扰动自由表面的镜像）的位势流，这部份流体流动可以用与物体尺度相比较的尺度来描述；第二部份描写波运动，我们可以用与波长相比较的尺度来描写这部份运动。由此他求得了一个非齐次线性自由表面条件，并得到了二维沉体情形的形式解。Dagan与Tulin[4]作出了类似于文献〔3〕的讨论，但他们指出基本流动，即流场的第一部份，应包含“朴实”渐近展开式中的头二项，而不应仅包含第一项二重体的位势流。Baba与Takekuma[5]把文献〔3〕的方法推广到三维浮体低速流的情形，他们得到了类似于二维情形的非齐次线性自由表面条件，并由此获得了三维问题解的解析表达式与波阻公式，Baba[6]，Baba与 Hara[7]，Newman[8]，Maruo[9,10]等用文献〔3〕的方法进一步讨论了三维浮体低速物体水波的问题。在所有这些讨论中，他们都用“朴实”渐近展开式中的零级近似作为基本流动，获得了非齐次线性自由表面条件，然后以此作为出发点。Keller[11]首先提出用射线理论处理低速物体的水波问题。Inui与Kajitani[12]采用了类似的方法。1979年Keller[13]进一步用射线理论的渐近展开式，更严格地导出了色散关系与波振幅沿射线的变化公式。但是，他指出，基本流动应包含“朴实”渐近展开式中更多的项，以使波动势函数满足齐次线性的自由表面边界条件。对于文献〔5,6〕中采用的非齐次线性自由表面条件，他指出，方程的左边是快变的波动函数，而右边是只与位势流解有关的缓变函数，一般无法使它们相等。Keller对文

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

献〔5,6〕的解，进行了渐近分析，指出了这些解的问题。但是，由于Keller所导出的波动势函数满足Laplace方程，齐次线性的自由表面条件与齐次的物体表面边界条件，因此在波势函数的解中包含有任意的常数因子。他引进了激励系数，但是只有对非常简单的情形，例如薄船或流线型物体，他才求得了这一系数。

文献〔1〕中已指出，朴实渐近展开并不满足所有的边界条件。存在一个非齐次物体表面边界条件，它必须由势函数的波动部份来满足。本文就是用这一非齐次物体表面边界条件，并采用匹配渐近展开法，解出了二维低速物体的波动解。用源分布法，求得了内部波动解。用广义WKB方法求得了外部区的波动解的形式。通过内部解与外部解的匹配，最后完全确定了问题的波动解。

二、用广义 WKB 方法求外部解

假定流体在 x 正方向以速度 u 运动，未扰自由表面位于 x 轴，y 轴垂直向上，座标原点位于物体内部，并使得物体与未扰自由表面的交点分别位于 $(-x_0,0)$ 与 $(x_0,0)$。设所有的长度物理量已用物体的特征长度 L 无量纲化，问题的小参数 ε 定义为

$$\varepsilon=F^2=u^2/gl \tag{1}$$

这里 g 为重力加速度，F 为Froude数。为简单起见，这里我们仅讨论二维情形，所有的讨论很容易推广到三维情形。假定自由表面的形状由关系式 $y=\varepsilon H(x)$ 给出，这里 $H(x)$ 是未知的，是问题需要求解的一部分。设流体为不可压缩，无粘性和无旋的，则流体的运动可以用速度势 $Lu\phi(x,y)$ 来描述，这里 $\phi(x,y)$ 为无量纲速度势。$\phi(x,y)$ 满足以下方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \quad \text{在流体中} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \quad \text{在物体上} \tag{3}$$

$$H(x)=\frac{1}{2}[1-\phi_x^2-\phi_y^2] \quad \text{在 } y=\varepsilon H(x)\text{上} \tag{4}$$

$$\phi_y=\varepsilon H_x\phi_x \quad \text{在 } y=\varepsilon H(x) \text{ 上} \tag{5}$$

$$\phi_y+\varepsilon[\phi_x^2\phi_{xx}+2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+\phi_y^2\phi_{yy}]=0 \quad \text{在 } y=\varepsilon H(x)\text{ 上} \tag{6}$$

$$|\phi-x|\to 0 \quad \text{当 } x\to-\infty \text{ 或 } y\to-\infty \tag{7}$$

这里自由表面条件（6）是由条件（4）与条件（5）消去 $H(x)$ 而得到的。显然，条件（6）是非线性的，而且这非线性条件（6）是在未知自由表面波高 $y=\varepsilon H(x)$ 上。我们假定问题（2）—（7）的解可以展开为

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=\bar{\phi}(x,y;\varepsilon)+\varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\varphi}_1[x,y,\Theta(x,y)]+\\ \varepsilon^{\alpha+2}\tilde{\varphi}_2[x,y,\Theta(x,y)]+\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}H(x)=\bar{H}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{\alpha}\tilde{\eta}_1\{x,\Theta[x,\varepsilon H(x)]\}\\ +\varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\eta}_2\{x,\Theta[x,\varepsilon H(x)]\}+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $\bar{\phi}(x,y;\varepsilon)$ 与 $\bar{H}(x,\varepsilon)$ 为问题的“朴实”渐近展开式[1]，α 是大于1的实数

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Theta(x,\ y)=\theta(x,\ y)/\varepsilon \tag{10}$$

$\theta(x,\ y)$为x，y的慢变函数。

由式（8）和（10），我们有以下微分公式

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial x}=\tilde{\varphi}_{1x}+(\theta_x/\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_{1\Theta}$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial y}=\tilde{\varphi}_{1y}+(\theta_y/\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_{1\Theta}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial x^2}=\tilde{\varphi}_{1xx}+(\theta_x/\varepsilon)\tilde{\varphi}_{1x\Theta}+(1/\varepsilon)\cdot(\theta_x\tilde{\varphi}_{1\Theta})_x+(\theta_x^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\varphi}_{1\Theta\Theta}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial y^2}=\tilde{\varphi}_{1yy}+(\theta_y/\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_{1y\Theta}+(1/\varepsilon)\cdot(\theta_y\tilde{\varphi}_{1\Theta})_y+(\theta_y^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\varphi}_{1\Theta\Theta}$$

等等，对$\tilde{\varphi}_2[x,\ y,\ \Theta(x,\ y)]$我们有类似的微分公式。把式（8）和式（10），代入Laplace 方程（2）中，由ε^{a-1}的系数，我们可得

$$\tilde{\varphi}_{1\Theta\Theta}\cdot(\theta_x^2+\theta_y^2)=0 \qquad \text{在流体中} \tag{11}$$

由ε^a 的系数，可得

$$(\theta_x^2+\theta_y^2)\tilde{\varphi}_{2\Theta\Theta}=-[\theta_x\tilde{\varphi}_{1x\Theta}+(\theta_x\tilde{\varphi}_{\Theta})_x+\theta_y\tilde{\varphi}_{1y\Theta}+(\theta_y\tilde{\varphi}_{\Theta})_y] \tag{12}$$

把式（8）—（10）代入自由表面动力学条件（4）中，由ε^a的系数，我们可得

$$\tilde{\eta}_1=-\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\varphi}_{1\Theta} \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{13}$$

由 ε^{a+1}的系数，可得

$$\eta_2=-\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{1x}-\theta_x\tilde{\varphi}_x\tilde{\varphi}_{2\Theta}+\tilde{\varphi}_x^2\bar{\varphi}_{xx}\theta_y\tilde{\varphi}_{1\Theta} \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{14}$$

同理，把式（8）—式（10）代入自由表面运动学条件（5）中,经整理后由ε^a的系数可得

$$\theta_y\tilde{\eta}_{1\Theta}=\theta_x\tilde{\varphi}_x\tilde{\eta}_{1\Theta} \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{15}$$

由ε^{a+1}的系数，我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{1y}+\theta_y\tilde{\varphi}_{2\Theta}+\tilde{\varphi}_{yy}\tilde{\eta}_1&=\tilde{\varphi}_x\tilde{\eta}_{x1}+\tilde{\varphi}_x\theta_y\bar{H}_x\tilde{\eta}_{1\Theta}\\&+\tilde{\varphi}_x\theta_x\tilde{\eta}_{2\Theta}+\theta_x\bar{H}_x\tilde{\varphi}_{1\Theta} \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上}\end{aligned} \tag{16}$$

由式（11）我们得到

$$\theta_x^2+\theta_y^2=0 \quad y\leqslant\varepsilon\bar{H} \tag{17}$$

由式（13）和式（15）消去$\tilde{\eta}_1$，得到

$$\theta_y\tilde{\eta}_{1\Theta}+\theta_x^2\tilde{\varphi}_x^2\tilde{\varphi}_{1\Theta\Theta}=0 \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{18}$$

由式（17），可得

$$\theta_y=i\theta_x \qquad y\leqslant\varepsilon\bar{H} \tag{19}$$

把式（19）代入式（18），并在$y=\varepsilon\bar{H}$上对Θ求解$\tilde{\varphi}_1$，此时x的函数θ_x与$\bar{\Phi}_x$都可以看作常数，最后可得

$$\tilde{\varphi}_1[x,\ \varepsilon\bar{H},\ \Theta(x,\ \varepsilon\bar{H})]=A(x,\ \varepsilon\bar{H})\exp\{-(\theta_x\bar{\Phi}_x^2)^{-1}\Theta i\} \qquad \text{在 } y=\varepsilon\bar{H} \text{ 上} \tag{20}$$

这里$A(x,\ \varepsilon\bar{H})$为$x$的任意函数，我们省略了另一个不显示波动性质的$x$的任意函数，因为它并不影响波动函数$\tilde{\varphi}_1$，$\tilde{\varphi}_2$，…，而且应该包含在不显示波动性质的“朴实渐近展开式”中。对于广义 WKB 展开式（8）与（9）中，我们一般要求波动函数$\tilde{\varphi}_1$，$\tilde{\varphi}_2$，…，$\tilde{\eta}_1$，$\tilde{\eta}_2$，…对位相函数Θ满足周期性。不失一般性，我们可假定周期为2π，也即

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\tilde{\varphi}_1(x,\ y,\ \Theta+2\pi)=\tilde{\varphi}_1(x,\ y,\ \Theta) \tag{21}$$

式（21）对 $y\leqslant\varepsilon\overline{H}$ 都成立，当然对于 $y=\varepsilon\overline{H}$ 也成立

$$\{\tilde{\varphi}_1(x,\ y,\ \Theta+2\pi)\}_{y=\varepsilon\overline{H}}=\{\tilde{\varphi}_1(x,\ y,\ \Theta)\}_{y=\varepsilon\overline{H}} \tag{22}$$

由式（20）和式（22），我们可得

$$\theta_x[x,\ \varepsilon\overline{H}(x)]=\frac{1}{\phi_x^2[x,\ \varepsilon\overline{H}(x)]} \tag{23}$$

由于 $$\frac{d\theta[x,\ \varepsilon\overline{H}(x)]}{dx}=\theta_x[x,\ \varepsilon\overline{H}(x)]+\varepsilon\overline{H}'(x)\cdot\theta_y[x,\ \varepsilon\overline{H}(x)]$$

因此，由式（23）可得

$$\theta(x,\ \varepsilon\overline{H})=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\tilde{\varphi}_x^2[\xi,\ \varepsilon\overline{H}(\xi)]}+O(\varepsilon) \tag{24}$$

把式（10），式（23）和式（24）代入式（20），我们得到

$$\tilde{\varphi}_1[x,\ \varepsilon\overline{H},\ \Theta(x,\ \varepsilon\overline{H})]=A(x,\ \varepsilon\overline{H})\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\tilde{\varphi}_x^2}\right]$$

$$\text{在 } y=\varepsilon\overline{H} \text{ 上} \tag{25}$$

这里我们已把指数中与 $O(1)$ 成比例的项吸收到 x 的任意函数 $A(x,\ \varepsilon\overline{H})$ 中。比较式（20）与式（25），我们看到，只要在式（24）中忽略 $O(\varepsilon)$ 项，我们可以直接把式（24）代入式（20），得到式（25），也即在式（24）中，我们可以忽略小量 $O(\varepsilon)$，因此

$$\theta(x,\ \varepsilon\overline{H})=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\tilde{\varphi}_x^2[\xi,\varepsilon\overline{H}(\xi)]} \tag{26}$$

现在我们来确定式（25）中的任意函数 $A(x,\ \varepsilon\overline{H})$。由式（12）与式（17），我们得到

$$\theta_x\tilde{\varphi}_{11x\Theta}+(\theta_x\tilde{\varphi}_{1\Theta})_x+\theta_y\tilde{\varphi}_{1y\Theta}+(\theta_y\tilde{\varphi}_{1\Theta})=0 \quad \text{在流体中，} \tag{27}$$

式（27）在 $y=\varepsilon\overline{H}$ 上亦成立。把式(19)、式（25）与式（26）代入在 $y=\varepsilon\overline{H}$ 上的式（27）经整理简化后，得

$$A_y=iA_x \qquad \text{在 } y=\varepsilon\overline{H} \tag{28}$$

假定 $\tilde{\varphi}_2$ 与 $\tilde{\varphi}_1$ 有相同的位相因子，即在 $y=\varepsilon\overline{H}$ 上 $\tilde{\varphi}_2$ 有位相因子 $\exp[-(i/\varepsilon)\theta(x,\varepsilon\overline{H})]$，这里 $\theta(x,\ \varepsilon\overline{H})$ 由式（26）给出。把式（13），式（14），式（25）与式（28）代入式(16)，并考虑到 $\tilde{\varphi}_2$ 所满足的方程与 $\tilde{\varphi}_1$ 所满足的方程（18）相同（这是因为 $\tilde{\varphi}_2$ 与 $\tilde{\varphi}_1$ 有相同的位相因子），经整理后，我们可得

$$A(x,\ \varepsilon\overline{H})=A_0\tilde{\varphi}_x(x,\ \varepsilon\overline{H}) \tag{29}$$

这里 A_0 是任意常数。把式（29）代入式（25），我们得到

$$\tilde{\varphi}_1(x,\ \varepsilon\overline{H},\ \Theta)=A_0\tilde{\varphi}_x(x,\ \varepsilon\overline{H})\cdot\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\tilde{\varphi}_x^2[\xi,\ \varepsilon\overline{H}(\xi)]}\right\}$$

$$\text{在 } y=\varepsilon\overline{H} \text{ 上} \tag{30}$$

这里 A_0 与 α 为待定常数，将通过与物体附近的近场解的匹配来确定。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

三、用源分布法求内部解

假定物体后缘物体表面与未扰自由表面垂直，由条件（4），可得驻点位置在$x=x_0$，$y=\frac{1}{2}\varepsilon$。假定ϕ_0是朴实渐近展开式$\tilde{\phi}$中的第一项，则由朴实渐近展开的讨论[1]，我们可得

$$\tilde{\varphi}_x(x_0,\ \varepsilon/2)=-c^{(0)}\phi^3{}_{0xx}(x_0,\ 0)\varepsilon^2+0\varepsilon^2+o(\varepsilon^2) \tag{31}$$

$$\tilde{\varphi}_y(x_0,\ \varepsilon/2)=-c^2(0)\phi_{0xx}(x_0,\ 0)\varepsilon^5+o(\varepsilon^5) \tag{32}$$

这里$c(0)$是物体表面在$(x_0,\ 0)$点的曲率。式（32）是由（31）式与$\tilde{\Phi}$满足的类似于条件（6）的公式得到。由条件（6），我们看到在接近驻点处，波数正比于ε^{-5}。为了使速度势$\phi(x,\ y)$在驻点处满足驻点条件$\phi_x(x_0,\ \varepsilon/2)=0$，$\phi_y(x_0,\varepsilon/2)=0$由（31）式我们可知在驻点附近，速度势中的波动部份必定为$o(\varepsilon^7)$量级。因此在内部区采用下列渐近展开式

$$\phi(x,\ y;\ \varepsilon)=\tilde{\varphi}(x,\ y;\ \varepsilon)+\varepsilon^7\tilde{\varphi}_1(X,\ Y;\ \varepsilon)+\cdots \tag{33}$$

$$H(x;\ \varepsilon)=\overline{H}(x;\ \varepsilon)+\varepsilon^4\tilde{H}_1(X,\ \varepsilon)+\cdots \tag{34}$$

这里
$$X=(x-x_0)/\varepsilon^5 \tag{35}$$

$$Y=[y-\varepsilon\overline{H}(x)]/\varepsilon^5 \tag{36}$$

（34）式中ε的幂次是由（33）式和条件（4）得到。把（33）—（36）式代入（6）式，则由ε^2的系数可得下列自由表面条件

$$\tilde{\varphi}_{1Y}+c^2(0)\phi^2{}_{0xx}(x_0,\ 0)\tilde{\varphi}_{1XX}=0 \qquad 在\ Y=\tilde{H}_1+\cdots \tag{37}$$

把（28）式代入Laplace方程，我们可得

$$\tilde{\varphi}_{1XX}+\tilde{\varphi}_{1YY}=0 \qquad 在流体中 \tag{38}$$

把（28）式代入物体表面边界条件（3），并考虑到$\tilde{\varphi}$满足边界条件[1]：

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}=0 \qquad 在物体上,y<0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}=-2\varepsilon yc(0)\phi_{0xx}(x_0,\ 0)\quad 在物体上,\ 0<y<\frac{\varepsilon}{2}$$

我们得到

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial X}=c(0)\phi_{0xx}(x_0,\ 0)(1+2\varepsilon^4Y)\quad 当\ X=0,\ -\frac{1}{2\varepsilon^4}<Y<0 \tag{40}$$

我们用以下条件补充条件（40）

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial X}=0 \qquad 当\ X=0,\ Y<-\frac{1}{2\varepsilon^4} \tag{40'}$$

条件（40′）在$y=o(\varepsilon)$的小区域内与条件（39）是一致的。在文献〔14〕中已指出自由表面条件（37）可以从$Y=\tilde{H}_1$上移至$Y=0$上仍然成立，即

$$\tilde{\varphi}_{1Y}+c^2(0)\phi^2{}_{0XX}(x_0,\ 0)\tilde{\phi}_{1XX}=0 \qquad 在\ Y=0 \tag{41}$$

因此，内部问题的一级波动函数近似$\tilde{\varphi}_1$满足方程（38）（40）（40′）与（41）式。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

满足方程（38）与（41）式的Green函数为

$$G(X,\ Y;\ \xi,\ \eta)=\frac{1}{2\pi}\ln[(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\pi}\ln[(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{dK}{K-\nu}e^{K(Y+\eta)}\cos K(X-\xi)-Me^{\nu(Y+\eta)}\sin\nu(X-\xi) \tag{42}$$

这里$\nu=1/c^2(0)\phi^2_{oxx}(x_0,\ 0)$，$M$为任常数。显然，$G(X,\ Y;\ \xi,\ \eta)$满足

$$G_X(X,\ Y;\ \xi,\ \eta)\to-\nu(M\pm1)e^{\nu(Y+\eta)}\cos\nu(X-\xi),\text{当}\ X-\xi\to\pm\infty \tag{43}$$

通常利用辐射条件，我们取$M=1$。这里对于接近物体的内部问题（38）（40）（40′）与（41）式，我们没有类似的辐射条件，故我们取M为任意常数。利用Green函数（42），我们可假定内部问题的解$\tilde{\varphi}_1(X,\ Y)$为

$$\tilde{\varphi}_1(X,\ Y)=\int_{-\infty}^0\mu(\eta)G(X,\ Y;\ 0,\ \eta)d\eta+De^{\nu Y}\cos\nu X \tag{44}$$

这里$\mu(\eta)$为待定未知函数，D为待定常数。显然，由（44）式，$\tilde{\varphi}_1(X,\ Y)$满足（38）与（41）式，因此我们只需要使（44）式满足边界条件（40）与（40′）式。为此，把（44）式代入物体边界条件（40）与（40′）式，则$\mu(\eta)$满足积分方程

$$\frac{1}{2}\mu(Y)-\nu Me^{\nu Y}\int_{-\infty}^0\mu(\eta)e^{\nu\eta}d\eta=\begin{cases}c(0)\phi_{oxx}(x_0,0)(1+2\varepsilon^4Y) & \text{当}-\frac{1}{2\varepsilon^4}<Y<0\\ 0 & \text{当}\ Y<-\frac{1}{2\varepsilon^4}\end{cases} \tag{45}$$

方程（45）是关于$\mu(Y)$的简单积分方程。我们很易求得它的解

$$\mu(Y)=\mu_0(Y)+Ee^{\nu Y} \tag{46}$$

这里

$$\mu_0(Y)=\begin{cases}2c(0)\phi_{oxx}(x_0,\ 0)(1+2\varepsilon^4Y) & \text{当}\ -\frac{1}{2\varepsilon^4}<Y<0\\ 0 & \text{当}\ Y<-\frac{1}{2\varepsilon^4}\end{cases} \tag{47}$$

与

$$E=\frac{4c(0)\phi_{oxx}(x_0,\ 0)\cdot M}{1-M}\left\{1-\frac{2\varepsilon^4}{\nu}[1-e^{-\nu/2\varepsilon^4}]\right\} \tag{48}$$

由Green函数的表达式（42），我们可得

$$\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X=\xi=0}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{Y-\eta}+\frac{1}{Y+\eta}\right]+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{dK}{K-\nu}K\cdot e^{K(Y+\eta)}$$

$$\to\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{dKKe^{K\eta}}{K-\nu},\qquad\text{当}\ \ Y\to0 \tag{49}$$

由最后的表达式，我们看到，当$\eta\to0$时，$(\partial G/\partial Y)_{X=\xi=0}$有奇异性，且按$-1/\pi\eta$趋向于无穷大。由（44）式，我们可得

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial Y}\right)_{X=0}=\int_{-\infty}^0\mu(\eta)\frac{\partial G(O,\ Y;\ O,\ \eta)}{\partial Y}d\eta+\nu De^{\nu Y} \tag{50}$$

又由（32）式，我们有

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left(\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial Y}\right)_{X=0,\ Y=0}=\varepsilon^2c^2(o)\phi^3{}_{oxx}(x_0,\ 0) \tag{51}$$

这里我们利用了驻点条件$\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)_{x=x_0,y=\frac{1}{2}\varepsilon}=0$。由（50）式与（49）式，我们看到，为了使波动函数$\tilde{\phi}_1(X,\ Y)$，满足驻点条件（51）式，必须有

$$\mu(0)=0 \tag{52}$$

把（52）式代入（46）式，并利用（47）式与（48）式，我们可确定常数M

$$M\doteq-\frac{1}{1-\frac{4\varepsilon^4}{\nu}} \tag{53}$$

把（44）式，（46）—（48）式与（53）式代入（51）式，我们可求出常数D

$$D=\varepsilon^3c^4(o)\phi^5{}_{oxx}(x_0,\ 0) \tag{54}$$

把（47）（48）与（53）式代入（46）式，我们最后可得

$$\mu(Y)=\begin{cases}-2c(o)\phi_{oxx}(x_0,\ 0)[e^{\nu Y}-1-2\varepsilon^4Y] & -\frac{1}{2\varepsilon^4}<Y<0\\ -2c(o)\phi_{oxx}(x_0,\ 0)e^{\nu Y} & Y<-\frac{1}{2\varepsilon^4}\end{cases} \tag{55}$$

$\tilde{\phi}_1(X,\ Y)$由（44）（54）（55）式给出。这就是接近物体区域的内部波动解的一级近似。

四、内部解与外部解的匹配

对于外部解，由（8）式，我们有

$$\begin{aligned}\phi_x(x,\ y;\ \varepsilon)&=\tilde{\phi}_x(x,\ y;\ \varepsilon)+\varepsilon^{a+1}[\tilde{\phi}_{1x}+(1/\varepsilon)\theta_x\tilde{\phi}_{1\theta}]+\cdots\\&=\tilde{\phi}_x(x,\ y;\ \varepsilon)+\varepsilon^a\tilde{\phi}_{1\theta}\theta_x+\cdots\end{aligned} \tag{56}$$

把（24）（25）与（29）式代入在$y=\varepsilon\overline{H}$上的（56）式，我们得到

$$\phi_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)=\phi_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)+\varepsilon^a\left(-\frac{i}{\tilde{\phi}_x^2}\right)\cdot A_0\tilde{\phi}_x\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\tilde{\phi}_x^2}\right)+\cdots \quad 在\ y=\varepsilon\overline{H} \tag{57}$$

现在我们把外部自变量x，y变换成由（35）式与（36）式定义的近场自变量X，Y。首先，我们注意到

$$\Theta'(x,\ \varepsilon\overline{H})\doteq-\frac{1}{\varepsilon\tilde{\phi}_x(x,\ \varepsilon\overline{H})}=-\frac{1}{\varepsilon\tilde{\phi}_x^2[x_0+X\varepsilon^5,\ \varepsilon\overline{H}(x_0+X\varepsilon^5)]}$$

由（31）式，我们可得

$$\Theta'(x,\ \varepsilon\overline{H})\doteq-\frac{1}{\varepsilon^5c^2(o)\phi^2{}_{oxx}(x_0,\ 0)} \tag{58}$$

与

$$\Theta(x,\ \varepsilon\overline{H})\doteq-\frac{x-x_0}{\varepsilon^5c^2(o)\phi^2{}_{oxx}(x_0,\ 0)} \tag{59}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

把（58）式与（59）式代入（57）式，我们得到

$$\phi_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)\sim\tilde{\phi}_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)+i[A_0/c(o)\phi_{oxx}(x_0,\ 0)]\varepsilon^{\alpha-2} e^{-ix/c^2(o)\phi^2_{oxx}(x_0,\ 0)} \tag{60}$$

这就是外部波动解在 $y=\varepsilon\overline{H}$ 上用近场自变量 X 表达的解的形式。

内部解由（33）（44）（54）与（55）式给出。现在我们求在 $y=\varepsilon\overline{H}$ 的内部解 $\phi_x(x,\ y;\ \varepsilon)$。由（33）式我们有

$$\begin{aligned}\phi_x(x,\ \varepsilon\overline{H})&=\tilde{\phi}_x(x,\varepsilon\overline{H};\varepsilon)+\varepsilon^7[\tilde{\phi}_{1X}X_x+\tilde{\phi}_{1Y}Y_x]_{y=\varepsilon\overline{H}}+\cdots\\&=\tilde{\phi}_X(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)+\varepsilon^2\tilde{\phi}_{1X}+\cdots\end{aligned} \tag{61}$$

为了与外部解进行匹配，我们必须求出当 $X\to\infty$ 时，（61）式的渐近表达式。（44）式对 X 微分，利用（43）式，并求出最后的积分，我们最后得到

$$(\tilde{\phi}_{1X})_{Y=0}\sim-\varepsilon^5c^2(o)\phi^3_{oxx}(x_0,\ 0)\sin[X/c^2(o)\phi^2_{oxx}(x_0,\ 0)]$$

$$\text{当 } X\to\infty \tag{62}$$

把近场的结果（62）式与远场的结果（60）式进行匹配，我们得到

$$A_0=-c^3(o)\phi^4_{oxx}(x_0,\ 0) \tag{63}$$

与

$$\alpha=7 \tag{64}$$

把（63）式与（64）式代入（57）式，我们可得

$$\phi_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)=\tilde{\phi}_x(x,\ \varepsilon\overline{H};\ \varepsilon)+i\varepsilon^7\frac{c^3(o)\phi^4{}_{oxx}(x_0,\ 0)}{\phi_x}\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\phi_x^2}\right]+\cdots$$

$$\text{在 } y=\varepsilon\overline{H} \text{ 上} \tag{65}$$

这就是远场解的最终形式。

参 考 文 献

〔1〕陈嗣熊，中国科学，9（1983），832—840.

〔2〕Salvesen, N., *J. Fluid Mech.*, **38**（1969），415—432.

〔3〕Ogilvie, T. F., Report, No.002, Dept. Naval Areh.& Marine Engng, University of Michigan（1968）.

〔4〕Dagan, G., et al., *J. Fluid Mech.*, **51**（1972），529—543.

〔5〕Baba, E., et al., *J. Soc. Naval Arch. Japan*, **137**（1975）.

〔6〕Baba, E., et al., *Mitsubishi Tech. Bull.*, 109（1976），1—20.

〔7〕Baba, E., et al. *Nagasaki Tech. Inst. Mitsubishi.Heavy Industry*（1978）.

〔8〕Newman. J. N., *Internat. Sem. Wave Resistance, Tokyo*（1976），31—43.

〔9〕Maruo, H., *Bull Faculty Engng Yokohama Nat. Univ.*, **26**（1977），59—75.

〔10〕Maruo, H., *Ibid*, **29**（1980），39—51.

〔11〕Keller, J. B., *Proc. 10th Symp. Naval Hydro., Office Naval Res.* Dept. Navy（1974），543—545.

〔12〕Inui, T., et al., *Schiffstechnik*, **24**（1977），178—213.

〔13〕Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, **92**（1979），465—488.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[14] Chen Sixiong and Ogilvle, T. F., Water waves generated by A slowly moving two-dimensional body, part Ⅱ, Report No. 254, Dept. of Naval Arch. & Mar. Engng., university of Michigan (1982).

Solution of the Water Waves Generated by A Slowly Moving Two-Dimensional Body

Chen Sixiong

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

The method of matched asymptotic expansion is used to solve the two-dimensional low-speed wave problem. It has been pointed out that the "naive expansion" does not satisfy all the boundary conditions. There is a nonhomogeneous body boundary condition which must be satisfied by the wave part of the potential function. In the outer region, the generalized WKB method is used to determine the nature of the wave motion. The first order wave expression is obtained by this method except for the poer of the order of magnitude and an unknown constant factor. In the inner region near the body, the nonhomogeneous body boundary condition derived by the "naive expansion" is used. The inner solution is obtained by the source distribution method. Through matching the inner and the outer solutions, the unknown constant factor and the power of the order of magnitude for the outer solution are determined.

(上接第 44 页)

$$\alpha^2\phi_s(j-1)+2\left[\cos\left(\frac{\pi s}{M}\right)-\left(1+\alpha^2\right)\right]\phi_S(j)+\alpha^2\phi_S(j+1)=R_S(j)$$

with the transformed boundary condition on ξ axis. This eguation can be solved readily.

The updating of the free surface and the potential function or it is implemented by the predictor-corrector approach

$$\bar{\Phi}^{n+1)}(i,\ \eta)=\phi^{(n)}(i,\eta)+\Delta t\cdot G^{n)}$$

$$\phi^{(n+1)}(i,\ \eta)=\phi^{(n)}+\frac{\Delta t}{2}\left(G^{(n)}+G^{(n+1)}\right)$$

where the superscripts indicate the time step. The stability condition of the predictor-corrector method is not too stringent. The solution can convergent even in the non-linear case. The Fourier transform is implemented by the FFT technique.

Test problems of two-dimension and three-dimension cases calculated by the present method are presented. The computational results verify the feasibility the method in solving the transient non-linear free surface wave problems.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net