部分浸润三维振荡物体的附加质量矩阵与辐射阻尼矩阵

陈 嗣 熊

（中国科学院力学研究所，北京）

假定流体的运动是由部分浸润的三维物体的小振幅周期运动所产生，流体为不可压缩的、无粘性的和无旋的．设坐标轴 $0y$ 垂直向下指向流体，坐标轴 $0x$ 与 $0z$ 在未扰动自由表面上，坐标原点 0 在物体内部，S 表示物体湿润表面的平衡位置，曲线 C 表示水线的平衡位置．流体在下半空间($y>0$)以角频率 ω 的运动可以用速度势 $\phi(x, y, z)\exp(-i\omega t)$ 来描述，这里 t 表示时间变量．则 $\phi(x, y, z)$ 满足以下方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\ \text{在} S \text{外},\ y\geqslant 0; \tag{1}$$

$$K\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,\ \text{在} C \text{外},\ y=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=V(x, y, z),\ \text{在} S \text{上}, \boldsymbol{n} \text{为} S \text{的外法向单位矢量}; \tag{3}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\phi}{\partial r}=0,\ \text{在水线} C \text{上}; \tag{4}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\phi=0; \tag{5}$$

$$\lim_{R\to\infty}R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}-iK\phi\right)=0, \tag{6}$$

这里(2)式中，$K=\omega^2/g$，g 为重力加速度；(3)式中，$V(x, y, z)$ 为 x, y, z 的解析函数，由它我们可以考虑任意的振荡运动；正则性条件(4)式中，r 表示离开水线 C 上任意一点的距离；辐射条件(6)式中，R 表示离开原点 0 的距离．令

$$\phi(x, y, z)\sim\sum_{i=0}^{\infty}K^{-i}\phi^{(i)}(x, y, z)+\tilde{\phi}(x, y, z), \tag{7}$$

这里 $\phi^{(i)}(x, y, z)$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$ 满足以下方程：

$$\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial z^2}=0,\ \text{在} S \text{外},\ y\geqslant 0; \tag{8}$$

$$\phi^{(i)}(x, 0, z)=-\frac{\partial\phi^{(i-1)}(x, 0, z)}{\partial y},\ \text{在} C \text{外}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial n}=\delta_i^0\cdot V(x, y, z),\ \text{在} S \text{上}; \tag{10}$$

本文 1984 年 2 月 7 日收到．

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r}=0,\ 在C上; \tag{11}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\phi^{(i)}=0; \tag{12}$$

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\phi^{(i)}=0, \tag{13}$$

这里我们假定

$$\phi^{(-1)}(x,y,z)=0,\ \delta_i^0=\begin{cases}1,\ 当\ i=0,\\ 0,\ 当\ i\geqslant 1.\end{cases}$$

显然,所有的 $\phi^{(i)}(i=0,1,2,\cdots)$ 都不显示波动性质. 为了使 $\phi(x,y,z)$满足辐射条件(6)式,我们必须引入波动函数 $\tilde{\phi}(x,y,z)$,它满足以下方程:

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}=0,\ 在S外,\ y\geqslant 0; \tag{14}$$

$$K\tilde{\phi}+\tilde{\phi}_y=0,\ 在C外,\ y=0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial n}=0,\ 在S上; \tag{16}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}=0,\ 在C上; \tag{17}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\tilde{\phi}=0; \tag{18}$$

$$\lim_{R\to\infty}R^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial R}-iK\tilde{\phi}\right]. \tag{19}$$

显然,在远离物体的远场区,$\tilde{\phi}$ 满足方程(14)、(15)、(18)、(19)式. 设水线 C 上的一点 P 沿 C 的弧长为 σ,水线 C 在 P 点的曲率半径为 $W(\sigma)$,从 P 点沿 C 的外法线方向的距离为 τ,则在远场区,我们可对 $\tilde{\phi}$ 用几何光学渐近近似展开式[1],从而求得 $\tilde{\phi}$ 的远场解:

$$\tilde{\phi}\sim A\cdot\left[\frac{W(\sigma)}{W(\sigma)+\tau}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\exp(iK\tau-Ky), \tag{20}$$

这里 A 沿射线为常数,它可以为 σ 的函数. 把 $\tilde{\phi}$ 的远场波动解(20)式通过与接近物体区的近场波动解的渐近匹配,我们可求得常数 A[1]:

$$A=\frac{-iL\exp\{-i[1-\mu(\sigma)]\}}{(KL)^{\mu(\sigma)}}\left\{\frac{\pi B_0(\sigma)}{\mu^{\frac{1}{2}}(\sigma)[-\mu(\sigma)]!}-\frac{2B_1(\sigma)\mu(\sigma)\Gamma[\mu(\sigma)]\sin[3\mu(\sigma)-1]\pi/4}{KL}\right\}, \tag{21}$$

这里 L 为物体的特征长度; $\mu(\sigma)=\frac{\pi}{2\alpha(\sigma)}$,设在$(\tau,y)$平面上通过水线点而与物体表面 s 相切的直线为 $d(\sigma)$,则 $\alpha(\sigma)$ 为直线 $d(\sigma)$ 的指向流体的方向与 τ 的正方向间的夹角; $(-\mu)!=\Gamma(-\mu+1)$; $B_0(\sigma)$, $B_1(\sigma)$ 为与 τ 无关的常数, $B_0(\sigma)$ 与物体表面 S 的整体形状有关,而 $B_1(\sigma)$ 可用 $B_0(\sigma)$ 来表示.

设

$$(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6)=(n_x,n_y,n_z,yn_z-zn_y,zn_x-xn_z,xn_y-yn_x),$$

这里 n_x、n_y、n_z 为 $\boldsymbol{n}$ 在 x、y、z 轴上的投影. 假定 $\phi_\alpha(\alpha=1,2,3,4,5,6)$ 满足

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} = n_\alpha,\ \text{在}\ S\ \text{上;} \tag{22}$$

与方程(1)、(2)、(4)—(6). 设三维物体沿 x 轴、y 轴与 z 轴的平动速度分别为 $V_1\exp(-i\omega t)$、$V_2\exp(-i\omega t)$ 与 $V_3\exp(-i\omega t)$，绕 x 轴、y 轴与 z 轴的转动角速度分别为 $V_4\exp(-i\omega t)$、$V_5\exp(-i\omega t)$ 与 $V_6\exp(-i\omega t)$，则总速度势 ϕ 满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V(x, y, z) = \sum_{\alpha=1}^{6} V_\alpha n_\alpha,\ \text{在}\ S\ \text{上.} \tag{23}$$

由方程(1)、(2)、(22)、(23)、(4)—(6)，可得

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^{6} V_\alpha \phi_\alpha, \tag{24}$$

$\phi_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, 6)$ 满足方程(1)、(2)、(22)、(4)—(6). 对应于渐近展开式(7)式，我们有

$$\phi_\alpha(x, y, z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} K^{-i}\phi_\alpha^{(i)}(x, y, z) + \tilde{\phi}_\alpha(x, y, z), \tag{25}$$

这里 $\phi_\alpha^{(i)}(i = 0, 1, 2, \cdots)$ 满足(8)—(13)式；$\tilde{\phi}_\alpha$ 满足(14)—(19)式. 对应于(20)式中的 A，我们有 A_α 对应于 $\tilde{\phi}_\alpha$. 由文献[2]，附加质量矩阵的元素 $\mu_{\beta\alpha}(\beta = 1, 2, \cdots, 6; \alpha = 1, 2, \cdots, 6)$ 为

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} = \rho \iint_S \mathrm{Re}(\phi_\beta n_\alpha) ds = \rho \iint_S \mathrm{Re}\left(\phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n}\right) ds, \tag{26}$$

注意这里 n 指向流体. 把(25)式代入(26)式，并利用文献[3]对于二维问题的类似的讨论，我们最后可得

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} \sim \rho \mathrm{Re}\left\{\iint_S \phi_\beta^{(0)} \frac{\partial \phi_\alpha^{(0)}}{\partial n} ds + \frac{1}{K}\iint_F \frac{\partial \phi_\beta^{(0)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_\alpha^{(0)}}{\partial y} dx dz\right\}, \tag{27}$$

这里 F 表示积分沿水线 C 外未扰自由表面. 由公式(27)，我们看到附加质量矩阵的元素只和 $\phi_\alpha^{(0)}(\alpha = 1, 2, \cdots, 6)$ 有关，而与 $\tilde{\phi}_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, 6)$ 无关；由(8)—(13)式，我们知道 $\phi_\alpha^{(0)}$ 是位势流问题的解，它们并没有波动性质. 因此，当 $KL \to \infty$ 时，附加质量矩阵只和零级近似的位势流解有关.

由文献[2]，对于辐射阻尼矩阵的元素 $\lambda_{\beta\alpha}(\beta = 1, 2, \cdots, 6; \alpha = 1, 2, \cdots, 6)$，我们有

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha} = \rho\omega \iint_S \mathrm{Im}(\phi_\beta n_\alpha) ds = \rho\omega \iint_S \mathrm{Im}\left(\phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n}\right) ds. \tag{28}$$

由 Green 定理，我们可得以下恒等式：

$$\iint_S \left(\phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} - \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\beta}{\partial n}\right) ds = 0 \tag{29}$$

和

$$\iint_S \left(\phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha^*}{\partial n} - \phi_\alpha^* \frac{\partial \phi_\beta}{\partial n}\right) ds = \iint_{S_\infty} \left(\phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha^*}{\partial R} - \phi_\alpha^* \frac{\partial \phi_\beta}{\partial R}\right) ds, \tag{30}$$

这里“*”表示复数共轭，S_∞ 表示在 $R = \infty$ 处的垂直圆柱面. 由于 $n_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, 6)$ 为实数，因此

$$\frac{\partial \phi_\alpha^*}{\partial n} = n_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, 6),\ \text{在}\ S\ \text{上.} \tag{31}$$

由(28)—(31)式，我们可得

$$\lambda_{\alpha\beta}=\frac{\rho\omega}{2i}\iint_{S}(\phi_{\alpha}n_{\beta}-\phi_{\alpha}^{*}n_{\beta})ds$$

$$=\frac{\rho\omega}{2i}\iint_{S}\left(\phi_{\beta}\frac{\partial\phi_{\alpha}^{*}}{\partial n}-\phi_{\alpha}^{*}\frac{\partial\phi_{\beta}}{\partial n}\right)ds$$

$$=\frac{\rho\omega}{2i}\iint_{S_\infty}\left(\phi_{\beta}\frac{\partial\phi_{\alpha}^{*}}{\partial R}-\phi_{\alpha}^{*}\frac{\partial\phi_{\beta}}{\partial R}\right)ds. \tag{32}$$

利用辐射条件(6)式，则(32)式成为

$$\lambda_{\alpha\beta}=-\rho\omega K\iint_{S_\infty}\phi_{\alpha}^{*}\phi_{\beta}ds. \tag{33}$$

在 $y=0$ 平面上引入极坐标 (R,θ)

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,$$

则沿水线 C 的弧长 $\sigma=\sigma(\theta)$. 由式(20)，我们有

$$\phi_{\alpha}^{*}\sim A_{\alpha}^{*}(\theta)\left(\frac{W}{W+\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-iK\tau-Ky), \tag{34}$$

$$\phi_{\beta}\sim A_{\beta}(\theta)\left(\frac{W}{W+\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(iK\tau-Ky), \tag{35}$$

这里 A_α, A_β 由(21)式中把 B_0, B_1 分别换成 $B_{0\alpha}$, $B_{1\alpha}$ 与 $B_{0\beta}$, $B_{1\beta}$ 而得到. 把(34)、(35)式代入(33)式，可得

$$\lambda_{\alpha\beta}=-\rho\omega K\int_0^\infty\exp(-2Ky)dy\cdot\int_0^{2\pi}A_{\alpha}^{*}(\theta)A_{\beta}(\theta)\frac{W}{W+\tau}Rd\theta. \tag{36}$$

很易证明，对于 C 上任意取定的一点 P, 我们有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\tau}{R}=1. \tag{37}$$

利用(37)式，(36)式成为

$$\lambda_{\alpha\beta}=-\frac{\rho\omega}{2}\int_0^{2\pi}A_{\alpha}^{*}(\theta)\cdot A_{\beta}(\theta)\cdot W(\theta)d\theta. \tag{38}$$

由(21)式，我们可得

$$A_{\alpha}^{*}\cdot A_{\beta}\cdot W=\frac{\pi^2L^2WB_{0\alpha}^{*}B_{0\beta}}{\mu\cdot[(-\mu)!]^2(KL)^{2\mu}}+\frac{4L^2\mu^2\Gamma^2(\mu)\sin^2[(3\mu-1)\pi/4]WB_{1\alpha}^{*}B_{1\beta}}{(KL)^{2\mu+2}}$$

$$+\frac{2\pi L^2\mu\Gamma(\mu)\sin[(3\mu-1)\pi/4]\cdot W}{(KL)^{2\mu+1}\mu^{\frac{1}{2}}(-\mu)!}(B_{0\alpha}^{*}B_{1\beta}+B_{1\alpha}^{*}B_{0\beta}). \tag{39}$$

把(39)式代入(38)式，并令 $\ln(KL)=T$，我们得到

$$\lambda_{\alpha\beta}=-\frac{\rho\omega\pi^2L^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{WB_{\alpha}^{*}B_{0\beta}}{\mu\cdot[(-\mu)!]^2}\exp(-2\mu T)d\theta$$

$$-2\rho\omega L^2\int_0^{2\pi}\mu^2\Gamma^2(\mu)\sin^2[(3\mu-1)\pi/4]\cdot WB_{1\alpha}^{*}B_{1\beta}\exp[-(2\mu+2)T]d\theta$$

$$+\rho\omega\pi L^2\int_0^{2\pi}\frac{\mu\Gamma(\mu)\sin[(3\mu-1)\pi/4]\cdot W(B_{0\alpha}^{*}B_{1\beta}+B_{1\alpha}^{*}B_{0\beta})}{\mu^{\frac{1}{2}}(-\mu)!}$$

$$\cdot \exp[-(2\mu+1)T]d\theta. \tag{40}$$

我们用最陡下降法求积分(40)式当 $KL\to\infty$ 时的渐近值. 假定 $\mu(\theta)$ 有连续的二阶导数,且在 $\theta=\theta_0$ 达最小值,则 $\mu'(\theta_0)=0$, $\mu''(\theta_0)>0$. 由 $\alpha=\frac{\pi}{2\mu}$, 因此 α 在 $\theta=\theta_0$ 达最大值. 当 $KL\to\infty$ 时, $\ln(KL)=T\to\infty$, 因此, 对(40)式用最陡下降法,我们可求得(40)式中各积分的渐近展开的首项:

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\beta}\sim &-\frac{\pi^{\frac{3}{2}}L^2\rho\omega W(\theta_0)B^*_{0\alpha}(\theta_0)B_{0\beta}(\theta_0)}{2\mu_0[(-\mu_0)!]^2[\mu''(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}[\ln(KL)]^{\frac{1}{2}}\cdot(KL)^{2\mu_0}}\\ &-\frac{2\sqrt{\pi}\,L^2\rho\omega\mu_0^2\Gamma^2(\mu_0)\sin^2[(3\mu_0-1)\pi/4]W(\theta_0)B^*_{1\alpha}(\theta_0)B_{1\beta}(\theta_0)}{[\mu''(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}[\ln(KL)]^{\frac{1}{2}}(KL)^{2\mu_0+2}}\\ &+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}L^2\rho\omega\mu_0\Gamma(\mu_0)\sin[(3\mu_0-1)\pi/4]W(\theta_0)[B^*_{0\alpha}(\theta_0)B_{1\beta}(\theta_0)+B^*_{1\alpha}(\theta_0)B_{0\beta}(\theta_0)]}{\mu_0^{1/2}[(-\mu_0)!][\mu''(\theta_0)]^{1/2}[\ln(KL)]^{1/2}(KL)^{2\mu_0+1}},\end{aligned} \tag{41}$$

这里 $\mu_0=\mu(\theta_0)$. 如果 $\mu(\theta)$ 在 $\theta=\theta_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 有相同的最小值,即

$$\mu(\theta_0)=\mu(\theta_1)=\cdots=\mu(\theta_m)=\mu_0,$$

则 $\lambda_{\alpha\beta}(\alpha=1,2,\cdots,6;\ \beta=1,2,\cdots,6)$ 的渐近值为

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\beta}\sim &-\frac{\pi^{5/2}L^2\rho\omega}{2\mu_0[(-\mu_0)!]^2[\ln(KL)]^{1/2}(KL)^{2\mu_0}}\sum_{i=0}^{m}\frac{W(\theta_i)B^*_{0\alpha}(\theta_i)B_{0\beta}(\theta_i)}{[\mu''(\theta_i)]^{1/2}}\\ &-\frac{2\sqrt{\pi}\,L^2\rho\omega\mu_0^2\Gamma^2(\mu_0)\sin^2[(3\mu_0-1)\pi/4]}{[\ln(KL)]^{1/2}(KL)^{2\mu_0+2}}\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{W(\theta_i)B^*_{1\alpha}(\theta_i)B_{1\beta}(\theta_i)}{[\mu''(\theta_i)]^{1/2}}\\ &+\frac{\pi^{3/2}L^2\rho\omega\mu_0\Gamma(\mu_0)\sin[(3\mu_0-1)\pi/4]}{\mu_0^{1/2}[(-\mu_0)!][\ln(KL)]^{1/2}(KL)^{2\mu_0+1}}\cdot\\ &\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{W(\theta_i)[B^*_{0\alpha}(\theta_i)B_{1\beta}(\theta_i)+B^*_{1\alpha}(\theta_i)B_{0\beta}(\theta_i)]}{[\mu''(\theta_i)]^{1/2}}.\end{aligned} \tag{42}$$

这就是辐射阻尼矩阵元素的渐近值.

参 考 文 献

[1] 陈嗣熊,部分浸润三维振荡物体的辐射短表面波,中国科学,A辑,1984,9:812—821.
[2] Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, chap. 7, Wiley-Interscience, New York, 1982.
[3] 陈嗣熊,科学通报,28(1983),17:1039—1042.