

# 论侧向应力与疲劳裂纹扩展

高桦

Miller K. J.

中国科学院力学研究所

英国 Sheffield 大学机械系

**提要** 本文通过对 I 型平裂纹及复合型斜裂纹的疲劳试验说明：虽然平行于裂纹面的正应力（侧向应力）对应力强度因子不起作用，但是对裂纹顶端的塑性变形，从而对疲劳裂纹扩展速率却有明显的影响。相应于同样的应力强度因子幅值，当双轴载荷比  $\lambda = 1$  时，侧向应力为零，裂纹扩展最慢；随着  $\lambda$  值减小，裂纹扩展速率增大。因此，在估算疲劳寿命时，如果只考虑应力强度因子幅值的作用，而忽略实验加载条件和实际加载条件下侧向应力差别的影响，必然会带来较大的误差，甚至是不安全的。

## 一、引言

侧向应力是平行于裂纹面的正应力，它是应力无穷级数的第二项——常数项，对于裂端应力强度因子不起作用，但是，对裂端状态以及裂纹扩展却有影响。近年来在理论<sup>[1-6]</sup>及实验方面<sup>[6-8]</sup>均对侧向应力作了不少研究，可是，至今在应用 Paris 公式估算疲劳寿命时仍未考虑侧向应力的影响，由此可能引起的不安全性亦未受到应有的重视。

按照线弹性断裂力学的规定，只要

$$K_I < \sigma_{ys} \cdot \sqrt{\frac{a}{2.5}} \quad (1)$$

那么弹塑性材料在低载下裂端的状态就可由应力强度因子决定。即裂纹问题可用边界层方法求解；弹塑性裂纹问题的裂端应力场可用弹性应力解无穷级数的奇异项来决定

$$\sigma_{ij} = K_I r^{-1/2} f_{ij}(\theta) \quad (2)$$

然而 Larsson<sup>[1]</sup>和 Rice<sup>[4]</sup>等人均发现，即使在 ASTM 限定的低应力范围内，裂端状态也不能单纯地由  $K_I$  来决定，平行于裂纹面的正应力 (Transverse Stress 记作侧向应力) 非奇异项，对裂端状态尤其是塑性变形有明显的影响。其原因是，在线弹性断裂力学中，把弹塑性问题代之以边界层问题求解，考虑的是无限体中有一半无限裂纹的情况，所以当真实问题的边界载荷被代之以渐近边界条件时，只有当真实边界越远、裂端塑性区越小时，(2) 式的近似性才好。实际上，在弹性情况下，裂端应力场应由如下奇性项及非奇性项来决定

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T_{ij0} + T_{ij\infty}(r) \quad (3)$$

其中  $T_{ij\infty}(r)$  仅在外边界附近才不等于零，即

本文于1983年10月21日收到。

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_{ij\infty}(r) = 0 \quad (4)$$

而  $T_{ij0}$  无论在裂端前方或后方很大范围内均为常数, 此平行于裂纹面的正应力即侧向应力。

侧向应力对应力强度因子不起作用, 在 Paris 公式中

$$\frac{da}{dN} = c(\Delta K)^n \quad (5)$$

也没有考虑侧向应力的影响。但是, 疲劳裂纹的扩展是裂端附近材料反复塑性变形的结果, 裂纹的扩展速率与裂端塑性变形行为直接相关。本文将列举实验结果来说明: 无论在 I 型或复合型加载条件下, 侧向应力对裂端塑性区以及疲劳裂纹扩展均有明显的影响。如果在估算疲劳寿命时任意忽略侧向应力的影响, 必将带来较大的误差和不安全性。建议: 在计算裂端交变塑性区尺寸时计入侧向应力, 并以  $(\Delta r_p^*(\theta^*))$  来估算疲劳裂纹的扩展。

## 二、实验程序\*

试验材料为 316 奥氏体不锈钢和高强度铝合金。316 不锈钢经固溶处理后水冷, 屈服强度为  $25.1\text{kg/mm}^2$ , 断面收缩率 66%; 铝合金经固溶化及时效处理后屈服强度为  $46.41\text{kg/mm}^2$ , 断面收缩率 25%, 它们的化学成分列于表 1。

试件采用十字形中心裂纹平板试样, 详细介绍请阅读文献[9]。试件的工作部分厚  $4\text{mm}$ 、长  $\times$  宽为  $100 \times 100\text{mm}$ 。载荷通过每边十条加载臂均匀地传递到工作部分, 光弹试验表明, 在试件中心  $80 \times 80\text{mm}$  范围内应力场均匀。

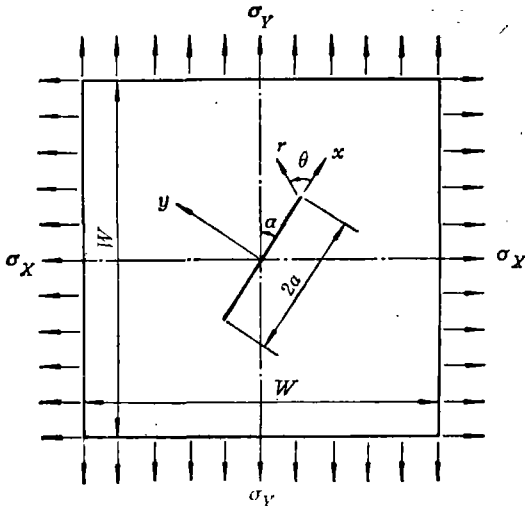


图 1 试件加载示意图

试验在 Mayes200KN 双轴驱动液压伺服疲劳机上进行。该机具有  $x$  轴和  $y$  轴两套独立的加载系统, 其相位差可以自由调节。试验选用闭路载荷控制, 载荷波形为正弦波。图 1 为试件加载示意图。

$$\sigma_y = \sigma_m + \sigma_c \sin(\omega t)$$

$$\sigma_x = \lambda \sigma_m + \lambda \sigma_c \sin(\omega t + \phi)$$

其中

$\sigma_m$ ——平均应力;

$\sigma_c$ ——循环应力幅值;

$\omega$ ——角频率;

$t$ ——时间;

$\lambda$ ——双轴应力比;

$\phi$ ——位相差。

\* 本实验完成于英国雪菲尔德大学断裂研究所疲劳实验室。

表 1 试验材料的化学成分

材 料	成分(重量百分比%)												
	C	Mn	S <sub>i</sub>	S	P	Cr	Ni	Mo	Fe	Cu	Mg	Ti	Al
316不锈钢	0.049	1.36	0.54	0.018	0.023	17.26	11.20	2.15	余	—	—	—	—
铝合金	—	—	—	—	—	—	1.2	—	1	2.5	1.5	0.1	余

试验前,先用电火花切割一条中心对称的、倾斜角为 $\alpha$ 的狭缝(如图1示);然后在 $\lambda=1$ 条件下自狭缝顶端引发疲劳裂纹,并使之沿狭缝方向扩展至 $2a$ 。为了减小予制疲劳裂纹时裂端塑性区对以后试验的影响,予制裂纹采用逐步降载法,并在接近 $(\Delta K_{th})_1$ 的条件下结束疲劳裂纹的予制。裂纹的扩展用电位法和显微镜直接读数法检测,精度不小于0.05mm。

试验时的加载条件如表2所示。选择不同的裂纹倾斜角 $\alpha$ 和不同的双轴载荷比 $\lambda$ 即可得到不同的侧向应力((6)式)

表 2 试验加载条件

编 号	$\alpha$ (°)	$\phi$ (°)	$\lambda$	$\sigma_{Xmax}$	$\sigma_{Xmin}$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{Ymax}$	$\sigma_{Ymin}$	频 率 (Hz)
系列 1: I 型裂纹								
1-1	90	0	0	0	0	9.38	0.1	0.5
1-2	90	0	+1	9.38	0.1	9.38	0.1	0.5
1-3	90	0	-1	-0.1	-9.38	+9.38	0.1	0.5
系列 2: 斜裂纹								
2-1	45	180	-1	-1.25	-6.23	6.23	1.25	10
2-2	45	180	-0.5	-0.63	-3.12	6.23	1.25	10
2-3	22.5	180	-0.17	-0.3	-1.47	8.59	1.72	10
2-4	45	0	0.1	1.16	0.23	11.57	2.3	10

### 三、结果与讨论

1. 考虑侧向应力的影响,在双轴加载条件下(图1),中心斜裂纹顶端附近的应力场用应力无限级数的前两项表示为

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (6)$$

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \sigma_Y (1 - \lambda) \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

在双轴等拉载荷下 ( $\lambda=1$ )，侧向应力为零。随着  $\lambda$  降低，侧向应力的绝对值增大。 $\lambda=-1$  时，侧向应力的影响最大。

按照线弹性断裂力学，如不考虑侧向应力的影响，根据 Von-Mises 屈服准则，在  $K_I$ 、 $K_{II}$  复合型加载情况下，裂纹顶端塑性区尺寸可按下式求得

$$r_p(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{ys}^2} \left\{ K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ (1-2\nu)^2 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + K_I K_{II} \sin \theta [3\cos \theta - (1-2\nu)^2] \right. \\ \left. + K_{II}^2 \left[ 3 + \sin^2 \frac{\theta}{2} ((1-2\nu)^2 - 9\cos^2 \frac{\theta}{2}) \right] \right\} \quad (7)$$

如计入侧向应力的影响，即将(6)式代入 Von-Mises 屈服准则，则有

$$A \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right)^2 + B \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) + D = \sigma_{ys}^2 \quad (8)$$

其中  $A = \left[ \frac{3}{4} \sin^2 \theta + (1-2\nu)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + C [3\sin \theta \cos \theta - (1-2\nu)^2 \sin \theta]$

$$+ C^2 \left[ \frac{4}{3} (1+3\cos^2 \theta) + (1-2\nu)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$B = -T \left\{ \left[ \frac{3}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} - (1-2\nu)^2 \cos \frac{\theta}{2} \right] \right.$$

$$\left. + C \left[ \frac{3}{2} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) + (1-2\nu)^2 \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\}$$

$$C = \frac{K_{II}}{K_I}$$

$$D = T^2 \left[ \frac{3}{4} + \frac{(1-2\nu)^2}{4} \right]$$

$$T = \sigma_Y (1 - \lambda) \cos 2\alpha$$

在循环载荷下，须以  $\Delta K_I$  和  $\Delta K_{II}$  代替  $K_I$  和  $K_{II}$ ；以  $2\sigma_{ys}$  代替  $\sigma_{ys}$ 。如此，解(8)式即可得，考虑了侧向应力影响后的裂端交变塑性区  $\Delta r_p^T(\theta)$ ；解(7)式则得，不考虑侧向应力的裂端交变塑性区  $\Delta r_p(\theta)$ 。

由于侧向应力的影响，裂端塑性区尺寸  $r_p^T(\theta)$  将超过  $r_p(\theta)$  值。图 2 是裂端塑性区尺寸

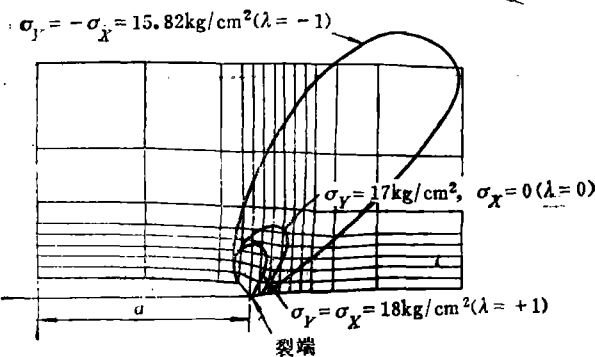


图 2 双轴应力状态对裂端塑性区的影响

与  $\lambda$  关系的弹塑性有限元计算结果<sup>[6]</sup>。由图可见，在双轴等拉  $\lambda=+1$  时，侧向应力为零(见(6)式)，塑性区最小；随着  $\lambda$  降低，塑性区尺寸增大； $\lambda=-1$  时裂端塑性区最大。较大的裂纹顶端塑性变形会导致较高的疲劳裂纹扩展速率。所以，侧向应力必然会影 响疲劳裂纹的扩展。

2. 图 3 为双轴应力状态对

中心切口平裂纹(即  $\alpha = 90^\circ$  的 I 型裂纹)扩展的影响. 图中应力强度因子幅值

$$\Delta K_I = Y \cdot \Delta \sigma_y \sqrt{\pi a} \tag{9}$$

$Y$  为几何因子, 考虑边界修正

$$Y = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}} \tag{10}$$

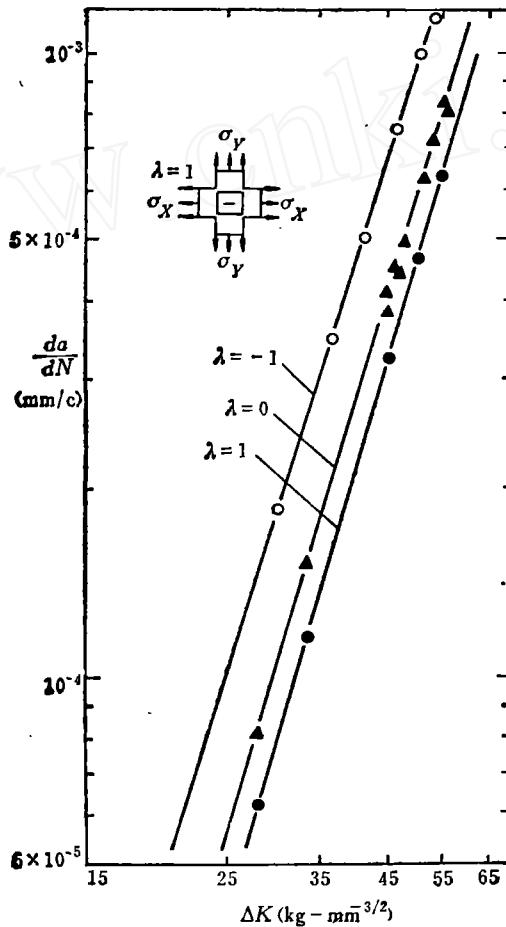


图 3 双轴应力状态对 I 型疲劳裂纹扩展的影响

由图可见, 对应于相同的  $\Delta K_I$  值, 在单轴拉伸( $\lambda = 0$ )载荷下的裂纹扩展速率约比无侧向应力的双轴等拉( $\lambda = +1$ )者快 30%, 而在  $\lambda = -1$  情况下裂纹扩展速率则比双轴等拉者快一倍以上.

3. 图 4 为双轴载荷下斜裂纹扩展速率与  $\Delta r_p(\theta^*)$  的关系.  $\theta^*$  为裂端前方交变塑性区尺寸最大的方向;  $\Delta r_p(\theta^*)$  根据 (7) 式标出, 其中  $K_I$ 、 $K_{II}$  分别以  $\Delta K_I$  和  $\Delta K_{II}$  代之. 由图可见, 依然是  $\lambda = -1$  的裂纹扩展速率最高.

斜裂纹在  $\Delta K_{II}/\Delta K_I$  比值一定的复合型加载条件下扩展, 除了在复合型门槛限附近, 有很小一段沿原来裂纹面方向的扩展以外, 一旦  $(\Delta K_I, \Delta K_{II})$  超过临界值, 即会在

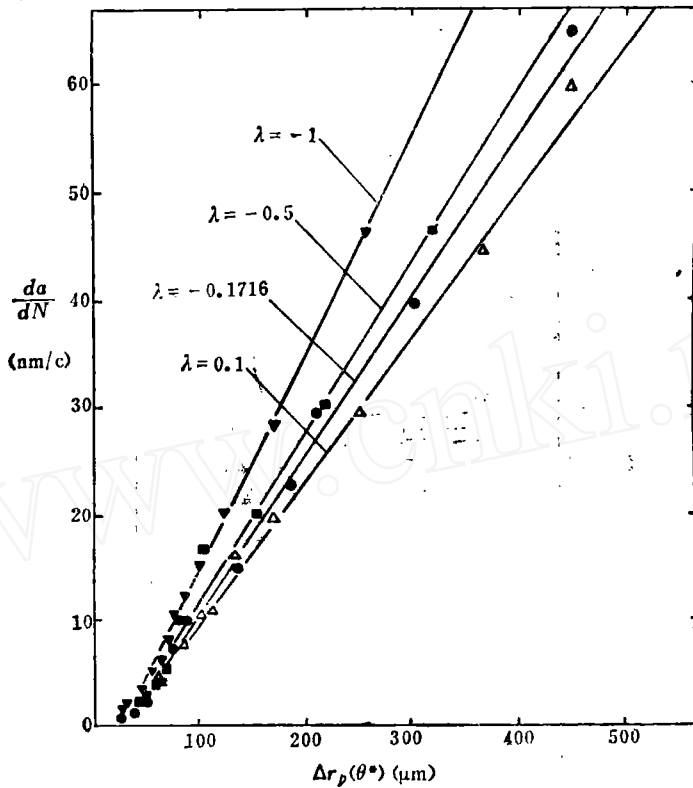


图 4 疲劳裂纹扩展速率与  $\Delta r_p(\theta^*)$  关系 ( $\Delta r_p(\theta^*)$  仅根据应力强度因子计算)

$\Delta K_{I_{max}}$  方向出现分支, 分支不断扩展直至断裂<sup>[10]</sup>. 分支裂纹的扩展总是沿着分支裂端  $\Delta K_{I_{max}}$ 、 $\Delta K_{II} \rightarrow 0$  的方向, 即随着分支的扩展, 裂纹的方向不断地改变, 以致最后发展成为垂直于最大主应力的 I 型裂纹, 如图 5 示.

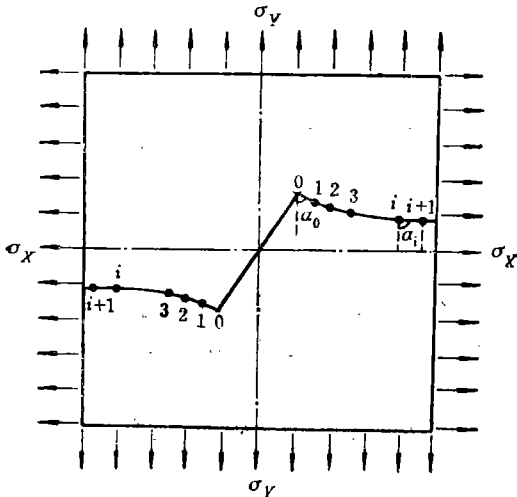


图 5 双轴载荷下斜裂纹的扩展路径

双轴载荷下斜裂纹(图 2)顶端应力强度因子为

$$K_I = (\sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha) Y \cdot \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = (\sigma_y + \sigma_x) (\sin \alpha \cos \alpha) \cdot Y \cdot \sqrt{\pi a} \quad (11)$$

但是一旦出现分支, 分支裂纹顶端的应力强度因子即须用 Chatterjee 方法<sup>[11]</sup> 及有限元法计算. 由此求得  $\Delta K_I$ 、 $\Delta K_{II}$  后代入 (7) 式即可算出相应的  $\Delta r_p(\theta^*)$ . 但是, 由图 4 可见, 仅根据应力强度因子算得的  $\Delta r_p(\theta^*)$ , 它与  $\frac{da}{dN}$  的关系存在系统性的偏离.

由于斜裂纹的扩展方向总是在变, 裂纹与  $\sigma_y$  的夹角从起始时的  $\alpha$  最终变为  $90^\circ$ . 侧向

应力也相应地不断改变,  $\alpha = 90^\circ$  时影响最大。(见(6)式)。所以, 图4中诸曲线的差异亦随着裂纹的扩展 ( $r_p(\theta^*)$  增大) 而增大。

如果在计算裂端交变塑性区尺寸时计入侧向应力的影响, 也即按(8)式计算  $\Delta r_p^T(\theta^*)$ , 则所有的实验数据就都落入了同一分散带, 如图6示。可见图4中诸曲线的系统偏差是由于侧向应力的影响造成的。

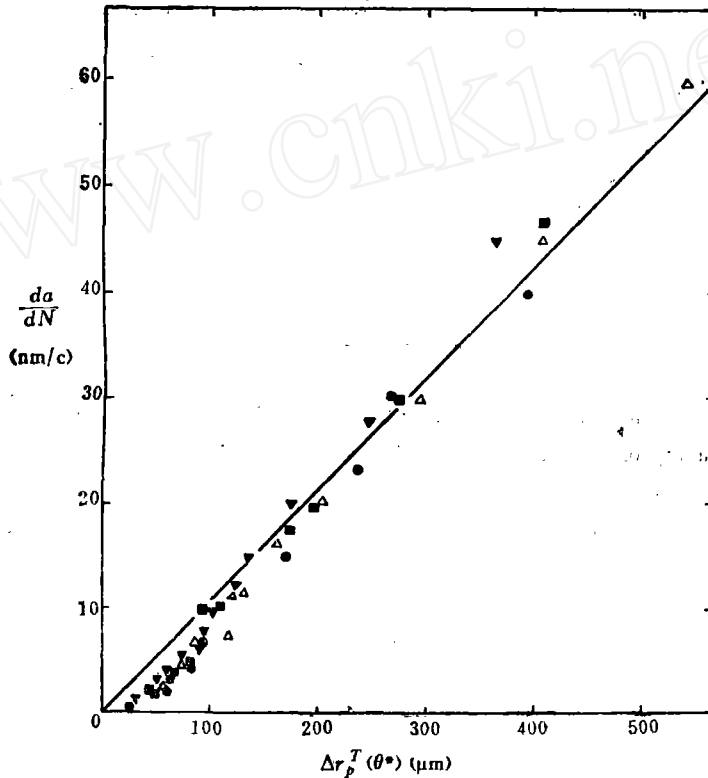


图6 疲劳裂纹扩展速率与  $\Delta r_p^T(\theta^*)$  的关系 ( $\Delta r_p^T$  是考虑了侧向应力影响后的裂端交变塑性区尺寸)

4. 在实际问题中, 由于结构和载荷的复杂性, 裂纹的扩展常常在双轴载荷甚至多轴载荷下进行。然而目前广泛采用的 Paris 公式(式(5))只考虑了应力强度因子的作用, 任意删去了侧向应力的影响。实验已表明, 无论在 I 型或复合型条件下, 即使应力强度因子相等, 如果双轴载荷比不等, 裂纹扩展速率也就不等。  $\lambda = +1$  时裂纹扩展最慢;  $\lambda$  减小, 扩展加速;  $\lambda = -1$  时  $\frac{da}{dN}$  最高。所以, 在估算疲劳寿命时, 如不考虑实验加载条件和实际加载条件下, 由于侧向应力的差别可能对疲劳裂纹扩展带来的影响, 简单地根据三点弯曲或单轴拉伸试验测定的  $c$  和  $n$  值, 代入 Paris 公式进行寿命估算, 必然会带来较大的误差, 甚至不安全因素。

#### 四、结 论

1. 在实际问题中, 即使在 ASTM 限定的低应力范围内, 虽然平行于裂纹面的正应力(侧向应力)对应力强度因子不起作用, 但是它对裂端状态尤其是裂端塑性变形的影响却是不可忽视的。

2. 无论在 I 型或复合型条件下, 疲劳裂纹扩展速率均明显地受侧向应力影响。对应于相同的应力强度因子, 在双轴载荷比  $\lambda=1$ , 即双轴等拉时裂纹扩展最慢, 随着  $\lambda$  减小, 侧向应力绝对值增大, 裂纹扩展加快;  $\lambda=-1$  时, 裂端塑性区最大, 裂纹扩展也最快。

3. 应用 Paris 公式估算疲劳寿命, 只考虑应力强度因子的作用, 不考虑实验加载条件和实际加载条件下侧向应力的差别对疲劳裂纹扩展的影响, 必然会带来较大的误差, 甚至不安全因素。

#### 参 考 文 献

- [1] Larsson S. G. and Carlsson A.J., Influence of Non-Singular stress terms and Specimen Geometry on Small-Scale yielding at Crack tip Elastic-plastic Materials, J. Mech. Phys. Solids, 21(1973), 263.
- [2] Eftis J. and Subramonian N., The Inclined Crack under Biaxial Load, Eng. Fract. Mech, 10(1978), 43.
- [3] Eftis J. Subramonian N. and Liebowitz H., Crack Border Stress and Displacement Equation Revisited, Eng. Fract. Mech., 9(1977), 189.
- [4] Rice J.R., Limitation to the Small Scale yielding Approximation for Crack tip Plasticity, J. Mech, Phys. Solids, 22(1974), 16.
- [5] Miller K.J. and Kfoury A.P., An Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Crack tip Field under Biaxial Loading Conditions, Int. J. of Fract, 10(1974), 393.
- [6] Kibler J.J. and Roberts R., Trans. ASME. J. Engng. Industry, 92B(1970), 727.
- [7] Pook L.P. and Holmes R., Biaxial Fatigue Crack Growth Tests, Int. Conf. Fatigue Testing and Design, Soc. Environmental Engineer, London, 2(1976), 36.
- [8] Miller K.J., Fatigue under Complex stress, Metal Science, 11(1977), 432.
- [9] Brown M.W. and Miller K.J., Mode I Fatigue Crack Growth under Biaxial Stress at Room and Elevated Temperature, Int. Symp. on Biaxial/Multiaxial Fatigue, San Francisco, 1982.
- [10] Gao Hua, Brown M.W. and Miller K.J., Mixed-Mode Fatigue Thresholds, Fatigue of Engineering Materials and structures, 5(1982), 1.
- [11] Chatterjee S. N., The Stress Field in the Neighbourhood of a Branch Crack in an Infinite Elastic Sheet, Int. J. Solids struct., 11(1975), 521.



## EFFECT OF TRANSVERSE STRESS ON FATIGUE CRACK GROWTH

Gao Hua

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, China)*

Miller K. J.

*(Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield, England)*

### Abstract

According to the fatigue experiment results, for either mode I or mixed mode loading, it is shown that although the transverse stress plays no role in stress intensity factors, its effect on crack tip plasticity and hence the fatigue crack growth, is not to be overlooked. Corresponding to the same stress intensity factor range as the biaxial load ratio  $\lambda=1$ , i.e., T-stress equals zero, the crack growth rate is the lowest, while it becomes faster if the biaxial load ratio decreases. Therefore, for fatigue life assessment, if only the stress intensity factor range is taken into account without paying attention to the T-stress differences between the laboratory testing and the actual loading conditions, a large amount of errors and even unsafety may be induced.