

简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 的几个精确解

高 智

(中国科学院力学研究所)

提要 对不可压二维驻点流、三维驻点流和旋转圆盘附近的流动等三种流动情况,本文给出简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 及其精确解。表明:文献[1]理论的 SNSE 的精确解,在三种流动情况下均与完全 Navier-Stokes 方程组 (NSE) 的精确解完全一致;文献[3] SNSE 的精确解的速度解与完全 NSE 精确解的速度解一致,但压力解在三种流动情况下均与完全 NSE 精确解的压力解不同。文献[3] SNSE 精确解给出的压力分布相对与完全 NSE 精确解给出的压力分布的最大相对误差为 100%。

一、引言

近年来,利用简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE)^[1-3] 或称抛物化 Navier-Stokes 方程组 (PNSE)^[4-7] 求解流场的研究引起了人们的很大关注和兴趣。SNSE 或 PNSE 具有“抛物”方程组的特性,对定常流动的计算可沿主流方向、作为初边值问题向下游推进;因而求解 SNSE 的运算和存储量要比求解完全 NSE 的运算和存储量少得多。

按照文献[1],SNSE 是指在完全 NSE 中略去按照边界层观点估计的数量级等于和小于 $O(Re^{-1})$ 量级的项后得到的方程组,这里 Re 为特征雷诺数, $Re \gg 1$; 文献[1]也论证了求解这样的 SNSE、将获得在全流场范围内精确度为 $O(Re^{-1/2})$ 量级的均匀一致解。文献[2]以球超声速绕流的驻点流动为例,把四种形式的 SNSE 的数值结果作了比较,这四种形式的方程组是: 1, 在完全 NSE 中略去数量级等于和小于 $O(Re^{-1})$ 量级的项、即保留到 $O(Re^{-1/2})$ 量级项的方程组; 2, 在方程组 1 中略去法向动量方程中的粘性项后得到的方程组、即 Davis 首先使用的方程组^[3]; 3, 保留到 $O(1)$ 量级项的方程组、即粘性层方程组^[7]; 4, 完全 NSE。文献[2]的数值比较表明,保留到 $O(Re^{-1/2})$ 量级项的方程组和 Davis 方程组^[3]均能够很好地近似完全 NSE 的解。

应该指出,SNSE 或 PNSE 理论的前提是流场中存在主流方向,故从理论上讲,SNSE 和 PNSE 对驻点流动区域不是严格适用的。由此可见,继续研究 SNSE 的数学性质^[8-10],利用 SNSE 计算超出它的理论适用范围的各种类型的流场、探讨这样做的力学依据和能够达到的计算精确度,研究 SNSE 的合理形式等,都具有理论和实际的意义。

本文对不可压二维驻点流(即 Hiemenz 流动)、三维驻点流动和旋转圆盘附近的流动

本文于 1984 年 5 月 5 日收到。

等三种流动情况, 给出不同形式的 SNSE 的精确解并把它们与完全 NSE 的精确解加以比较.

二、Hiemenz 流动

对于不可压二维驻点流动即 Hiemenz 流动^[1], 流体沿负 y 轴方向流向位于 $y = 0$ 处的固壁表面, 并以驻点线 ($x = 0$) 为中心沿壁面流向正和负 x 轴方向. 对这种流动情况, 我们取 $x = O(1)$ 流动区为参考态, 由于驻点无粘位势流为 $U = ax$, $V = -ay$, 这里 a 为常数, 故取特征雷诺数为 $Re = \frac{a}{\nu}$, 并有如下的数量级关系

$$\begin{aligned} x &= O(1), & y &= O(Re^{-1/2}) \\ u &= O(a) & v &= O(aRe^{-1/2}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

按照文献 [1], 在二维完全 NSE 中略去数量级小于和等于 $O(Re^{-1})$ 量级的项后, 得到 SNSE 如下:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

其中 u 为 x 轴向流速分量, v 为 y 轴向流速分量, p 压力, ρ 密度, ν 动粘性系数. 方程 (2.3) 中惯性诸项以及 $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 均为 $O(Re^{-1/2})$ 量级的项. 若在方程 (2.3) 中略去粘性项 $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, 方程组 (2.2)–(2.4) 便化为文献 [3] 采用的 SNSE, 为书写方便, 把文献 [3] 形式的 SNSE 记作 D-SNSE.

我们利用 SNSE (2.2)–(2.4) 及其相应的 D-SNSE 求解 Hiemenz 流动. 二维驻点附近无粘位势流动解为:

$$U = ax, \quad V = -ay \quad (2.5)$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^2 (x^2 + y^2) \quad (2.6)$$

其中 p_0 为驻点压力. 对于粘性流动, 假设

$$u = x \frac{df(y)}{dy}, \quad v = -f(y) \quad (2.7)$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^2 [x^2 + F(y)] \quad (2.8)$$

把 (2.7) 和 (2.8) 式代入 (2.2) 和 (2.3), 并作如下的变换:

$$\eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2} y, \quad f(y) = (a\nu)^{1/2} \phi(\eta), \quad F(y) = \frac{\nu}{a} \Phi(\eta) \quad (2.9)$$

于是得到:

$$\frac{d^3\phi}{d\eta^3} + \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d^2\phi}{d\eta^2} - \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 + 1 = 0 \quad (2.10)$$

$$2 \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + 2\phi \frac{d\phi}{d\eta} - \frac{d\Phi}{d\eta} = 0 \quad (2.11)$$

对应于 SNSE(2.2)—(2.4) 的 D-SNSE 的 ϕ 方程仍为(2.10), Φ 的方程则应改变为

$$2\phi \frac{d\phi}{d\eta} - \frac{d\Phi_d}{d\eta} = 0 \quad (2.12)$$

边界条件为

$$\eta = 0 \quad \phi = 0, \quad \frac{d\phi}{d\eta} = 0, \quad \Phi = \Phi_d = 0 \quad (2.13)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \frac{d\phi}{d\eta} = 1 \quad (2.14)$$

因此得到结论: i) SNSE(2.2)—(2.4) 的精确解与完全 NSE 的精确解^[11]完全一致, 这是一个耐人寻味的结果, SNSE 理论的适用范围本来不包括驻点流动, SNSE(2.2)—(2.4) 的精确解与完全 NSE 的精确解完全一致的道理, 可从驻点附近流体微体积元的受力状态得到解释: 作用在微体积元上指向为 x 轴方向的应力合力分量中的粘性拉应力 $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

和指向为 y 轴方向的应力合力分量中的粘性剪应力 $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 在微体积元的动力学平衡中不起作用, 这里 $\mu = \rho\nu$, 而 SNSE(2.2)—(2.4) 中略去了 $O(\text{Re}^{-1})$ 和更小量级项的处理恰与这一力学事实相符合. 可见, SNSE 实际适用的流场范围超出了它的理论应用范围.

ii) D-SNSE 精确解的 ϕ 解与完全 NSE 精确解的 ϕ 解^[11]一致; 但 D-SNSE 精确解的 Φ_d 解则与完全 NSE 精确解的 Φ 解不同. 因而 D-SNSE 给出的压力分布 p_d 与精确压力分布 p 不同, p_d 相对于 p 的偏差为

$$\frac{p_d - p}{p_0 - p} = - \frac{2 \frac{\nu}{a} \frac{d\phi}{d\eta}}{x^2 + \frac{\nu}{a} \Phi(\eta)} \quad (2.15)$$

图 1 给出 $\left(\frac{p_d - p}{p_0 - p}\right)_{x=0}$ 随 η 变化的关系曲线. 表 1 给出 $\frac{d\phi}{d\eta}$ 、 $\Phi(\eta)$ 和 $\Phi_d(\eta)$ 的具体数值, 其中 $\frac{d\phi}{d\eta}$ 引自专著^[11]. 可见在 $x = 0, y \rightarrow 0$ 时, $(p_d - p)/(p_0 - p) = 1$ 即相对最大偏差为 100%; 而在粘性区外缘 $\left(\eta_\delta = 2.4, \frac{u}{U} = \frac{d\phi}{d\eta} = 0.99\right)$, p_d 与 p 的相对偏差仍达 40%; 精确压力 p 在粘性层内的绝对变化在 $x = 0$ 时为

$$(p_0 - p)_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} a \mu \Phi_\infty = \frac{1}{2} \rho a \nu \Phi_\infty \quad (2.16)$$

当 $\eta \gg 1$ 时, $\Phi(\eta) = O(10^4)$

表 1 二维和三维驻点流动, SNSE 和 D-SNSE 精确解中的 ϕ' 、 Φ 和 Φ_d

$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}$ 或 $\zeta = x \sqrt{\frac{a}{\nu}}$	$\phi' = \frac{d\phi}{d\eta}$	$\Phi_d(\eta)$	$\Phi(\eta)$	$\phi' = \frac{d\phi}{d\zeta}$	$\Phi_d(\zeta)$	$\Phi(\zeta)$
0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.2266	0.00054	0.4537	0.1755	0.00016	0.1757
0.4	0.4145	0.0078	0.8368	0.3311	0.0024	0.3335
0.6	0.5663	0.0349	1.1675	0.4669	0.0111	0.4780
0.8	0.6859	0.0976	1.4694	0.5833	0.0324	0.6157
1.0	0.7779	0.2106	1.7667	0.6811	0.0726	0.7537
1.2	0.8467	0.3869	2.0803	0.7614	0.1382	0.8996
1.4	0.8968	0.6347	2.4283	0.8258	0.2344	1.0602
1.6	0.9323	0.9582	2.8228	0.8761	0.3655	1.2416
1.8	0.9568	1.3663	3.2799	0.9142	0.5348	1.4490
2.0	0.9732	1.8550	3.8014	0.9422	0.7443	1.6865
2.2	0.9839	2.4267	4.3945	0.9622	0.9949	1.9570
2.4	0.9905	3.0811	5.0621	0.9760	1.2873	2.2633
2.6	0.9946	3.8173	5.8035	0.9853	1.6213	2.6066
2.8	0.9970	4.6354	6.6294	0.9912	1.9969	2.9881
3.0	0.9984	5.5347	7.5315	0.9949	2.4137	3.4086
3.2	0.9992	6.5142	8.5126	0.9972	2.8710	3.8682
3.4	0.9996	7.5746	9.5738	0.9985	3.3694	4.3679
3.6	0.9998	8.7149	10.7145	0.9992	3.9081	4.9073
3.8	0.9999	9.9357	11.9355	0.9996	4.4868	5.4864
4.0	1.0000	11.2366	13.2366	0.9998	5.1058	6.1056
4.2	1.0000	12.6174	14.6174	0.9999	5.7648	6.7647
4.4	1.0000	14.0783	16.0783	0.9999	6.4633	7.4632
4.6	1.0000	15.6191	17.6191	1.0000	7.2022	8.2022

注: η 指二维驻点流动; ζ 指三维驻点流动

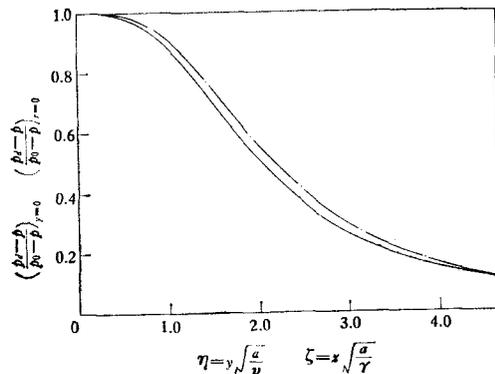


图 1. 二维和三维驻点流动, 由 D-SNSE 确定的压力 p_d 与精确压力 p 的偏差
(—二维情况, 参见式(2.15); - - - 三维情况, 参见(3.15))

iii) 若在方程(2.3)中同时略去粘性项 $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 和惯性诸项, SNSE(2.2)–(2.4) 便简化为 Prandtl 边界层方程组。应该指出: 边界层方程组不适用于驻点流, 这是因为在驻点

附近 x 与 y 、 u 与 v 数量级相同;且位势流动解(2.5)和(2.6)与边界层方程不相容,故不能用边界层方程组求解驻点流。

iv) 可见在 SNSE 中保留全部 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的项是必要的,这样既可反映边界层充分发展($x \gg y$, $u \gg v$) 时无粘外流与边界层流动之间的相互干扰现象,又可以反映驻点流动区域的力学面貌。文献[1]理论给出了导出 SNSE 合理形式的正确途径。

三、三维驻点流动

取圆柱坐标系 (r, ϕ, z) , 流体沿负 z 轴方向流向位于 $z = 0$ 处的固壁表面,并以驻点(取驻点为坐标原点)为中心沿固壁表面对称地流向四方。类似于二维驻点流,取 $r = O(1)$ 流动区为参考态,驻点无粘位势流动有 $U = ar$, 故取特征雷诺数为 $\text{Re} = \frac{a}{\nu}$, 这里 a 为常数,并有如下数量关系

$$\begin{aligned} r &= O(1), & z &= O(\text{Re}^{-1/2}) \\ u &= O(a), & w &= O(a\text{Re}^{-1/2}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

按照文献[1],在利用圆柱坐标系写出的完全 NSE^[11] 中略去数量级等于和小于 $O(\text{Re}^{-1})$ 量级的项后,得到如下的 SNSE

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

u 为径向流速分量, w 为 z 轴向流速分量。在方程(3.3)中的惯性诸项以及粘性项 $\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ 均为 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的项。若在方程(3.3)中略去粘性项 $\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, 即得到对应于 SNSE (3.2)–(3.4) 的 D-SNSE。下面利用 SNSE(3.2)–(3.4) 及其相对应的 D-SNSE 求解三维驻点流动。三维驻点附近无粘位势流动解为^[11]

$$U = ar, \quad w = -2az \quad (3.5)$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^2 (r^2 + 4z^2) \quad (3.6)$$

其中 p_0 为驻点压力。粘性流动解假设为

$$u = r \frac{df(z)}{dz}, \quad w = -2f(z) \quad (3.7)$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho a^2 [r^2 + 4F(z)] \quad (3.8)$$

把式(3.7)和(3.8)代入 SNSE(3.2)–(3.4), 并作如下的变换

$$\zeta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2} z, \quad f(z) = (a\nu)^{1/2} \phi(\zeta), \quad F(z) = \frac{\nu}{a} \Phi(\zeta) \quad (3.9)$$

于是得到

$$\frac{d^3\phi}{d\zeta^3} + 2\phi \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} - \left(\frac{d\phi}{d\zeta}\right)^2 + 1 = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} - 2\phi \frac{d\phi}{d\zeta} - \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = 0 \quad (3.11)$$

对应于 SNSE (3.2)–(3.4) 的 D-SNSE 的 ϕ 方程仍为(3.10), 但关于 Φ 的方程应改变为

$$\frac{d\Phi_d}{d\zeta} = 2\phi \frac{d\phi}{d\zeta} \quad (3.12)$$

边界条件为

$$\zeta = 0, \phi = 0, \frac{d\phi}{d\zeta} = 0; \Phi = 0, \Phi_d = 0 \quad (3.13)$$

$$\zeta \rightarrow \infty, \frac{d\phi}{d\zeta} = 1 \quad (3.14)$$

上节有关二维驻点流动的结论同样适用于这里的三维驻点流动, 即 i) SNSE(3.2)–(3.4) 的精确解与完全 NSE 的精确解^[11]完全一致, 关于这一结论, 我们仍可从驻点附近流体的微体积元的力平衡关系像二维驻点流那样加以解释. ii) D-SNSE 精确解的 ϕ 解与完全 NSE 精确解的 ϕ 解一致, 但其 Φ_d 解与完全 NSE 和 SNSE (3.2)–(3.4) 的 Φ 解不同, 因而 D-SNSE 给出的压力 p_d 与精确压力 p 不同, 相对压力偏差为:

$$\frac{p_d - p}{p_0 - p} = \frac{4 \frac{\nu}{a} \frac{d\phi}{d\zeta}}{r^2 + 4 \frac{\nu}{a} \Phi(\zeta)} \quad (3.15)$$

$\left(\frac{p_d - p}{p_0 - p}\right)_{r=0}$ 随 ζ 变化的关系曲线见图 1. $\frac{d\phi}{d\zeta}$ ^[11]、 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Phi_d(\zeta)$ 随 ζ 变化的具体数值

见表 1. 可见在 $z \rightarrow 0$ 时, $\left(\frac{p_d - p}{p_0 - p}\right)_{r=0} = 1$, 即相对最大偏差为 100%; 在粘性区外缘

$\left(\zeta_s \approx 2.76, \frac{u}{U} = \frac{d\phi}{d\zeta} \approx 0.99\right)$, p_d 与 p 的相对偏差仍达 34%. 精确压力 p 在粘性层内

的绝对变化, 当 $r = 0$ 时为

$$(p_0 - p)_{\zeta \rightarrow \infty} = 2a\mu\Phi_\infty \quad (3.16)$$

当 $\zeta \gg 1$ 时, $4\Phi = O(10^4)$

关于二维驻点流动分析结论中的 iii) 和 iv)、对三维驻点流动情况显然同样成立.

四、旋转圆盘附近的流动

在静止流体中, 当一平圆盘绕通过盘心垂直于盘面的轴以均匀角速度 Ω 而旋转时, 圆盘将因粘性作用而“携带”盘面附近的流体层而“旋转”, 流体层也将因离心力的作用而沿径向运动, 这是一个三维流动问题. 图 2 画出旋转圆盘附近流动的示意图, 以及圆柱坐标

关系. 今取 $r = O(1)$ 流动区为参考态, 特征雷诺数应为 $Re = \frac{\Omega}{\nu}$, 并有如下的数量级

关系

$$r = O(1), \quad z = O(\text{Re}^{-1/2}) \quad (4.1)$$

$$u = O(Q), \quad v = O(Q), \quad w = O(Q\text{Re}^{-1/2}) \quad (4.2)$$

按照文献[1], 在完全 NSE^[11] 中略去数量级等于和小于 $O(\text{Re}^{-1})$ 量级的项, 同时考虑到旋转对称性, 得到如下的 SNSE

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

圆盘固壁表面无滑流, 故有如下边界条件

$$z = 0: u = 0, \quad v = rQ, \quad w = 0 \quad (4.7)$$

$$z = \infty: u = 0, \quad v = 0 \quad (4.8)$$

这里 u 为径向流速分量, v 为周向流速分量, w 为轴向流速分量. 在方程 (4.5) 中略去 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的粘性项 $\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, 便得到对应于 SNSE (4.3)–(4.6) 的 D-SNSE. 若在方程 (4.5) 中把 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级的诸惯性项和 $\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ 同时略去, 则得到对应于 SNSE (4.3)–(4.6) 的边界层方程组. 为了利用 SNSE (4.3)–(4.6) 及与其对应的 D-SNSE 和边界层方程组求解旋转圆盘附近的流场, 令

$$\zeta = z \sqrt{\frac{Q}{\nu}} \quad (4.9)$$

$$u = rQF(\zeta), \quad v = rQG(\zeta), \quad w = (Q\nu)^{1/2}H(\zeta), \quad (4.10)$$

$$p = p(z) = \rho Q\nu Q(\zeta)$$

把 (4.9) 和 (4.10) 式代入 SNSE (4.3)–(4.6), 于是得到:

$$F^2 - G^2 + H \frac{dF}{d\zeta} - \frac{d^2F}{d\zeta^2} = 0 \quad (4.11)$$

$$2FG + H \frac{dG}{d\zeta} - \frac{d^2G}{d\zeta^2} = 0 \quad (4.12)$$

$$2F + \frac{dH}{d\zeta} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{dQ}{d\zeta} + H \frac{dH}{d\zeta} - \frac{d^2H}{d\zeta^2} = 0 \quad (4.14)$$

对应于 SNSE (4.3)–(4.6) 的 D-SNSE 以及边界层方程组的 F 、 G 和 H 的方程仍分别与方程 (4.11)–(4.13) 一致, 但关于 Q 的方程则应分别改变为:

$$\frac{dQ_d}{d\zeta} + H \frac{dH}{d\zeta} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{dQ_b}{d\zeta} = 0 \quad (4.16)$$

边界条件为

$$\zeta = 0: F = 0, G = 0, H = 0, Q = 0, Q_d = 0$$

$$Q_b = 0 \quad (4.17)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: F = 0, G = 0. \quad (4.18)$$

因此得到结论: i) SNSE (4.3)–(4.6) 的精确解与完全 NSE 的精确解^[1]完全一致。关于这一耐人寻味的结果, 我们仍可以从旋转圆盘附近的流体微体积元的力平衡关系加以解释, 作用在圆盘附近流体的微体积元上指向径向方向的应力合力分量中的粘性拉应力 $\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right]$ 、指向周向方向的应力合力分量中的粘性剪应力 $\mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]$ 以及指向 z 轴方向的应力合力分量中的粘性剪应力 $\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$ 均在流体微体积元的动力学平衡中不起作用, 而由完全 NSE 导出 SNSE(4.3)–(4.6) 时略去数量级等于和小于 $O(\text{Re}^{-1})$ 量级诸项的处理^[1], 恰好正确地反映了流体微体积元受力状态的上述特性。

ii) 对应于 SNSE(4.3)–(4.6) 的 D-SNSE 和边界层方程组, 它们的精确解的 F 、 G 和 H 解均与完全 NSE 和 SNSE (4.3)–(4.6) 精确解的 F 、 G 和 H 解一致; 但它们的精确解的 Φ_d 和 Φ_b 解则均与完全 NSE 精确解的 Φ 解不同, 说明由 D-SNSE 得到的压力 p_d 和由边界层方程组得到的压力 p_b 均与精确压力解 p 不同, p_d 和 p_b 相对于精确压力 p 的偏差分别为

$$\frac{p_d - p}{p} = \frac{-4F}{4F + H^2} \quad (4.19)$$

$$\frac{p_b - p}{p} = -1 \quad (4.20)$$

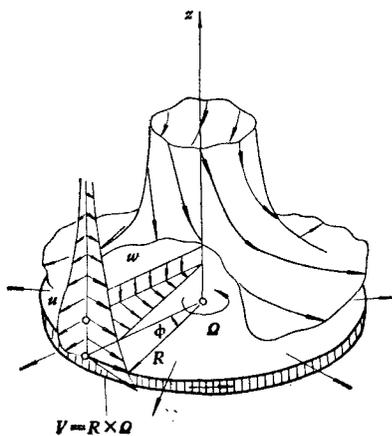


图 2. 静止流体中旋转圆盘附近流动的示意图及坐标关系

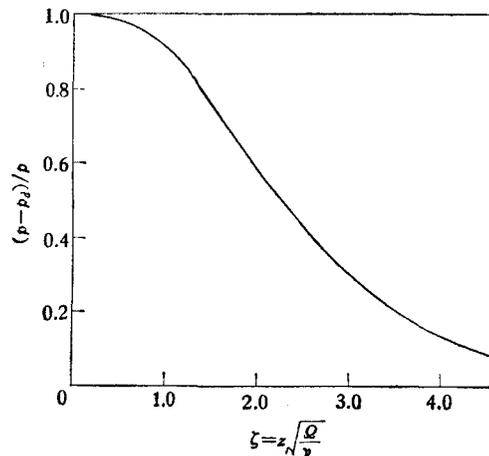


图 3. 旋转圆盘附近流动, 由 D-SNSE 确定的压力 p_d 与精确压力 p 的偏差, 参见式(4.19)

图 3 给出 $(p_d - p)/p$ 随 ζ 变化的关系曲线, p_d 与 p 的相对最大偏差出现在固壁表面, 相对最大偏差为 100%. 边界层方程组给出的压力 p_b 与 p 的相对偏差恒等于 100%. 表 2 是函数 F 、 G 、 H 、 Q 、 Q_b 和 Q_d 的具体数值, 函数 F 、 G 和 H 的数据引用自文献 [11].

在旋转圆盘附近流动的情况下, 有关二维和三维驻点流动的分析结论 iv) 显然同样成立. 边界层方程组不能够描述二维和三维驻点流动, 但边界层方程组能够近似地描述

表 2 旋转圆盘附近流动, SNSE, D-SNSE 和边界层方程组精确解中的函数 F 、 G 、 H 、 Q_b 、 Q_d 和 Q

$\xi = z \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$	F	G	$-H$	Q_b	$-Q_d$	$-Q$
0	0	1.0	0	0	0	0
0.2	0.084	0.878	0.018	0	0.0002	0.167
0.4	0.136	0.762	0.063	0	0.002	0.275
0.6	0.166	0.676	0.124	0	0.008	0.340
0.8	0.179	0.561	0.193	0	0.019	0.377
1.0	0.180	0.468	0.266	0	0.035	0.395
1.2	0.173	0.404	0.336	0	0.056	0.403
1.4	0.162	0.341	0.404	0	0.082	0.406
1.6	0.148	0.288	0.466	0	0.109	0.405
1.8	0.133	0.242	0.522	0	0.136	0.403
2.0	0.118	0.203	0.572	0	0.164	0.401
2.2	0.104	0.171	0.617	0	0.190	0.398
2.4	0.091	0.143	0.656	0	0.215	0.396
2.6	0.078	0.120	0.690	0	0.238	0.395
2.8	0.068	0.101	0.721	0	0.260	0.395
3.0	0.058	0.083	0.746	0	0.278	0.395
3.2	0.050	0.071	0.768	0	0.295	0.395
3.4	0.042	0.059	0.786	0	0.309	0.394
3.6	0.036	0.050	0.802	0	0.322	0.394
3.8	0.031	0.042	0.815	0	0.332	0.393
4.0	0.026	0.035	0.826	0	0.341	0.393
4.2	0.022	0.029	0.836	0	0.349	0.393
4.4	0.018	0.024	0.844	0	0.356	0.393
∞	0	0	0.886	0	0.392	0.393

旋转圆盘附近的流动.

五、结 束 语

对二维、三维驻点流动和旋转圆盘附近的流动等三种流动情况, 文献 [1] 理论给出的 SNSE 的精确解均与完全 NSE 的精确解^[11]完全一致, 这足以说明利用 SNSE 计算流场时的实际适用范围大大超出了 SNSE 理论所限定的应用范围, 说明利用 SNSE 数值模拟各种类型的不可压缩流动具有很大的实际潜力.

对本文所研究的三种流动情况, 不同形式的 SNSE 的精确解的比较表明: SNSE 和

PNSE 中的 $O(\text{Re}^{-1/2})$ 量级项的不同取舍, 具有不可忽略的影响; 采用文献 [1] 理论的取舍方案是比较合理的, 因此, 基于文献 [1] 理论可以把 SNSE 以及 PNSE 的形式合理地加以统一。

参 考 文 献

- [1] 高 智, 力学学报, 6(1982).
- [2] Емельянова, З. М., Павлов, Б. М., Решение задачи обтекания Сферы вязким Газом При помощи полных и упрощенных уравнений Навье-Стокса.—В кн.: Вычислительные Методы и Программирование. Выл. 34. М., Изд-во Моск. ун-та, (1981).
- [3] Davis, R. T., *AIAA J.*, 8, 5(1970).
- [4] Kutler, P., AIAA-83-0037.
- [5] Rubin, S. G., Lin T. C., *J. Computational Physics*, 9, 2(1972).
- [6] Lubard, S. C., Rakich, J. V., AIAA 75-149.
- [7] Murray, A. L., Lewis, C. H., AIAA 78-259.
- [8] 王汝权, 刘学忠, 焦履琼, 高智, 力学学报, 3(1980).
- [9] Wang, C. K., *J. Fluid Mech.*, 48(1971).
- [10] Ковеня, В. М., Черный, С. Т., Яненко, н. н., *Докл. АН СССР*, 245, 6(1979).
- [11] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering) Fourth Edition, (1969).

SOME EXACT SOLUTIONS OF THE SIMPLIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS (SNSE)

Gao Zhi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The simplified Navier-Stokes equations(SNSE) and thier exact solutions for the stagnation in both plane flow (Hiemenz Flow) and three-dimensional flow and the flow near a rotating disk are presented in this paper. The analysis shows that in the cases of the aforecited three flows the exact solutions of the paper [1]'s SNSE are completely consistent with those of the full Navier-Stokes equations(NSE) and that the velocity distributions of the exact solutions of the paper [3]'s SNSE agree with those of the full NSE, however, the pressure distributions of the exact solutions of the paper [3]'s SNSE do not agree with those of the full NSE. The maximum relative pressure errors between the exact solutions of the paper [3]'s SNSE and the full NSE are a hundred per cent in the cases of the aforecited three flows.