

式中, $K = k\alpha(H_0 + h_0)/l$, 演化上式得

$$\Delta t_{np} = [2l^2\mu/k\alpha(H_0 + h_0)\pi] \cdot \ln \left[\frac{(H_0 - h_0) - \omega l^2/k\alpha(H_0 + h_0)}{(h_{np} - h_0) - \omega l^2/k\alpha(H_0 + h_0)} \right]. \quad (42)$$

用同样方法可推导出当 $\omega < k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l$ 时, 地下水位的下降运动, 也可求得 h_{np} 及 Δt_{np} 与式(41), (42) 相同。

例: 已知 $k = 1$ 米/天, $\mu = 0.05$, $l = 20$ 米, $\alpha = 1.0$ (完整排水沟), $h_0 = 2.0$ 米, $H_0 = 3.0$ 米, $T = 5.0$ 米, $\omega = 0.01$ 米/天。试求: (1) 判别地下水位的升降, (2) 求地下水位升降的极限高程 h_{np} , (3) 求到达 h_{np} 所需之时间 Δt_{np} 。解:

(1) 先判别升降 $k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l^2 = 0.0125$ 米/天, $\omega = 0.01$ 米/天, $\omega < k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l^2$, 故地下水位虽处于入渗补给, 但仍下降。

(2) 求 h_{np} 由式(40)得地下水位下降的极限高程 $h_{np} = 2.828$ 米, 到达此 h_{np} 后, 便不再下降了, 此时的排水流量为 $q_G = k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l = 0.2$ 米²/天, 而此时半沟距 l 内的入渗总量 $\omega l = 0.2$ 米²/天, 两者必相等, 故地下水位不再下降而保持稳定。

(3) 再求 Δt_{np} 根据式(42)得 $\Delta t_{np} = 7$ 天, 也即是说经过 7 天, 地下水位由原来的 $H_0 = 3.0$ 下降到 $h_{np} = 2.828$ 米。如将此 $\Delta t_{np} = 7$ 代入式(41), 则同样可得 $h_{np} = 2.828$ 米。

式(22), (32), (37), (38), (39), (40), (42) 可作为农田地下水预测预报之用。

参 考 文 献

- [1] 阿拉文·努米罗夫, 滤流理论. 高等教育出版社, 1958年。
[2] 沙金焯, 水平面内地下水的二元非正常流动. 力学学报, 1979年第4期。

孤立波对铅直坝体的作用力

周显初 李小佩 赵世俊 倪浩清

(中国科学院力学研究所) (水利水电科学研究院)

一、问题的提出

滑坡塌方往往会造成严重的后果, 破坏水利设施, 给坝区和下游人民的生命财产造成巨大损失。这在国内外都不乏其例。1963年3月6日柘溪水库上游塘岩光地区滑坡和1963年10月9日意大利瓦依昂水库上游滑坡就是两个典型的例子。

滑坡引起的涌浪与周期波不一样, 它是突发性的, 能激起巨大的波浪, 与水波中的孤立波的情形很相近。在浅水波近似下, 可以证明不管初始形态如何, 其波形的渐近形态符合 KdV 方程, 即经过一段时间的传播之后, 这种情况下的波形正是孤立波^[1]。实验^[2]也证明了这一点。所以可以用孤立波作为模型来计算滑坡涌浪对坝体的作用力。

本文研究两个二维的等强度的孤立波的相互作用, 求出对称轴上的压力和波高, 即已知了滑坡涌浪的高度而去求出作用在大坝上的力。尽管实践中孤立波的波高可能是很大的, 但由于强非线性会给问题带来不可克服的困难, 所以为了简单起见, 只考虑浅水长波小振幅的情况, 且假设水深为常数。当然还得假定: 流体是理想的, 不可压缩的, 运动是无旋的, 即有速度势存在。

二、理论分析

首先建立坐标系, x 轴水平指向下游, 坝址为 $x=0$, y 轴铅直向上, 底面为 $y=0$ 。引入无量纲量如下:

$$\begin{aligned} x &= x'/l, \quad y = y'/d, \quad t = t'\sqrt{gd}/l, \\ \eta &= \eta'/a = \eta'/d\alpha, \quad \phi = \phi'/(la\sqrt{gd}), \end{aligned}$$

其中带“ \cdot ”的量为有量纲量; $a\eta$ 为波高; Φ 为速度势; g 为重力加速度; d 为静水深度; l 为水平方向的尺度; $\alpha = a/d$, $\beta = (d/l)^2$, 按照假设 α, β 均为小量, 即 $\alpha \ll 1, \beta \ll 1$, 且 $\alpha = O(\beta)$ 。

在这种情况下, 拉普拉斯方程变为

$$\beta \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0. \quad (1)$$

底面边界条件为

$$\partial \phi / \partial y = 0 \quad \text{在 } y=0 \text{ 上}. \quad (2)$$

自由面边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \alpha \phi_x \eta_x - \beta^{-1} \phi_y = 0, \\ \eta + \Phi_t + \alpha \Phi_x^2 / 2 + \alpha \beta^{-1} \phi_y^2 / 2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } y=1+\alpha\eta \text{ 上}. \quad (3)$$

把 ϕ 按 y 的幂级数展开, 并利用(1), (2)两式, 得

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{\partial^{2n} f(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{y^{2n}}{(2n)!}. \quad (5)$$

下面用摄动法求出准确到小参数 α 的一阶项的 f 和 η , 而略去 α^2 及更高阶的项。边界条件(3), (4)变为

$$\eta = -f_t - \alpha f_x^2 / 2 + \beta f_{ttt} / 2 + O(\alpha^2), \quad (6)$$

$$f_{tt} - f_{xx} = -\alpha [f_t^2 / 2 + f_x^2]_t + \beta f_{tttt} / 3 + O(\alpha^2). \quad (7)$$

向左和向右传播的孤立波应是 $\xi_1 = x - t$, $\xi_2 = -x - t$, $\tau = \alpha t$ 的函数, 所以势函数 ϕ 的表示式(5)中的 f 可表示为

$$f(\xi_1, \xi_2, \tau) = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \alpha F_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad (8)$$

其中 F_i 为第 i 个孤立波所对应的项, F_{12} 为相互作用项。

把式(8)代入式(6), (7)可得

$$\eta = f_{\xi_1} + f_{\xi_2} - \alpha f_{\tau} - \alpha \left\{ \frac{1}{2} f_{\xi_1}^2 + \frac{1}{2} f_{\xi_2}^2 - f_{\xi_1} f_{\xi_2} \right\} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^2 f + O(\alpha^2), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) \left[2\alpha f_\tau + \alpha \left\{ \frac{3}{2} f_{\xi_1}^2 + \frac{3}{2} f_{\xi_2}^2 - f_{\xi_1} f_{\xi_2} \right\} + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^3 f \right] - 4f_{\xi_1 \xi_2} + O(\alpha^2) = 0. \quad (10)$$

若只有一个孤立波传播, 则 $f_{\xi_2} = 0$, $f(\xi_1, \xi_2, \tau) = F(\xi, \tau)$, (9), (10) 两式变为

$$\eta = F_\xi - \alpha F_\tau - \frac{\alpha}{2} F_\xi^2 - \frac{\beta}{2} F_{\xi\xi\xi} + O(\alpha^2), \quad (11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(2\alpha F_\tau + \frac{3\alpha}{2} F_\xi^2 + \frac{1}{3} \beta F_{\xi\xi\xi} \right) + O(\alpha^2) = 0;$$

即

$$2\alpha F_\tau + \frac{3\alpha}{2} F_\xi^2 + \frac{1}{3} \beta F_{\xi\xi\xi} = g(\tau).$$

在波还未传到的地方, $F = F_\tau = F_\xi = 0$, 所以 $g(\tau) = 0$, 即

$$2\alpha F_\tau + \frac{3\alpha}{2} F_\xi^2 + \frac{1}{3} \beta F_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (12)$$

利用式(12)消去式(11)中的 F_τ , 可得

$$\eta = F_\xi + \frac{1}{4} \alpha F_\xi^2 - \frac{1}{3} \beta F_{\xi\xi\xi}. \quad (13)$$

由于 F_{12} 满足式(12), 从式(10)可得 F_{12} 应满足的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\right) F_{1, \xi_1} F_{2, \xi_2} + 4 \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + O(\alpha) = 0, \quad (14)$$

其解为

$$F_{12} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) F_1 F_2 + O(\alpha). \quad (15)$$

利用泰勒展开, 可得

$$f = F_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + F_2(\xi_2 + \chi_1, \tau) + O(\alpha^2), \quad (16)$$

$$\chi_i = -(\alpha/4) F_i(\xi_i, \tau). \quad (17)$$

由式(9)并利用式(12)消去 $F_{i, \tau}$ 即得

$$\eta = \eta_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + \eta_2(\xi_2 + \chi_1, \tau) + (\alpha/2) \eta_1 \eta_2, \quad (18)$$

其中 η_i 即为单个孤立波波高, 它与 F 的关系由式(13)决定。

现在, 选取在上面的讨论中一直未定的水平尺度 l , 使 $\beta = 3\alpha/4$ 得以成立。在这种情况下, 对于浅水中单个孤立波, Laitone^[3]求得

$$\eta = [1 - (3\alpha/4) \text{th}^2 \theta] \text{sech}^2 \theta + O(\alpha^2), \quad (19)$$

$$\theta = (1 - 5\alpha/8)(\xi - \tau/2). \quad (20)$$

这里已经假定了该孤立波在 $t = 0$ 时到达大坝 $x = 0$ 。

对于孤立波与铅直坝体相互作用的情况

$$\eta = [1 - (3\alpha/4) \text{th}^2 \theta_1] \text{sech}^2(\theta_1 + \chi_2) + [1 - (3\alpha/4) \text{th}^2 \theta_2] \text{sech}^2(\theta_2 + \chi_1) + (\alpha/2) \text{sech}^2 \theta_1 \text{sech}^2 \theta_2 + O(\alpha^2), \quad (21)$$

$$\chi_i = (\alpha/4)(1 - \text{th} \theta_i) + O(\alpha^2). \quad (22)$$

坝上的最大波高为

$$\eta = 2 + \alpha/2 + O(\alpha^2). \quad (23)$$

现在计算作用在大坝上的作用力。根据无旋运动的柯西积分, 有

$$\begin{aligned} p &= 1 - y - \alpha \varphi_t - \alpha^2 \left(\varphi_x^2 + \frac{1}{\beta} \varphi_z^2 \right) / 2 \\ &= 1 - y - \alpha f_t + \alpha \beta f_{xx} y^2 / 2 - \alpha^2 f_x^2 / 2 + O(\alpha^3). \end{aligned} \quad (24)$$

把 $f(x, t)$ 按小参数 α 展开

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \alpha f_1(x, t) + \dots, \quad (25)$$

把上式代入式(24), 在自由面上可得

$$\eta_0 + \alpha \eta_1 = -f_{0,t} - \alpha f_{1,t} - \frac{1}{2} \alpha f_{0,x}^2 + \frac{1}{2} \beta f_{0,ttt} + O(\alpha^2).$$

所以

$$\alpha f_{1,t} = -(\alpha/2) f_{0,x}^2 + (\beta/2) f_{0,ttt} - \alpha \eta_1 + O(\alpha^2). \quad (26)$$

把式(25), (26)代入式(24)

$$p = 1 - y - \alpha f_{0,t} + \alpha^2 \eta_1 - (\alpha\beta/2) f_{0,ttt} (1 - y^2) + O(\alpha^3). \quad (27)$$

作用在大坝上的总作用力为

$$\int_0^{1+\alpha\eta} p dy = \frac{1}{2} - \alpha f_{0,t} - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_0^2 - \alpha^2 f_{0,t} \eta_1 - \frac{\alpha^2}{4} f_{0,ttt} + \alpha^2 \eta_1 + O(\alpha^3). \quad (28)$$

对于孤立波, 由式(19)可知

$$f_{0,t} = -\operatorname{sech}^2 \theta_1 - \operatorname{sech}^2 \theta_2,$$

$$f_{0,ttt} = \sum_{i=1}^2 [-6 \operatorname{sech}^4 \theta_i - 4 \operatorname{sech}^2 \theta_i].$$

由式(21)可知

$$\begin{aligned} \alpha \eta_1 &= -\frac{3}{4} \alpha \operatorname{th}^2 \theta_1 \operatorname{sech}^2 \theta_1 - \frac{3}{4} \alpha \operatorname{th}^2 \theta_2 \operatorname{sech}^2 \theta_2 + \frac{\alpha}{2} \operatorname{sech}^2 \theta_1 \operatorname{sech}^2 \theta_2 \\ &\quad - 2Z_2 \operatorname{sech}^2 \theta_1 \operatorname{th} \theta_1 - 2Z_1 \operatorname{sech}^2 \theta_2 \operatorname{th} \theta_2. \end{aligned}$$

把上述结果代入式(28), 得到孤立波波峰到达大坝时作用在大坝上的最大的总作用力为

$$1/2 + 2\alpha + 3\alpha^2/2 + O(\alpha^3). \quad (29)$$

作用在坝上的总的最大动压力与静压力之比:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\int_0^{1+\alpha\eta} p dy - \int_0^1 p_s dy \right) / \int_0^1 p_s dy = 4\alpha + 3\alpha^2 + O(\alpha^3), \quad (30)$$

其中 p_s 表示静水压力。有量纲的总的动压力为

$$2\rho g a d + 3\rho g a^2/2 = \rho g d^2 (2\alpha + 3\alpha^2/2). \quad (31)$$

总作用力的作用点离底面为

$$y_c = \frac{\int_0^{1+\alpha\eta} p y dy}{\int_0^{1+\alpha\eta} p dy} = \frac{\frac{1}{6} + \alpha + \frac{15}{8} \alpha^2}{\frac{1}{2} + 2\alpha + \frac{3}{2} \alpha^2} = \frac{1}{3} \left(1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{4} \right). \quad (32)$$

即比总的静水压作用点上移了 $(2\alpha/3 + \alpha^2/12)$ 。

三、实验结果

实验是在水利水电科学研究院的玻璃水槽中做的。该槽长51.6米，宽0.6米，高0.9米。造波装置由四连杆钢架、推水板、卡锁器、电动牵引器、卷扬机等部件组成。改变弹簧的数目以及推水板的运行距离和水深就可得到不同波高的涌浪。浪高由KGY-2型浪高仪测量。坝面上的最大波高由YR-A型电容液位计测定。实验中使用国产的YD-15型动态电阻应变仪、XY-05型电阻式传感器和SZ-2型渗压计测量压力。仪器的输出均接入SC-16型光线示波器，利用示波纸记录测试的各个动态过程。

水槽中的水深分别为30, 35, 40, 50厘米。对应于每一个水深由造波装置造出六个不同波高的孤立波（实际上是产生六个不同的涌浪，然后让它传播一定距离变为孤立波）。总共做了24个实验，实验中测得的大坝上的无量纲波高 $\eta'/d = \alpha\eta$ 列于表1，画在图1中。作为比较，式(23)的计算结果也画在图1中，理论和实验符合。但这里的实验结果和文献[4]相比都偏小。从图中还可以看出：一级近似 $\eta'/d = 2\alpha$ 有相当好的精确度。

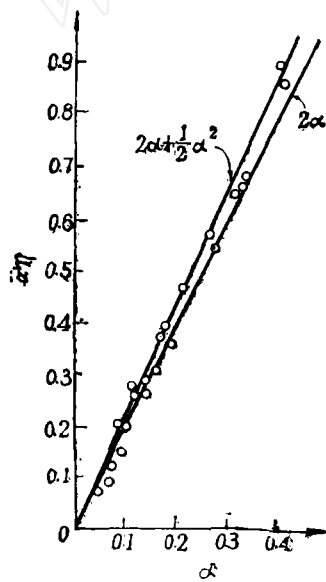


图 1

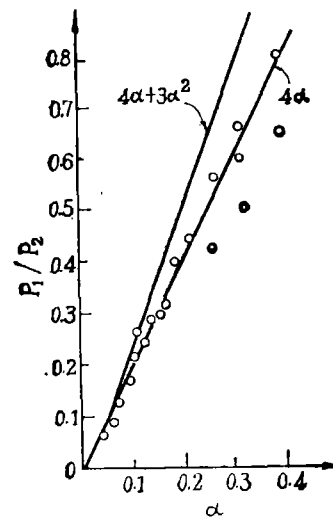


图 2

在铅直坝上距底面20, 40, 60厘米处各放置一个传感器，测量压强。然后假定波峰最高处压力为零，静水面以上的压力按静水压分布，静水面以下的动水压为直线分布，直线的斜率由传感器测得的压力值确定。计算压强曲线和坐标轴所围的面积，算出总的动水压力 P_1 ，并求出总的动水压力 P_1 和总的静水压力 P_2 之比 P_1/P_2 ，其结果列于表1，并用图2表出。可以看出，一级近似 $P_1/P_2 = 4\alpha$ 甚至比式(30)更接近于实验结果，这与实验中计算 P_1 时假定压力为线性分布有关。

理论上，本文的结果式(23)，(29)，(32)只在 $\alpha = a/d$ 很小时才是正确的，但从上面的理论与实验结果的比较看来，当 $\alpha < 0.2$ 时，这些结果均可用，它们与实验符合得很好。

表1 试验结果

| a (厘米) | d (厘米) | $\alpha = a/d$ | $\alpha\eta$ | P_1/P_2 | a (厘米) | d (厘米) | $\alpha = a/d$ | $\alpha\eta$ | P_1/P_2 |
|----------|----------|----------------|--------------|-----------|----------|----------|----------------|--------------|-----------|
| 11.93 | 30 | 0.398 | 0.867 | 1.29 | 5.35 | 50 | 0.107 | 0.206 | 0.410 |
| 11.79 | 30 | 0.393 | 0.900 | 1.60 | 5.12 | 35 | 0.146 | 0.287 | 0.571 |
| 11.57 | 35 | 0.330 | 0.681 | 1.01 | 4.77 | 30 | 0.159 | 0.310 | 0.590 |
| 11.33 | 35 | 0.324 | 0.665 | 1.31 | 4.65 | 40 | 0.116 | 0.279 | 0.528 |
| 10.87 | 40 | 0.272 | 0.546 | 1.11 | 4.50 | 35 | 0.129 | 0.261 | 0.490 |
| 10.80 | 40 | 0.270 | 0.570 | 0.842 | 4.21 | 30 | 0.140 | 0.265 | — |
| 9.56 | 30 | 0.319 | 0.661 | 1.20 | 4.07 | 40 | 0.102 | 0.198 | 0.344 |
| 9.49 | 50 | 0.190 | 0.364 | 0.790 | 3.51 | 50 | 0.070 | 0.128 | — |
| 8.15 | 50 | 0.163 | 0.312 | 0.592 | 3.50 | 50 | 0.070 | 0.134 | 0.252 |
| 7.67 | 35 | 0.219 | 0.468 | 0.880 | 3.20 | 35 | 0.091 | 0.157 | — |
| 6.79 | 40 | 0.170 | 0.351 | 0.625 | 2.68 | 40 | 0.067 | 0.092 | 0.170 |
| 5.35 | 30 | 0.178 | 0.392 | — | 2.32 | 50 | 0.046 | 0.073 | 0.125 |

参 考 文 献

- [1] 苏兆星, 非线性水波. 北京大学力学系, 1981年.
- [2] 李小佩, 滑坡涌浪对坝体作用的实验研究. 水利水电科学研究院水力学所硕士论文, 1983年.
- [3] Laitone, E.V., The Second Approximation to Conoidal and Solitary Waves. *J. Fluid Mech.*, V. 9, Pt3, 1960.
- [4] Maxworthy, T., Experiments on Collisions between Solitary Waves. *J. Fluid Mech.*, V. 76, Pt.1, 1976.
- [5] Miles, J.W., Obliquely Interacting Solitary Waves. *J. Fluid Mech.*, V.79, Pt.1, 1977, p.157—169.

水下岩塞爆破水工模型相似准则

李 新 洲

(水利电力部松辽水利委员会科学研究所)

一、概 述

在已建水库中扩建泄洪、取水和发电洞时, 采用岩塞爆破施工是技术可能、经济合理的好办法. 近十几年来, 我国在水利水电系统中, 先后在7个工程中成功地完成9次水下岩塞爆破施工; 其中有两次是试验性大型水下岩塞爆破, 见表1. 随着预裂爆破技术的发展, 在模型中岩塞口可按预裂口成型制造. 由于模型模拟中仍存在相似性问题, 本文将针对这一问题进行一些论证, 对水工相似准则进行了一些推演, 供水工试验工作者参考.