三维简化 Navier-Stokes 方程的最优形式

王汝权　　高智

（中国科学院计算中心）　（中国科学院力学研究所）

引　言

最近十多年，简化NS方程（以下记为SNS）的研究和计算有长足进展[1,2]。由于在NS方程组中对粘性项的取舍不同，因而有几种不同的简化NS方程组[1,2]，究竟哪种形式更合理，是需进一步探讨的一个问题。文献[1]利用原始NS方程及三种不同的简化NS方程组，对球的超音速绕流数值试验表明，其效果是不一样的。文献[3]也指出，如果SNS方程组的形式选择不当，会带来不可忽略的误差。从二维研究不难看出，目前广泛采用的三维SNS方程即粘性激波层方程组（VSL）[4]及抛物化NS方程组（PNS）[5]，都不是最合理的简化形式。本文提出三维NS方程组的一种最好形式，称为修正的PNS方程组（记为MPNS），并论证它的合理性及精确度。

一、NS方程的简化形式

文献[1]对现有的三种二维SNS方程组作了比较，假定无粘项相同，而粘性项量阶按小参数 $\varepsilon=Re^{-1/2}$（Re代表来流的雷诺数）估计。根据保留粘性项的不同，可分为四种形式：组Ⅰ为完全NS方程，组Ⅱ为粘性项保留到 $O(\varepsilon)$ 量阶的方程，组Ⅲ为粘性项保留到 $O(1)$ 量阶的方程（即PNS），组Ⅳ为组Ⅱ中法向动量方程只留下无粘项的方程（即VSL）。文献[1]用以上四组方程计算了球的超音速绕流流场。主要结论是：在高马赫数及低雷诺数（最低为 10^2）或高雷诺数和低马赫数条件下，组Ⅲ的数值结果与组Ⅰ（即NS方程）的解相差很大，壁面热流的误差可高达30%；而组Ⅱ和组Ⅳ都能较好地逼近NS方程（组Ⅰ）的解，它们的数值误差不超过5%。此外，文献[3]研究了不可压二维驻点流，其结果进一步表明，组Ⅱ的精确解与NS方程的精确解是一致的，而组Ⅳ原则上不适用于驻点流，它给出的压力有100%的相对误差。这与简化NS方程的前提，即流场中存在一主流方向是相符的。以上研究表明，粘性项保留到 $O(\varepsilon)$ 量阶的方程组（组Ⅱ）是最合理的形式。

本文于1984年12月15日收到，1985年3月19日收到修改稿。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

二、简化方程的推导原则

用不同的方法[5-8]推导简化 NS 方程，所得到的方程组也不相同，这与推导原则有关。文献[6]提出的两层近似分析思想是比较合理的，它将计算区域分为内层(粘流层)及外层(无粘流层)，并对内、外两层分别作量阶估计，然后在两层的交界线(面)上使偏微分方程组能够光滑地联结(见图 1)。同时证明，按 Prandtl 的边界层理论，保留到 $O(\varepsilon)$ 量阶项的内层方程组(能光滑过渡为欧拉方程)，就是满足上述要求的方程组，即为本文所指的简化 NS 方程组的合理形式，此结论与文献[1]的数值结果是一致的。

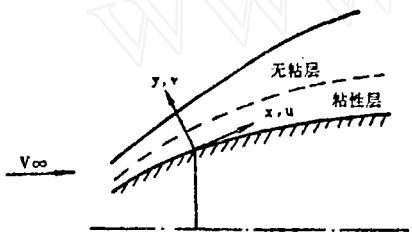

图 1 两层模型示意图

对不可压三维驻点附近和旋转园盘附近的流动，文献[3]求得形式Ⅱ的方程组的精确解与完全 NS 方程的精确解是一致的。由此得出，从二维问题分析得到的 NS 方程组的简化原则及其推导方法，对三维流动问题应是同样适用的。本文的分析，也证明了这一点。

三、修正的抛物化 NS 方程(MPNS)

在工程应用中，三维流场的计算是更为人们关心的，自然要考虑使用最合理的简化 NS 方程。然而，目前通用的两组方程[2]并不是最合理的。第一组为三维粘性激波层方程，它可以看成二维方程Ⅳ的推广。其缺点是周向的扩散项被略去，对大攻角或出现大范围侧向分离流时是不适应的[4]。第二组称三维抛物化 NS 方程[5,7]，它虽然保留了周向扩散项，但其粘性项只保留 $O(1)$ 量阶项，即相当于二维情形的方程组Ⅲ。文献[1]指出，这类方程组在某些来流条件下，它的解与 NS 方程的解误差很大。因此。对三维流动仍按两层模型分析是比较合理的(见图 2)。我们将以它为根据来导出 MPNS 方程组。

设 x、y、φ 分别代表边界层坐标系的三个分量(图 3)，u、v、w 为相应的速度分量，而 ρ、p、T、μ、λ 分别代表密度、压力、温度、粘性系数及导热系数。各量的无量纲因子对应如下：

x、y、$r \sim L$(物体特征长度)

u、v、$w \sim V$ (来流速度)

$\rho \sim \rho_\infty$

$p \sim \rho_\infty V_\infty^2$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$T \sim V_\infty^2/C_p$（C_p 为定压比热）

$\mu \sim \mu_\infty$

$\lambda \sim \lambda_\infty$

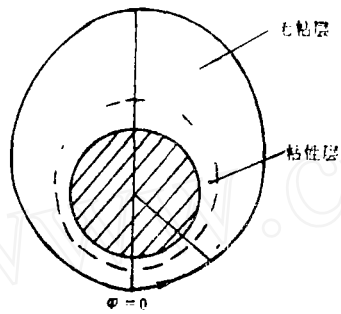

图 2　三维流两层模型截面图

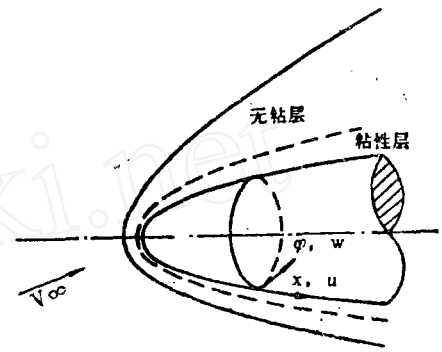

图 3　边界层座标系

在此情形下，对三维 NS 方程可用下列量级估计：

外层（无粘流）：

$$x \sim O(L), \qquad y \sim O(L), \qquad L\varphi \sim O(L)$$

$$u \sim O(V_\infty), \qquad v \sim O(V_\infty), \qquad w \sim O(V_\infty)$$

内层（粘性流）：

$$x \sim O(L), \qquad y \sim O(L\varepsilon), \qquad L\varphi \sim O(L\varepsilon)$$

$$u \sim O(V_\infty), \qquad v \sim O(\varepsilon V_\infty), \qquad w \sim O(\varepsilon V_\infty)$$

不失一般性，本文只对球-锥绕流情形写出 MPNS 方程组：

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r H}{\partial y} + \frac{\partial \rho w H}{\partial \varphi} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho u}{H}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho w}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{K}{H}\rho u v - \frac{\sin\theta}{r}\rho w^2 + \frac{\partial p}{H\partial x} \\
&= \frac{1}{R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{R_e r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) \\
&+ \frac{\mu}{R_e}\left(\frac{K}{H} + \frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K u}{R_e H}\frac{\partial \mu}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho u}{H}\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\rho w}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{K}{H}\rho u^2 - \frac{\cos\theta}{r}\rho w^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \\
&= \frac{4}{3R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{R_e r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{R_e r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&- \frac{2}{3R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) + \frac{\sin\theta\mu}{R_e r}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin\theta}{r}\mu u\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{\rho w}{r}(u\sin\theta+v\cos\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

$$=\frac{1}{R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{4}{3R_e r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{R_e}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$-\frac{2}{3R_e r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\underline{2\frac{\sin\theta}{r^2}\mu\frac{\partial u}{\partial \varphi}} \tag{4}$$

$$\frac{\rho u}{H}\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}-\left(\frac{u}{H}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{w}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)=\frac{1}{R_e P_r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{1}{R_e P_r r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)$$

$$+\frac{\mu}{R_e P_r}\left(\frac{K}{H}+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial T}{\partial y}+\Phi \tag{5}$$

$$p=\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho T \tag{6}$$

$$\Phi=\frac{\mu}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-K\frac{u}{H}\right)^2+\frac{\mu}{R_e}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{7}$$

其中

$R_e=\dfrac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}$ 为雷诺数

$P_r=\dfrac{\mu}{\lambda}C_P$ 为普朗特数

$r=r_0(x)+y\cos\theta$

$H=1+Ky$

$r_0(x)$——从物面到对称轴的垂直距离

$K=K(x)$——沿 x 方向的物面曲率

$\theta=\theta(x)$——物面切线与对称轴的夹角

γ——比热比

VSL 及 PNS 方程组已在文献[2]中详细写出，不再重复。MPNS 方程组包含了 PNS 方程组并附加上 $O(\varepsilon)$ 量阶的少数项(公式中带横扛的部份)，但 MPNS 方程中耗散项 Φ(见公式 7)已简化成与三维边界层情形相同。此外，在内层方程中保留了 $O(\varepsilon^2)$ 量阶项 ρv^2 及 ρwv，从而能保证内层方程光滑过渡到外层方程。

还应指出，推导 MPNS 及 PNS 方程组的原则以及对横向运动参量的量级处理，都是完全不同的。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

四、MPNS 方程组的精度

利用文献[6]中的渐近展开方法，可以证明，全流场(包括无粘流及粘性边界层)可获得精度为 $O(\varepsilon)$ $(\varepsilon=Re^{-1/2})$ 的均匀一致解。这里不写出全部证明过程，仅简述一下证明思路。

假定在内层($0\leqslant y\leq\delta$)，NS 方程的解可展开成 ε 的幂级数：

$$\frac{u}{V_\infty}=u_{i0}+\varepsilon u_{i1}+\varepsilon^2u_{i2}+\cdots\cdots$$

$$\frac{v}{\varepsilon V_\infty}=v_{i0}+\varepsilon v_{i1}+\varepsilon^2v_{i2}+\cdots\cdots$$

$$\frac{w}{\varepsilon V_\infty}=w_{i0}+\varepsilon w_{i1}+\varepsilon^2w_{i2}+\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&\rho/\rho_\infty=\rho_{i0}+\varepsilon\rho_{i1}+\varepsilon^2\rho_{i2}+\cdots\cdots\\&\mu/\mu_\infty=\mu_{i0}+\varepsilon\mu_{i1}+\varepsilon^2\mu_{i2}+\cdots\cdots\\&[p(X,Y,\Psi)-p_w(X)]/(\varepsilon\rho_\infty V_\infty{}^2)\\&=p_{i0}+\varepsilon p_{i1}+\varepsilon^2p_{i2}+\cdots\cdots\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$X=x/L,\ Y=y(\varepsilon a),\ \Psi=\varphi/\varepsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial\Psi}=O(1),\ u_{i0},\ u_{i1}\cdots\cdots$$

诸量及其相对于 X、Y、Ψ 的偏导数均为 $O(1)$ 量阶。把展开式(8)代入完全NS方程组[9]，比较 ε 同次幂得到相应于 $O(\varepsilon^0)$、$O(\varepsilon^1)$……的方程组。

另一方面，在 $y>\delta$ 的无粘外层内，NS 方程的解又可展开成 ε 的下列幂级数：

$$\begin{aligned}&u/V_\infty=u_{e0}+\varepsilon u_{e1}+\varepsilon^2u_e{}^2+\cdots\cdots\\&v/V_\infty=V_{e0}+\varepsilon V_{e1}+\varepsilon^2V_{e2}+\cdots\cdots\\&w/V_\infty=w_{e0}+\varepsilon w_{e1}+\varepsilon^2w_{e2}+\cdots\cdots\\&\rho/\rho_\infty=\rho_{e0}+\varepsilon\rho_{e1}+\varepsilon\rho_{e2}+\cdots\cdots\\&p(X,Y_e,\varphi)/(\rho_\infty V_\infty{}^2)=p_{e0}+\varepsilon p_{e1}+\varepsilon^2p_{e2}+\cdots\cdots\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $Y_e=y/L$，u_{e0}，u_{e1}……诸量及相对于 X、Y_e 及 φ 的偏导数均为 $O(1)$ 量阶，将(9)代入 NS 方程组，比较 ε 的同次幂便得到相应于 $O(\varepsilon^0)$、$O(\varepsilon^1)$……的方程组。

联立内、外层相应于 $O(\varepsilon^0)$ 的方程组将得到全流场精确到 $O(1)$ 量阶的均匀一致解；联合内、外层相应于 $O(\varepsilon^0)$ 及 $O(\varepsilon^1)$ 的方程组，则得到全流场精确到 $O(\varepsilon)$ 量阶的均匀一致解。我们再将 MPNS 方程组与上述内、外层相应于 $O(\varepsilon^0)$ 及 $O(\varepsilon^1)$ 的联合方程组相比较，则得下列关系式

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$|u/V_\infty-(u_{e0}+\varepsilon u_{e1})|\leq O(R_e^{-1}),\quad 0\leq y\leq\delta$$
$$|u/V_\infty-(u_{e0}+\varepsilon u_{e1})|\leq O(R_e^{-1}),\quad y\geq\delta$$

对其他因变量，上述不等式同样成立。因此，MPNS 方程组的解是适用于全流场，精度为 $O(\varepsilon)$ 量阶的均匀一致解。

参 考 文 献

[1] Емельянова, З. И., Павлов, Е. М., Вычислительные Методы и Программирование, No. 34, (1981).
[2] 王汝权、焦履琼、刘学宗，空气动力学学报，1 (1984).
[3] 高 智，简化 NS 方程组的几个精确解，力学学报 3 (1985)。
[4] Murray, A. L., Lewis, C. H., AIAA Paper 78-259 (1978).
[5] Luhard, S. C., Rakich. J. V., AIAA Paper 75-149(1975).
[6] 高 智，力学学报，6(1982).
[7] Rubin, S. G., Lin, T. C., *J. Computational Physics*, 9, 2(1972).
[8] Ковеня, В. М., Яненко, Н. Н., Метод расщепления В Задацах газавой динамики, (1981).
[9] Ho Hungta, Probstein, R. F., Barefied gas dynamics, ed. Talbot(1961).

AN OPTIMAL FORMULATION OF SIMPLIFIED THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS

Wang Ruquan

(The Computing Center, Academia, Sinica, Beijing)

Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

At present there are various simplified formulations of the compressible Navier-Stokes equations in two-dimensional[1] and three-dimensional[2] flows. Unfortunately, up to now there is no uniform principle for the derivation of them. We think that the basic principle pesented by the second author of the paper[6] is more suitable not only in theory but also in practice.

In this paper we will expand the principle mentioned above to three-dimensional flow and give a new system called MPNS, which formally has less difference from the parabolized Navier-stokes equations (PNS)[5,7]. However, the new system of equations will be better approximation to the full N-S equations in our opinion.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net