

研究简报

涡方法中的粘性效应

徐大鹏

(中国科学院力学研究所)

1984年12月17日收到

摘要

涡方法中粘性效应可通过涡的随机移动或改变涡核尺寸两种途径并入。本文侧重讨论后者。用改变涡核尺寸并入粘性的方法计算了Blasius平板问题，并与Blasius解做了比较。

一、引言

在高雷诺数情形下，用有限差分的方法数值求解Navier—Stokes方程往往受到限制。^[1]而采用涡方法，即将涡量函数离散为N个具有一定内部结构，涡核尺寸为 σ 的离散涡，涡的运动由其相互间的诱导速度确定、粘性效应以适当的方法并入，则可以模拟高雷诺数的流动问题。

涡核的内部结构可以千差万别，但粘性效应的并入只有两种方法，即涡的随机移动(randomwalk)和改变涡核尺寸(Vortex aging)方法。^{[2][3]}

用涡的随机移动模拟粘性扩散的思想首先是Moore, D. W. 在1969年给Saffman, P. G. 的信中提出来的。Saffman曾用少量的涡做了试算，结果很糟，就放弃了这一方法的研究。^[4]Chorin(1973)^[5]用这一方法计算了圆柱绕流问题，得到了令人满意的结果。此后，Milinnazzo和Saffman(1978)^[4]重新研究了这一方法，发现要得到较准确的结果，离散涡的数目就要与雷诺数同量级。显然，这在高雷诺数情形下，计算工作量是相当可观的。这以后，许多人在不同程度上对该方法进行了推广使用和改进。^{[6][7][8][9]}

相形之下，用改变涡核尺寸并入粘性的方法还不为人们所重视。迄今，除Leonard^[2]对该方法做了较详尽的叙述外，仅Kuwahara(1973)^[10]和Ashurst(1977)^[11]用该方法计算了较简单的，不涉及边界的流动问题。其中Kuwahara的计算并入的是人工粘性，并非真实粘性。在有边界的情形下，该方法是否适用？此外，用涡的随机移动模拟粘性效应具有统计性质，因此，要获得较准确的结果，就要求离散涡的数目很大；而用改变涡核尺寸模拟粘性效应不具有这种统计性质，那么，能否用较少数目的涡，获得较准确的结果呢！

本文将把用改变涡核尺寸模拟粘性效应的方法用于Blasius平板问题，并通过与Blasius解的比较，讨论以上提出的问题。

二、方法概述

二维，不可压缩流的Navier—Stokes方程可以写为：

$$\xi_t + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \xi = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi \quad (2.1a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (2.1b)$$

$$\underline{u} = (\psi_y, -\psi_x) \quad (2.1c)$$

式中 \underline{u} 为速度矢量, $\xi = \text{Curl } \underline{u}$ 为涡量, ψ 为流函数, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子, R 为雷诺数, $\underline{\nabla} = \underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y}$ 。

首先, 我们考虑无粘部分, 这时方程 (2.1) 式化为:

$$\xi_t + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \xi = 0 \quad (2.2a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (2.2b)$$

$$\underline{u} = (\psi_y, -\psi_x) \quad (2.2c)$$

(2.2) 式说明涡量守恒, 即 $\xi(\underline{x}, t) = \xi(\underline{x}, 0)$ 。将初始涡量用 N 个具有一定内部结构的高散涡表示, 即:

$$\xi(\underline{x}, t=0) = \sum_{i=1}^N \xi_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \gamma_i(\underline{x} - \underline{x}_i) \quad (2.3)$$

式中 $\Gamma_i = \int \xi_i d\underline{x}$ 为环量, γ_i 为涡量分布函数, 满足 $\int_0^\infty \gamma_i(\underline{x}) d\underline{x} = 1$ 。则时刻 t 时涡的位置为:

$$\frac{d\underline{x}_i}{dt} = \underline{u}_i$$

这里 $\underline{x} = (x, y)$ 为位置矢量。上式右端的速度矢量 \underline{u}_i 是涡相互间的诱导速度。

涡量分布函数 γ 的取法很多, 我们这里取高斯分布:

$$\gamma(\underline{x}) = \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp(-|\underline{x}|^2 / \sigma^2) \quad (2.5)$$

这时, 可以求得:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{x}_i}{dt} &= \underline{u}(\underline{x}, t) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{(\underline{x}_i - \underline{x}_j) \times \hat{l}_z \cdot \Gamma_j (1 - \exp(-|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2 / \sigma_j^2))}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

\hat{l}_z 为垂直于 x, y 方向的单位矢量。

其次, 我们未考虑 (2.1) 式的粘性部分:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi \quad (2.7)$$

将 (2.3)、(2.5) 式代入上式得到:

$$\frac{d\sigma_i^2}{dt} = \frac{4}{R} \quad (2.8)$$

这就是涡量分布函数满足涡量扩散方程所需要的条件, 这一条件要求涡核尺寸 σ^2 随时间线性增长。

以上两步相当于用时间分裂法求解涡量对流扩散方程。第一步, 涡的对流运动由涡之间的诱导速度确定((2.6)式), 第二步, 涡的扩散用随时间增长涡核尺寸来模拟((2.8)式)。

三、边界条件的处理

如果流体中有物体出现, 或流动限制在某一固体边界内, 这时, 流体在边界上应满足条件:

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{\tau} = 0 \quad (3.1b)$$

式中 \underline{n} , $\underline{\tau}$, 分别为法向和切向单位矢量。

在处理无粘部分过程中, 当有边界出现时, 往往法向边界条件并不满足, 这时 $\underline{u} \cdot \underline{n} = v_n$, 要满足边界条件(3.1a), 可以采用两种办法, 其一是迭加一个在边界上满足 $\underline{u} \cdot \underline{n} = -v_n$ 的势流解, 其二是引入映像涡。在边界较简单的情形下, 宜选用后者。以Blasius平板为例, 假设上半平面 $Z = x + iy$ 处有一强度为 Γ 的涡, 为满足法向边界条件, 需要在下半平面 $Z = x - iy$ 处引入一强度为 $-\Gamma$ 的映像涡。

固壁上的无滑移条件, 即切向边界条件式(3.1b), 可以通过在壁面生成新涡的方法来满足。设边界长为 L , 将其等分为 M 段, 每段长为 $H = L/M$, 生成涡的强度应为 $\Gamma = \frac{U_w \cdot H}{\alpha + 1}$, α 是满足法向边界条件每个涡所需要的映像涡数目, U_w 为壁面切向速度。

一旦某个位于 (x_i, y_i) 的涡的中心到壁面的距离很小, 即:

$$r = y_i \ll \sigma$$

则我们将其除去, 或采用Teng^[8]所建议的方法, 当涡穿过边界时, 将其反弹回流体。亦即令:

$$y_i = -y_i$$

$$\Gamma_i = -\Gamma_i$$

四、Blasius平板解

置平板于 $y = 0$ 的 x 轴上, 考虑上半平面的流动。为了满足法向边界条件, 需要在下半平面引入映像涡。这时, 设来流速度为 $U_\infty = 1$, 则控制涡对流运动的方程为:

$$\frac{dx_i}{dt} = u^x(x_i, t) = \dot{L}_x - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \times \dot{L}_j \cdot \Gamma_j \cdot (1 - \exp(-|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2/\sigma_j^2)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \times \dot{L}_j \cdot \Gamma_j \cdot (1 - \exp(-|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^2/\sigma_j^2)) \quad (4.1)$$

式中 \hat{i}_x 为 x 方向的单位矢量, \underline{x}_j 表示 x_j 的映像位置, 即:

$$\underline{x}_j = (x_j, -y_j), \quad \underline{x}_j = (x_j, y_j)$$

我们用如下差分公式求解(4.1)式:

$$\underline{x}^{n+1} = \underline{x}^n + \Delta t \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (4.2)$$

按下式改变涡核尺寸, 模拟粘性效应:

$$\sigma_j^{n+1} = \sqrt{(\sigma_j^n)^2 + \frac{4\Delta t}{R}} \quad (4.3)$$

为了满足切向边界条件, 生成涡的强度取为 $\Gamma = \frac{U_\infty \cdot H}{2}$ 。下游边界条件的提法(参见 Teng^[8])为: 若某个涡的 x 坐标超过两倍平板长, 即:

$$x_i > 2L$$

则将该涡从流场中消除。若某个涡的 x 坐标大于平板长、但小于两倍平板长, 即:

$$L < x_i < 2L$$

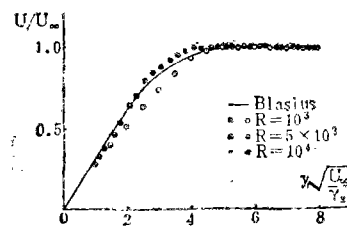
则用下式替换(4.1)式:

$$\frac{d \underline{x}_i}{dt} = \underline{u}(\underline{x}_i, t)$$

五、结果和讨论

取平板长 $L = 1$, 在平板长 $x = 0.5$ 处计算速度剖面。图中我们给出了雷诺数 $R = 10^3$, 5×10^3 , 10^4 的计算结果与 Blasius 解的比较。计算中的一些参数我们列到了表中, 表中终止时刻最大误差的定义为:

$$\max |u_j^k - u_j^{k-1}| \quad j = 1, 2, \dots, JN$$



平板速度剖面

计算中的一些参数

雷诺数 R	时间步长 Δt	边界分段 数 M	终止时刻 $T = K \Delta t$	终止时刻 涡的数目	终止时刻 最大误差
10^3	0.2	10	2	77	0.00340
5×10^3	0.05	5	2	116	0.01328
10^4	0.04	5	2	178	0.01912

若我们取精度为0.02, 那么, 可以认为, 当 $T = 2$ 时, 计算已满足收敛条件。

计算结果表明, 用改变涡核尺寸并入粘性的方法可以用于涉及边界的流动问题, 用数目不多的涡就可以模拟较高雷诺数的流动问题。

参 考 文 献

- [1] C. K. Chu, *Advances in Applied Mathematics*, 18(1978).
- [2] A. Leonard, *J. Comput. Phys.*, 37(1980), 289—335.
- [3] Maull, D. J., *Proceedings of 1979 IAHR/IUTAM Symposium on Practical Experiences with Flow Induced Vibration* Edited by E. Naudascher and D. Rockwell, *Spring-Verlag Berlin*(1980), 769—785.
- [4] F. Milinazzo and P. G. Saffman, *J. Comput. Phys.*, 23(1977), 380—392.
- [5] Chorin A. J., *J. Fluid Meth.* 57(1973), 785—796.
- [6] Chorin A. J. *J. Comput. Phys.* 27(1978), 428—442.
- [7] A. Y. Cheer, "Vortex Flow"(1980), 141—154.
- [8] Teng Zhen-Huav, *J. Comput. Phys.* 46(1982), 51.
- [9] T. Hanson, D. M. Summers and C. B. Wilson, *Numerical Method in Fluid*, 4(1)(1984), 25—41.
- [10] Kuwahara, W. and Takami, H., *J. Phys. Soc. Japan*, 34(1973), 247—253.
- [11] Ashurst, W. T., *Proc. Conf. Tuyn. Shear Flows I*(1977).

THE VISCOUS EFFECT IN THE VORTEX METHOD

Xu Da-Peng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science)

Abstract

In the vortex method, the viscous effect can be incorporated by either random walk of the vortex or vortex aging. In this paper particular attention is paid to the latter, and the latter is applied to Blasius flat plate problem. Comparison with Blasius's solution is made.