第六卷 太原重型机械学院学报 No. 2
第二期 JOURNAL OF TAIYUAN HEAVY MACHINERY INSTITUTE 1985

Reissner型中厚板弯曲理论中的守恒积分

柳春图 胡海昌（学部委员）
（中国科学院力学研究所）

摘 要

基于虚功原理导出受弯，中等厚度的，Reissner型板的，与路径无关的J_R积分。该积分可作为通常二维J积分的一般情形。在线弹性情形下，还得到了J_R与弯曲板应力强度因子K之间的简单关系式。当横向剪切刚度趋于无穷大，则J_R变为经典薄板的J积分。

一、引 言

自从Rice[1]在平面问题中提出J积分以后，近年来已经有了广泛的应用，特别是在探讨弹塑性断裂理论方面起了较大的作用，在工程界板是常用的一种重要元件，随着断裂力学研究的不断深入，板的断裂分析也日益受到广泛的注意，鉴于J积分对平面问题富有成效，把类似的守恒积分推广到板的问题中来，也将是一项重要的工作，由于在板的断裂分析中，克希霍夫经典薄板理论有着重大缺陷，因此本文考虑Reissner[2]型中厚板弯曲理论。本文从虚功原理出发给出了一个与路线无关的积分J_R，在线弹性的情况下，可以求出J_R与板的弯曲应力强度因子K_B的简单关系。在特殊情况下，此式可以退化为薄板经典理论中的J积分。本文给出的守恒积分在板的弹塑性理论中，可能会有重要的作用。在工程断裂的近似计算中，将会发挥较好的效果。

二、J_R的积分式和证明

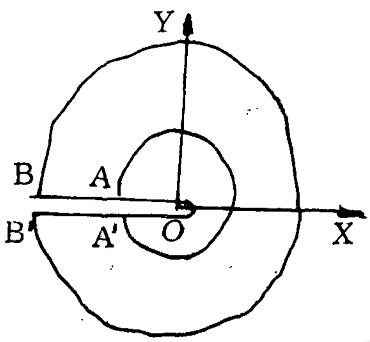
在Reissner型中厚板的理论中，虚功原理[3]为

$$-\iint_{\Omega}\left[M_x\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+M_{xy}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)+M_y\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right]dxdy+$$

$$+\iint_{\Omega}\left[Q_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi_x\right)+Q_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\phi_y\right)\right]dxdy=\iint_{\Omega}(m_x\phi_x+m_y\phi_y+$$

$$+Pw)dxdy+\int_C(Q_n w-M_n\phi_n-M_{ns}\phi_S)dS \qquad (1)$$

其中内力M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y应与外载荷保持平衡，即应满足平衡方程，而广义位移ϕ_x、ϕ_y、w只要连续、一次可导即行。广义位移和广义力之间可以没有任何联系，Ω是板内的任一区域，C为Ω的边界。



取笛卡尔坐标如图所示，原点在裂纹顶端，x轴平行裂纹而指向物体内，板在边界上受力而产生弯曲，即设

$$m_x=m_y=P=0$$

在裂纹面上：

$$M_y=0,\ M_{xy}=0,\ Q_y=0 \qquad (2)$$

设问题的解是ϕ_x，ϕ_y，w，M_x，M_y，M_{xy}，Q_x，Q_y。

下列广义位移

$$\phi_x^K=\frac{\partial\phi_x}{\partial x},\quad \phi_y^K=\frac{\partial\phi_y}{\partial y},\quad w^K=\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (3)$$

是一种连续的位移，所以根据公式（1）有

$$\iint_{\Omega}\left[-M_x\frac{\partial\phi_x^K}{\partial x}-M_{xy}\left(\frac{\partial\phi_x^K}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y^K}{\partial x}\right)-M_y\frac{\partial\phi_y^K}{\partial y}+Q_x\left(\frac{\partial w^K}{\partial x}-\phi_x^K\right)+\right.$$

$$\left.+Q_y\left(\frac{\partial w^K}{\partial y}-\phi_y^K\right)\right]dxdy=\int_C(Q_n w^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS \qquad (4)$$

这里Ω是板内的任一区域，C为Ω的边界，现在取C为图中所示的$A'B'BAA'$，因为$A'B'$与BA为不受力的自由边，所以（4）式的右端化为

$$右端=\int_{B'}^{B}(Q_n w^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS+\int_{A}^{A'}(Q_n w^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS$$

$$=\int_{B'}^{B}(Q_n w^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS-\int_{A'}^{A}(Q_n w^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS \qquad (5)$$

又根据（3）式，有

$$-M_x\frac{\partial\phi_x^K}{\partial x}-M_{xy}\left(\frac{\partial\phi_x^K}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y^K}{\partial x}\right)-M_y\frac{\partial\phi_y^K}{\partial y}+Q_x\left(\frac{\partial w^K}{\partial x}-\phi_x^K\right)+Q_y\left(\frac{\partial w^K}{\partial y}-\phi_y^K\right)$$

$$=\frac{\partial U'}{\partial K_x}\cdot\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial U'}{\partial K_{xy}}\cdot\frac{\partial K_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial U'}{\partial K_y}\cdot\frac{\partial K_y}{\partial x}+\frac{\partial U''}{\partial \gamma_x}\cdot\frac{\partial \gamma_x}{\partial x_y}+\frac{\partial U''}{\partial \gamma_y}\cdot\frac{\partial \gamma_y}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(U'+U'')=\frac{\partial U}{\partial x}\tag{6}$$

式中U为应变能密度，U'为弯曲应变能密度，U''为剪切应变能密度，广义应变K_x，K_y，K_{xy}，γ_x，γ_y分别为

$$K_x=-\frac{\partial\phi_x}{\partial x},\quad K_y=-\frac{\partial\phi_y}{\partial y},\quad K_{xy}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_x=\frac{\partial w}{\partial x}-\phi_x,\quad \gamma_y=\frac{\partial w}{\partial y}-\phi_y\tag{7}$$

因此，（4）式的左端为

$$\text{左端}=\iint_{\Omega}\frac{\partial U}{\partial x}dxdy=\int_C lUdS=\int_{B'}^{B}lUdS-\int_{A'}^{A}lUdS\tag{8}$$

从（6），（8）两式得到

$$\int_{B'}^{B}lUdS-\int_{B'}^{B}(Q_nw^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS$$

$$=\int_{A'}^{A}lUdS-\int_{A'}^{A}(Q_nw^K-M_n\phi_n^K-M_{ns}\phi_S^K)dS\tag{9}$$

此式表示上列积分与路径无关，把它记为J_R，则有

$$J_R=\int_C(lU-Q_nw^K+M_n\phi_n^K+M_{ns}\phi_S^K)dS$$

即
$$J_R=\int_C\left(lU-Q_n\frac{\partial w}{\partial x}+M_n\frac{\partial\phi_n}{\partial x}+M_{ns}\frac{\partial\phi_S}{\partial x}\right)dS\tag{10}$$

与路径无关，只要C为由裂纹下面绕端点到正面一圈。

三、J_R与弯曲应力强度因子K_B关系

在Reissner型理论中，裂纹顶端内力和位移的首项为

$$M_x=\frac{h^2}{6}\left[\frac{K_{B\,\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{K_{B\,\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$M_y=\frac{h^2}{6}\left[\frac{K_{B\,\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{K_{B\,\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$M_{xy}=\frac{h^2}{6}\left[\frac{K_{B\,\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\frac{K_{B\,\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$Q_x = -\frac{2h}{3}\cdot\frac{K_{B\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{11}$$

$$Q_y = \frac{2h}{3}\cdot\frac{K_{B\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\phi_x = -\frac{K_{B\mathrm{I}}}{2Gh}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\left[(2K-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right]-\frac{K_{B\mathrm{II}}}{2Gh}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\left[(2K+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\phi_y = -\frac{K_{B\mathrm{I}}}{2Gh}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\left[(2K+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right]-\frac{K_{B\mathrm{II}}}{2Gh}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\left[-(2K-3)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$w = \frac{8K_{B\mathrm{III}}}{5G}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}$$

其中　　$K = \frac{3-\nu}{1-\nu}$

当(10)式中的C取得十分靠近裂纹顶端时，内力和位移便足够精确地用(11)式来表示。

将(11)式代入(10)式，算出积分，便可把J_R与$K_{B\mathrm{I}}$，$K_{B\mathrm{II}}$，$K_{B\mathrm{III}}$联系起来，经一些运算后，可得

$$\int_C U\,dS = \frac{h(1-\nu)}{12E}(K_{B\mathrm{I}}^2 - K_{B\mathrm{II}}^2)$$

$$\int_C\left(-Q_n\frac{\partial w}{\partial x}+M_n\frac{\partial \phi_n}{\partial x}+M_n\frac{\partial \phi_S}{\partial x}\right)dS = \frac{hK_{B\mathrm{I}}^2}{12E}(3+\nu)+\frac{hK_{B\mathrm{II}}^2}{12E}(5-\nu)+\frac{4h}{15G}K_{B\mathrm{III}}^2$$

则

$$J_R = \frac{h}{3E}(K_{B\mathrm{I}}^2 + K_{B\mathrm{II}}^2)+\frac{4h}{15G}K_{B\mathrm{III}}^2 \tag{12}$$

当考虑经典板的情况，即

$$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n}\ ,\quad \phi_S = \frac{\partial w}{\partial S} \tag{13}$$

这时，

$$J=\int_C\left[lU+\left(-Q_n\frac{\partial w}{\partial x}-M_n\frac{\partial\phi_n}{\partial x}+M_{ns}\frac{\partial\phi_S}{\partial x}\right)\right]dS$$

$$=\int_C\left[lU+\left(-Q_n\frac{\partial w}{\partial x}-M_n\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial x}+M_{nS}\frac{\partial^2 w}{\partial S\partial x}\right)\right]dS$$

$$=\int_C\left[lU+\left(-Q_n\frac{\partial w}{\partial x}-M_n\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial x}-\frac{\partial M_{nS}}{\partial S}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]dS$$

$$=\int_C\left\{lU+\left[-\left(Q_n+\frac{\partial M_{nS}}{\partial S}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+M_n\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial x}\right\}dS \qquad (14)$$

(14)式为经典薄板理论的守恒积分形式。

参 考 文 献

[1] Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, J. Appl. Mech. 1968 , 379-386.

[2] Reissner, E., On bending of elastic plates, Quarterly of Applied Mathematics, 5 1947 55-68.

[3] 胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社，1981.

收稿日期85年9月9日

A Conservative Integral for Reissner Type Moderate Thick Plate in Bending

Liu Chuntu Hu Haichang

ABSTRACT

Based on the virtual work principle, a path-independent integral J_R for the Reissner type moderate thick plate in bending is obtained. It can be regarded as a generalization of the conventional 2D J integral. In the linear elastic case a simple relationship between J_R and the bending stress intensity factor K is also obtained. When transverse shear stiffness tend to infinity, J_R is reduced to the J integral for the classical thin plate.