

# 弱重力场中的平面活塞运动\*

胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 1982年12月3日收到)

## 摘 要

本文分析了弱重力场中等速活塞运动驱动恒星大气的气体动力学过程。在活塞前面, 气体被压缩。压缩气体利用其部分内能, 以及有些情况下其动能, 以克服外加重力。

当逃逸速度与等离子体速度之比值为一小参数时, 所有量可对小参数展开, 基态解给出均匀流, 如同没有重力场的气体动力学所讨论的那样。一阶关系给出外加引力场对流场的影响, 即激波强度变化不大而气体内能不断耗散。对于强激波和活塞附近, 近似得到的分析解有类似的特征。

由于外加重力场在天体物理和大气物理过程中的重要性, 这些结果对于恒星和行星大气中瞬变过程的机制会有启发。

## 一、引 言

恒星重力场控制着它们的大气结构, 以及大气中的气体动力学过程。气体在重力场中的运动过程, 特别是非定常运动过程, 将在本文中讨论。这种问题在天体物理中很重要, 其中的一个重要的动力学过程与太阳大气中的瞬变现象有关。瞬变现象是不定常过程, Sedov 曾用相似解去讨论天体物理过程<sup>[1]</sup>。对于常数加速度或多方指数 $\gamma=3$ 的情况, Stayukovich 讨论了一些特解<sup>[2]</sup>。大量的数值计算曾用于分析由初始非平衡态驱动的某些动力学过程(比如 Steinolfson 等<sup>[3]</sup>, Nakagawa 等<sup>[4]</sup>, 吴式燦等<sup>[5]</sup>, Dryer 等<sup>[6]</sup>)。最近, 我们讨论了日冕瞬变的过程, 并将它看作是由局部稠密等离子体或磁通量管组成的活塞驱动的气体动力学效应的结果, 用特征线方法讨论了这类活塞<sup>[7]</sup>。

在研究天体物理环境中的瞬变过程时, 必须包括外加重力场于气体动力学中, 进而理解重力场对流场的影响。作为第一步, 我们讨论如图1所示的弱重力场中由活塞驱动的一维动力学过程。这时, 选用直角坐标系讨论平面活塞运动。

在第二节中, 用摄动方法给出弱重力场近似的方程组, 第三节讨论平面激波的间断条件, 在第四节中, 讨论几个典型的激波强度,

\* 钱伟长推荐。

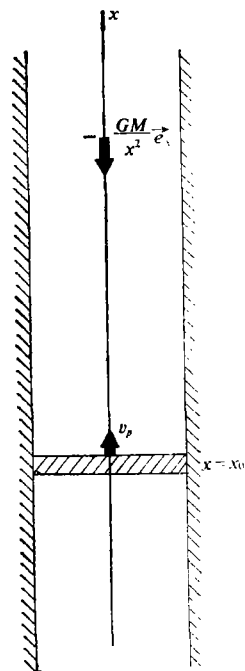


图1 外加重力场作用下平面活塞问题的一维不定常动力学过程

几个例子清楚地表示出重力场的影响, 即激波强度变化很小而气体内能耗散. 第五节中分析了强激波近似和活塞附近滚动的分析解. 在最后一节, 主要讨论了有激波条件的活塞问题与边界条件都给在活塞处的问题之差别.

## 二、基本方程和近似

对恒星大气局部区域的瞬变运动, 取坐标原点位于恒星中心,  $x$  轴沿径向向外. 恒星大气局部区域中的气体动力学方程组为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{GM}{x^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.3)$$

其中  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$  为浓度, 压力和速度,  $\gamma$  为多方指数,  $G$  为重力常数,  $M$  是恒星的质量. 当没有重力时, 方程组 (2.1)~(2.3) 退化为纯气体动力学方程组. 这时, 基于量纲分析, 只能组建一个具有速度量纲的量, 即

$$\xi = \frac{x}{t} \quad (2.4)$$

当包含有外加重力项时, 可以引入另一个具有速度量纲的量, 即

$$v_g = \sqrt{\frac{GM}{x}} \quad (2.5)$$

一般而言, 方程组 (2.1)~(2.3) 的解应该是  $\xi$  和  $v_g$  的二元函数, 而不仅仅是  $\xi$  的函数.

在弱重力场时, 特征逃逸速度 (2.5) 小于声速和等离子体速度. 基本流动是黎曼流. 此时, 容易分析重力对流动的影响. 引进无量纲量

$$\bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{a} = \frac{a}{v_*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{x_*/t_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_*} \quad (2.6)$$

以及无量纲小参数

$$\varepsilon = \frac{GM}{x_* v_*^2} \ll 1 \quad (2.7)$$

其中  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$  为声速,  $v_*$  和  $x_*$  为典型的速度和长度 (如恒星半径), 上标 “-” 表示无量纲量, 为了简单今后将予忽略. 进一步, 我们讨论等熵流场, 则一维方程组 (2.1)~(2.3) 退化为

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{x^2} \quad (2.9)$$

其中 (2.9) 式右端表示外加重力场.

将所有量展开为

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots, \quad a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \dots \quad (2.10)$$

则零阶基态方程为

$$\frac{\partial a^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

基态方程(2.11)和(2.12)的解可由黎曼流给出,相应地,

$$a^{(0)} = a^{(0)}(\xi), \quad v^{(0)} = v^{(0)}(\xi) \quad (2.13)$$

则方程(2.11)和(2.13)变为

$$(v^{(0)} - \xi) \frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)} \frac{da^{(0)}}{d\xi} = 0 \quad (2.14)$$

$$(v^{(0)} - \xi) \frac{da^{(0)}}{d\xi} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} \frac{dv^{(0)}}{d\xi} = 0 \quad (2.15)$$

方程组(2.14)和(2.15)为黎曼流,其不变量为

$$v^{(0)} \pm \frac{2a^{(0)}}{\gamma-1} = \text{常数} \quad (2.16)$$

而特征线关系为

$$\frac{x}{t} = v^{(0)} \pm a^{(0)} \quad (2.17)$$

可以讨论活塞问题的一个特解.如果活塞以常速运动,活塞前的流动量是均匀的.

$$v^{(0)} = \text{常数}, \quad a^{(0)} = \text{常数} \quad (2.18)$$

一个激波将均匀流区域和宁静背景分开.

类似地,一阶方程组为

$$\frac{\partial a^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{2a^{(0)}}{\gamma-1} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \quad (2.20)$$

同样可导出更高阶的方程组.

方程(2.19)和(2.20)是线性的.在这种解法中,只有一阶方程是非线性的;所有高阶方程,同时外加重力的影响都是线性的.

根据量纲分析理论,一阶方程的解是  $\xi$  和  $v_0$  的函数,或换言之,是  $\xi$  和  $t$  的函数.讨论下列形式的解

$$v^{(1)}(\xi, t) = t^m f(\xi), \quad a^{(1)}(\xi, t) = t^n g(\xi)$$

由方程组(2.19)和(2.20)可导出

$$m = n = 1$$

若典型的有量纲速度  $v_*$  取为均匀活塞速度  $v_0$ , 则基态速度为

$$v^{(0)} = 1$$

进而,活塞上的边界条件为

$$f(1) = 0 \quad (2.21)$$

这样,扰动方程(2.19)和(2.20)简化为

$$\mathcal{L}_1(f, g) \equiv (1-\xi)g'(\xi) + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} f'(\xi) - g(\xi) = 0 \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}_2(f, g) \equiv (1-\xi)f'(\xi) + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)}g'(\xi) - f(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \quad (2.23)$$

其中引进无量纲参数  $\xi = x/t/v_*$ 。扰动态将由 (2.22) 和 (2.23) 再加上活塞边条件 (2.21) 及激波条件确定。

### 三、激波条件和解

平面活塞问题中, 激波前的气体均匀静止, 活塞与激波之间气体状态均匀, 将激波前的量标以下标“0”, 则激波关系为

$$v = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N} (N^2 - a_0^2) \quad (3.1)$$

$$p = p_0 + \frac{2\rho_0}{\gamma+1} (N^2 - a_0^2) \quad (3.2)$$

$$\rho = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{a_0}{N} \right)^2 \quad (3.3)$$

其中  $N$  为激波传播速度, 与 (2.10) 类似, 将  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  和  $N$  对  $\varepsilon$  展开, 则零阶关系为

$$v^{(0)} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N^{(0)}} (N^{(0)2} - a_0^2) \quad (3.4)$$

$$p^{(0)} = p_0 + \frac{2\rho_0}{\gamma+1} (N^{(0)2} - a_0^2) \quad (3.5)$$

$$\rho^{(0)} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \quad (3.6)$$

上式中用到  $N = N^{(0)} + \varepsilon N^{(1)} + \dots$ , 以及类似的展开关系。同样地, 一阶激波关系为

$$v_s^{(1)} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N^{(0)}} (N^{(0)2} + a_0^2) \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \quad (3.7)$$

$$p_s^{(1)} = \frac{4\rho_0}{\gamma+1} N^{(0)} N^{(1)} \quad (3.8)$$

$$\rho_s^{(1)} = \frac{4}{\gamma+1} \left( \frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \rho_0 \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.9)$$

其中下标  $s$  表示激波面处  $\xi = \xi_s$  的值。对于声速  $a$ , 其展开式给出

$$a^{(0)} = \sqrt{\frac{\gamma p^{(0)}}{\rho^{(0)}}} \quad (3.10)$$

和

$$a^{(1)} = \frac{a^{(0)}}{2} \left( \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right) \quad (3.11)$$

将(3.8)和(3.9)代入(3.11), 声速为

$$a_s^{(1)} = \frac{a^{(0)}}{2} \left[ \frac{4\rho_0 N^{(0)2}}{(\gamma+1)\rho_0 + 2\rho_0(N^{(0)2} - a_0^2)} - \frac{4a_0^2}{(\gamma-1)N^{(0)2} + 2a_0^2} \right] \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \quad (3.12)$$

关系式(3.4)和(3.7)要求

$$\frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} = \frac{N^{(0)2} - a_0^2}{N^{(0)2} + a_0^2} \quad \frac{v_s^{(1)}}{v^{(0)}} \quad (3.13)$$

利用基态关系(3.10), 关系(3.12)和(3.13)导出联系函数  $f(\xi_*)$  和  $g(\xi_*)$  之间的关系

$$f(\xi_*) = \alpha g(\xi_*) \quad (3.14)$$

而系数  $\alpha$  为

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2a^{(0)}}{v^{(0)}} \left[ \frac{N^{(0)2}}{(\gamma+1)a_0^2 + 2(N^{(0)2} - a_0^2)} - \frac{a_0^2}{(\gamma-1)N^{(0)2} + 2a_0^2} \right] \frac{N^{(0)2} - a_0^2}{N^{(0)2} + a_0^2} \quad (3.15)$$

用边条件(2.21)和(3.14)可求解扰动方程(2.22)和(2.23), 求解的区域为  $1 \leq \xi \leq N^{(0)}/v_s$ .

我们讨论三个例子, 即

$$\frac{a_0}{N^{(0)}} = 0.25, \quad 0.5, \quad 0.75$$

由基态关系(3.4)~(3.6), 基态解分别为

$$1. \quad \frac{N^{(0)}}{v_s} = 1.42222, \quad \frac{a^{(0)}}{v_s} = 0.86095, \quad \frac{a_0}{v_s} = 0.35555 \quad (3.16)$$

$$2. \quad \frac{N^{(0)}}{v_s} = 1.77777, \quad \frac{a^{(0)}}{v_s} = 1.29140, \quad \frac{a_0}{v_s} = 0.88888 \quad (3.17)$$

$$3. \quad \frac{N^{(0)}}{v_s} = 3.04762, \quad \frac{a^{(0)}}{v_s} = 2.63113, \quad \frac{a_0}{v_s} = 2.28554 \quad (3.18)$$

利用这些基态解, 可求出系数  $\alpha$ , 它们分别是

$$\alpha = 1.54017, \quad 2.08420, \quad 2.72094. \quad (3.19)$$

在下一节, 我们将分析这三个例子.

#### 四、扰 动 解

可以看出, 方程组(2.22)和(2.23)以及相应的边界条件都是线性的. 这个问题可以化为求下列两个基本解, 即

$$\mathcal{L}_1(f_1, g_1) = 0, \quad \mathcal{L}_2(f_1, g_1) = -\frac{1}{\xi^2}, \quad f_1(1) = 0, \quad g_1(1) = 0 \quad (4.1)$$

以及

$$\mathcal{L}_1(f_2, g_2) = 0, \quad \mathcal{L}_2(f_2, g_2) = 0, \quad f_2(1) = 0, \quad g_2(1) = 1 \quad (4.2)$$

则平面活塞问题的解为此基本解的线性组合

$$f(\xi) = f_1(\xi) + c f_2(\xi), \quad g(\xi) = g_1(\xi) + c g_2(\xi) \quad (4.3)$$

其中的常数  $c$  由条件(3.14)给出为

$$c = \frac{f_1(\xi_*) - \alpha g_1(\xi_*)}{\alpha g_2(\xi_*) - f_2(\xi_*)} \quad (4.4)$$

不难验证, 解(4.3)满足方程组(2.22)和(2.23), 也满足边界条件(2.21)和(3.14). 两个基

本解(4.1)和(4.2)都是对两个活塞边界条件求解。

对于情况(3.16)~(3.18), 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布分别表示如图2, 图3和图4.  $f(\xi)$ 表示为实线  $g(\xi)$ 为虚线. 这些结果给出外加重力场对流动的影响. 从能量的观点看, 内能, 有时还有动能, 将消耗以克服外加重力场. 另一方面, 激波强度变化不大. 激波的传播速度是 $N^{(0)} + \varepsilon N^{(1)}$ . 当 $N^{(1)}$ 为正时, 激波强度增加, 反之亦然. (3.12)式表明,  $N^{(1)}$ 与 $v_s^{(1)}$ 有同样的符号, 因而与 $f(\xi_s)$ 同号. 图2~图4给出 $f(\xi_s) \approx 0$ 对所有情况都成立. 这表明外加引力场使激波强度变化不大. 图2~图4还表明,  $g(\xi)$ 单调地减小, 从活塞 $\xi=1$ 附近的正值到激波 $\xi=\xi_s$ 附近接近于零的值. 此结果意味着活塞与激波之间气体的内能消耗了. 但是,  $f(\xi)$ 在活塞附近增加, 从零增加到最大值后减少到激波处的值接近于零. 故气体先加速而后减速. 气体的动能在活塞附近增加, 在激波附近减少. 综合这些结果, 在活塞附近, 气体内能耗散以克服重力并加速气体; 在激波附近, 气体内能和动能都耗散以克服重力场.

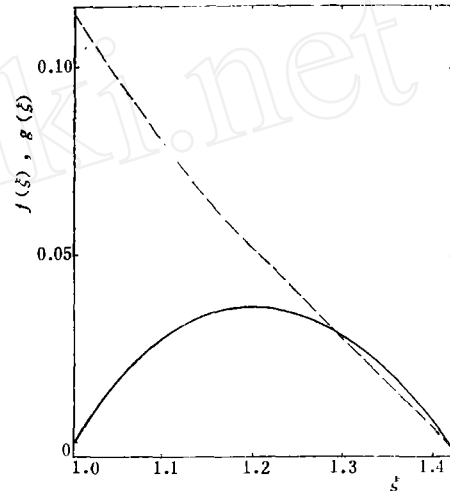


图2 满足激波条件时函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/N^{(0)} = 0.25$ , 实线为 $f$ , 虚线为 $g$

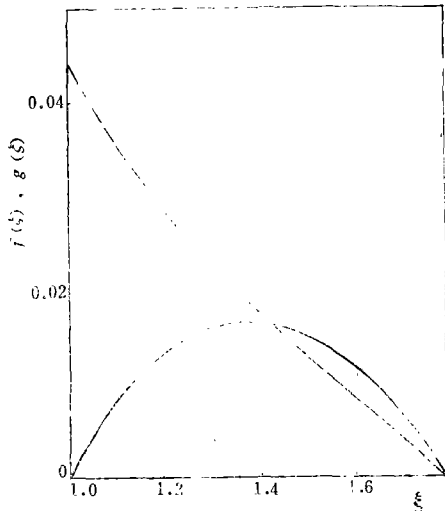


图3 满足激波条件时函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/N^{(0)} = 0.5$ , 实线为 $f$ , 虚线为 $g$

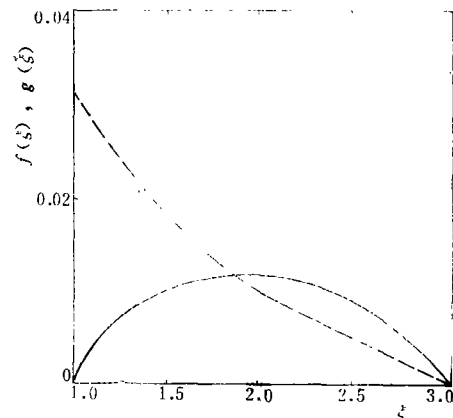


图4 满足激波条件时 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/N^{(0)} = 0.75$ , 实线为 $f$ , 虚线为 $g$

## 五、强激波近似

当激波很强时, 流动区域狭窄, 使 $\xi-1 \leq \xi_s-1 \ll 1$ . 这时, 方程组(2.22)和(2.23)可简化为

$$\frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} f'(\xi) - g(\xi) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{2}{\gamma-1} a^{(0)} g'(\xi) - f(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \quad (5.2)$$

对方程(5.1)微商, 并用(5.2)消去函数  $g'(\xi)$ , 可导出函数  $f(\xi)$  的方程为

$$f'' + \frac{1}{\xi} f' - \frac{1}{a^{(0)2} \xi^2} f = -\frac{1}{a^{(0)2} \xi^4} \quad (5.3)$$

方程(5.3)的齐次方程是欧拉方程, 其通解不难导出为

$$f(\xi) = c_1 \xi^\beta + c_2 \xi^{-\beta} + \frac{\beta}{\beta^2 - 4} \frac{1}{\xi^2} \quad (5.4)$$

利用(5.4), 由方程(5.1)可得到  $g(\xi)$  为

$$g(\xi) = \frac{\gamma-1}{2\xi} \left( c_1 \xi^\beta + c_2 \xi^{-\beta} - \frac{2\beta}{\beta^2-4} \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (5.5)$$

其中  $\beta = 1/a^{(0)}$ , 而系数  $c_1$  和  $c_2$  由条件(2.21)和(3.14)确定为

$$c_1 = \frac{\beta}{4-\beta^2} \frac{\beta \left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha + \xi_* \right) \xi_*^{-\beta} - [(\gamma-1)\alpha + \beta \xi_*] \frac{1}{\xi_*}}{\left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha - \xi_* \right) \xi_*^\beta + \left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha + \xi_* \right) \xi_*^{-\beta}} \quad (5.6)$$

$$c_2 = \frac{\beta}{4-\beta^2} \frac{\beta \left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha + \xi_* \right) \xi_*^\beta + [(\gamma-1)\alpha + \beta \xi_*] \frac{1}{\xi_*}}{\left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha - \xi_* \right) \xi_*^\beta + \left( \frac{\gamma-1}{2} \alpha + \xi_* \right) \xi_*^{-\beta}} \quad (5.7)$$

利用上述关系, 一阶解的剖面为

$$v^{(1)}(x, t) = \frac{1}{x} \left[ c_1 \left( \frac{x}{t} \right)^{1+\beta} + c_2 \left( \frac{x}{t} \right)^{1-\beta} + \frac{\beta^2}{\beta^2-4} \frac{t}{x} \right] \quad (5.8)$$

$$a^{(1)}(x, t) = \frac{\gamma-1}{2x} \left[ c_1 \left( \frac{x}{t} \right)^{1+\beta} + c_2 \left( \frac{x}{t} \right)^{1-\beta} - \frac{2\beta}{\beta^2-4} \frac{t}{x} \right] \quad (5.9)$$

对强激波近似  $a_0/N^{(0)} \rightarrow 0$ , 它导出  $\xi_* \rightarrow \frac{\gamma+1}{2}$ . 对于  $\gamma = \frac{5}{3}$ , 我们有  $\xi_* - 1 = \frac{1}{3} \ll 1$ . 由

上述结果, 扰动态解为

$$f(\xi) = -0.7506 \xi^{1.3417} + 1.5689 \xi^{-1.3417} - \frac{0.8183}{\xi^2} \quad (5.10)$$

$$g(\xi) = -0.2502 \xi^{0.3417} - 0.5230 \xi^{-2.3417} + \frac{0.4066}{\xi^3} \quad (5.11)$$

(5.10)的结果给出  $f(\xi_*)$  是负的, 故激波强度有所减弱. 关系式(5.11)给出  $g(\xi)$  单调递减, 故气体的内能耗散. 这些结果与前节的一致. 上面给出的分析解是近似的, 不十分准确, 因为  $\xi_* - 1$  并非比 1 小得多. 但分析解定性描述了外加重力场影响的一些基本特征.

类似地, 分析解可以用来讨论活塞附近区域的流动, 这时会更准确. 从方程(5.1)可以看出,

$$f'(1) = \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{a^{(0)}} g(1)$$

当  $g(1) > 0$  时, 活塞附近流动将被加速; 当  $g(1) < 0$  时, 将减速. 同样可由(5.2)看出,

$$g'(1) = -\frac{\gamma-1}{2\xi^2} \frac{1}{a^{(0)}}$$

所以, 活塞附近内能总是不断减小. 如果再考虑到方程(2.22)和(2.23)左端的第一项, 就可以分析整个流场的动能和内能变化趋势, 特别是在激波附近, 从而解释图2~图4的剖面分布.

## 六、讨 论

方程(2.1)~(2.3)所确定的特征线的关系与没有重力时相同, 即三族特征线为<sup>[3]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = v+a, \quad v-a, \quad v \quad (6.1)$$

但是, 特征关系改变了. 将(2.10)代入(6.1), 得到

$$\frac{dx}{dt} = (v^{(0)} + a^{(0)}) + \varepsilon(a^{(1)} + v^{(1)}) \quad (6.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (v^{(0)} - a^{(0)}) - \varepsilon(a^{(1)} - v^{(1)}) \quad (6.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} \quad (6.4)$$

这些结果表明, 特征线不再是直线而是曲线. 第一和第三族特征线的斜率在活塞附近增加, 第二族特征线则减少. 由于假设了弱重力场近似, 特征线接近于直线, 略有弯曲, 曲率变化的量级只是  $\varepsilon$ . 此结论可与太阳重力场的情形比较, 其中的特征线亦接近直线而略有弯曲<sup>[7]</sup>.

类似地可讨论激波阵面. 没有重力场时它是一直线, 有重力场时其位置为

$$\frac{x}{t} = N + \varepsilon N' \quad (6.5)$$

激波前沿的斜率变化不大, 因为激波强度变化不大.

现在讨论平面活塞问题, 其中两个边界条件都给在活塞上. 一个典型的例子给出下列边界条件

$$v|_{\xi=1} = v, \quad a|_{\xi=1} = a, \quad (\text{常数}) \quad (6.6)$$

它要求扰动态的边界条件为

$$f(1) = 0, \quad g(1) = 0 \quad (6.7)$$

用边界条件(6.7)求解方程(2.22)和(2.23), 两个函数  $f(\xi)$  和  $g(\xi)$  都是  $\xi$  的单调递减函数, 并且都是负的. 图5~图7分别给出比值  $a^{(0)}/v = 2, 4$  和  $10$  的结果. 这些结果意味着, 气体的内能和动能都耗散以克服外加重力场, 并且激波强度将因重力场而减弱. 但是, 如果给定了边值(6.7), 函数值  $f(\xi_s)$  和  $g(\xi_s)$  就都固定了, 激波处的边界条件难于满足. 这表明了激波条件的重要性. 在利用某些相似解时, 若用到无界空间而不包括激波条件, 不仅容易引进奇异性, 而且会对动力学过程给出不同的物理图象.

重力在恒星和行星大气动力学过程中有重要影响, 需要逐步开展对包括重力场的气体动力学进行研究. 本文讨论了一个简单情况, 但它分析了一个基本过程, 并给出外加重力场的影响.



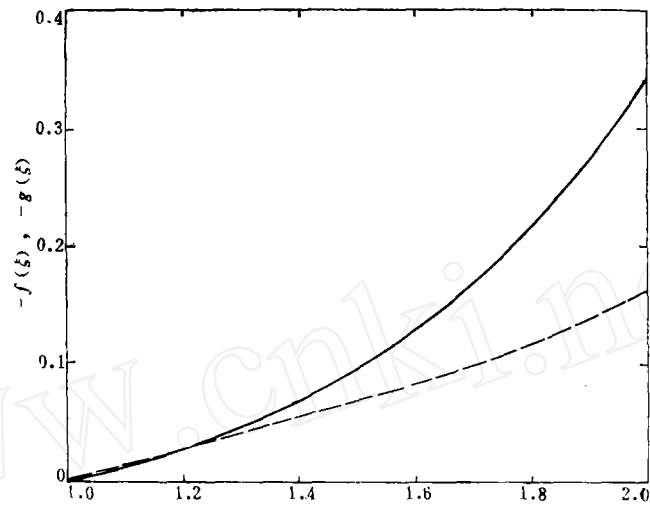


图5 全部活塞边值时  $f(\xi)$  和  $g(\xi)$  的分布  
其中  $\alpha^{(0)}/v_p=2$ , 实线为  $f$ , 虚线为  $g$

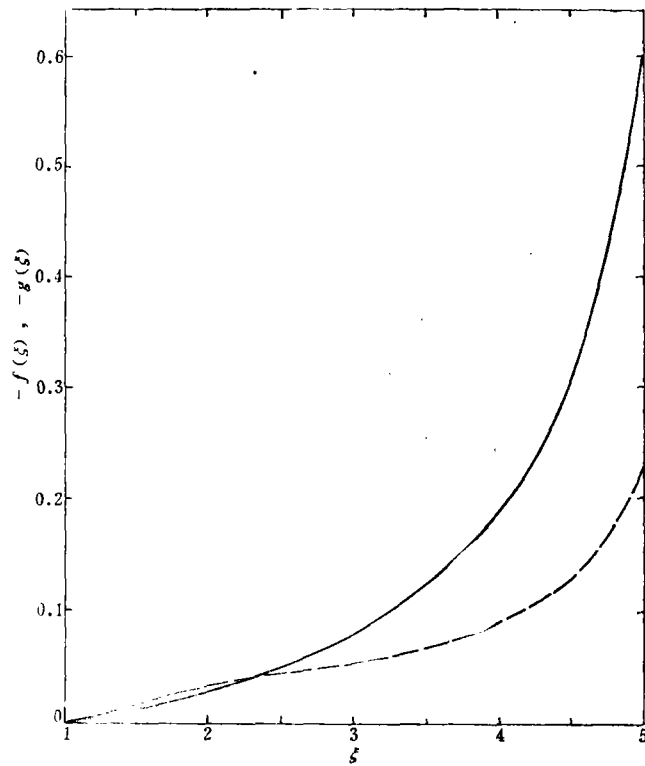


图6 全部活塞边值时  $f(\xi)$  和  $g(\xi)$  的分布  
其中  $\alpha^{(0)}/v_p=4$ , 实线为  $f$ , 虚线为  $g$

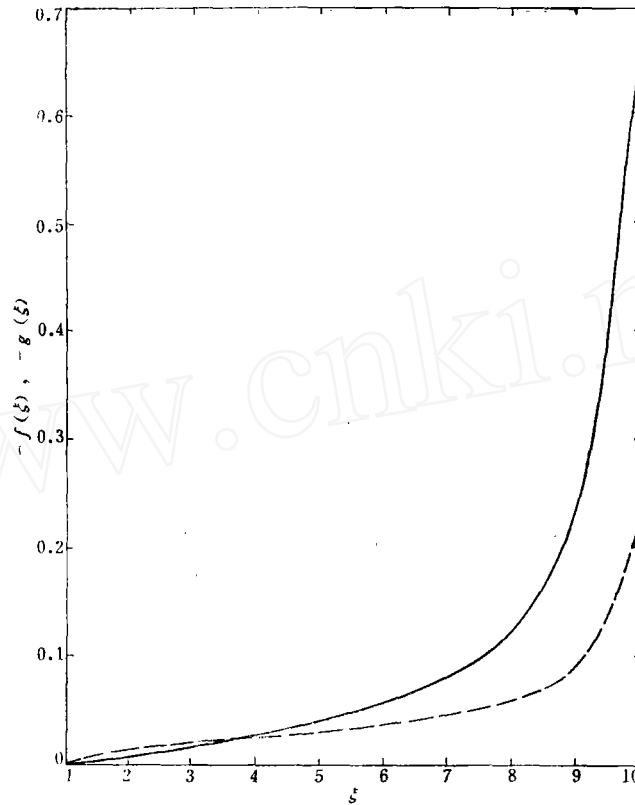


图7 全部活塞边值时  $f(\xi)$  和  $g(\xi)$  的分布  
其中  $a^{(0)}/v_p=10$ , 实线为  $f$ , 虚线为  $g$

#### 参 考 文 献

- [1] Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Method in Mechanics*, Academic Press, Ch.5 (1959).
- [2] Stayukovich, K. P., *Unsteady Motion Continuous Media*, Pergamon Press, 608(1960).
- [3] Steimolfson, R. S., et al., *Astrophys. J.*, 215, (1977), 345.
- [4] Nakagawa, N. et al., *Solar Physis*, 41 (1975), 387.
- [5] Wu, S. T. et al., *Astrophys. J.*, 219 (1978), 324.
- [6] Dryer, M., et al., *Astrophys. J.*, 277 (1979), 1059.
- [7] Hu, W. R., *Astrophys. Space Sci.*, 92 (1983) 373, 395.
- [8] Thompson, P. A., *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hall, (1972), 374.

## The Plane Piston Problem in a Weak Gravitational Field

Hu Wen-rui

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)*

### Abstract

We analyze a gasdynamical process in the stellar atmosphere that is driven by a "piston" moving with constant velocity in a weak gravitational field. Ahead of the piston, the gas is compressed, and this compressed gas uses part of its internal energy and somewhere its kinetic energy to overcome the applied gravity.

If we expand the quantities as a series of small parameter, which is the ratio of a typical escape velocity to the plasma velocity, the basic state gives a uniform flow, as shown by the case of gasdynamical theory without gravity. The first-order relationships show the influence of the applied gravity on the flow fields, that is, the strength of the shock wave changes slightly, the internal energy of the gas exhausts. For the cases of strong shock wave and near the piston an analytical solution may be approximately obtained and has the similar features.

Because of the importance of the applied gravity in the astrophysical and atmospheric physical processes, these results may shed light on the mechanics of transient process in the stellar and planetary atmosphere.