

波射入等离子体的方式对波加热的影响

康寿万

(中国科学院力学研究所)

提要 本文讨论了电子回旋波加热托卡马克等离子体问题。指出在考虑波加热时,除了要计算寻常波和非常波在等离子体内部的吸收效率外,还应计算入射电磁波从真空投射到磁化等离子体表面时,在边界处分裂成寻常波和非常波的能量分配。

数值计算结果表明,在入射角 θ_i 较小的情况下,当入射波的电场 E^i 平行入射平面时,入射波的能量主要转移为寻常波的能量,此时,寻常波的加热是有效的。当 E^i 垂直入射平面时,入射波的能量主要转移为非常波的能量,此时非常波的加热才是有效的。

一、引言

托卡马克的二次加热手段,主要有中性注入和波加热两大类。波加热有电子回旋波、离子回旋波、低混杂波、阿尔芬波等多种。电子回旋波已在 $TM-3$ 等装置上取得成功^[1],而近年来回旋管的迅速发展,也给电子回旋共振加热(ECRH)提供了有利条件。

ECRH的理论已有很多人用单粒子模型研究过^[2-6]。进一步的理论是考虑集体效应,即通过色散方程等求解问题^[7-10],即计算电子回旋波在等离子体中的吸收系数。

但有一个被共同忽略的问题,就是电磁波在真空与等离子体交界面处的入射情况。当一束电磁波自真空射到磁化等离子体边界时,将分裂成三支波:反射波(r 波)、寻常波(O 波)和非常波(X 波)。入射波的能量分配给这三支波,每支波得到的能量份额取决于等离子体的参数和入射角 θ_i 等。 O 波和 X 波的电场和磁场也由这些参数决定。因此,只计算波在等离子体中的吸收效率,并不能完全表示波的加热效应,还必须计及入射波在等离子体中所产生的 O 波及 X 波的能量大小。把这方面的计算结果和波在等离子体内的吸收系数结合起来,才真正表示 O 波和 X 波的加热效应。

电磁波在等离子体边界分裂成 O 波和 X 波的计算公式可见^[11]文,但这些公式适用于电离层,其坐标和磁场方向等的取法和托卡马克不同,不便应用。本文第二部分将导出适用于托卡马克的公式(推导见附录)。第三部分是通过数值计算,给出在不同的 θ_i 时, O 波和 X 波的能量和电场分量的大小,分内侧注入和外侧注入、锐边界和扩散边界四种情况。第四部分是结论。

二、电磁波分成 O 波 X 波的计算公式

由图1、2可见,设上半平面为磁化等离子体,磁场 B_0 沿 z 方向,下半平面为真空。设入射波 k_i 位于 $x-z$ 平面。 E^i 、 B^i 为入射波的电场和磁场。图1是 E^i 位于入射面, B^i 沿

本文于1982年10月25日收到。

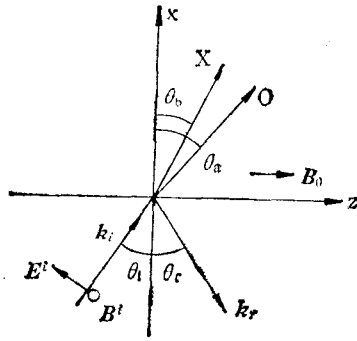


图 1 E^i 平行入射平面, 内侧射入

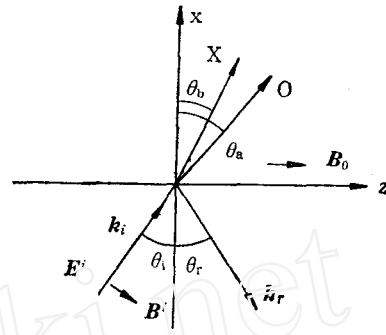


图 2 E^i 垂直入射面, 内侧射入

y 方向. 图 2 是 E^i 垂直入射面而 B^i 位于入射面内.

当 E^i 平行入射面时, 公式是

$$E_x^a = A_a E_y^a \tag{1}$$

$$E_y^a = \frac{2E_z^i}{A_a B_a U_a - A_b B_b U_b \frac{V_a}{V_b}} \tag{2}$$

$$E_z^a = A_a B_a E_y^a \tag{3}$$

$$E_x^b = A_b E_y^b \tag{4}$$

$$E_y^b = -\frac{V_a}{V_b} E_y^a \tag{5}$$

$$E_z^b = A_b B_b E_y^b \tag{6}$$

$$E_x^r = E_z^r \tan \theta_i \tag{7}$$

$$E_y^r = E_y^a + E_y^b \tag{8}$$

$$E_z^r = E_z^a + E_z^b - E_z^i \tag{9}$$

其中 E^a, E^b, E^r 分别表示 O 波、X 波和 r 波的电场. A_a, B_a, U_a, V_a 等见附录一.

当 E^i 垂直入射面时, 公式是

$$E_x^a = A_a E_y^a \tag{10}$$

$$E_y^a = \frac{E_z^i \sin 2\theta_i}{V_a - \frac{A_a B_a U_a}{A_b B_b U_b} V_b} \tag{11}$$

$$E_z^a = A_a B_a E_y^a \tag{12}$$

$$E_x^b = A_b E_y^b \tag{13}$$

$$E_y^b = -\frac{A_a B_a U_a}{A_b B_b U_b} E_y^a \tag{14}$$

$$E_z^b = A_b B_b E_y^b \tag{15}$$

$$E_x^r = E_z^r \tan \theta_i \tag{16}$$

$$E_y^r = E_y^a + E_y^b - E_y^i \tag{17}$$

$$E_z^r = E_z^a + E_z^b \tag{18}$$

三、不同入射方式时的 O 波及 X 波

对于托卡马克,如波从外侧射入,则 O 波可到达等离子体中心即磁轴处^[8],条件是磁轴处的电子回旋频率 $\omega_{co} > \omega_{po}$, ω_{po} 是磁轴处电子朗缪尔频率. 而 X 波从边界向磁轴传播时,中途会遇到截止点. 如果波从内侧射入,则 O 波及 X 波都能到达磁轴. 设入射波频率 $\omega = \omega_{co}$, 内侧边界的 $\omega_c = 1.4\omega_{co}$, 外侧边界的 $\omega_c = 0.7\omega_{co}$, 这是通常托卡马克的参数范围, 对内侧及外侧射入,都作了计算.

对边界的密度变化,我们考虑了两种情况. 一种是扩散边界,即边界处等离子体密度很小,但有限. 在图 3、图 4、图 6、图 7 的计算中,设边界处的密度是磁轴处的 1/15, 而磁轴处 $\omega_{po} = \omega_{co}$. 另一种是锐边界,即边界处密度很大,从真空到等离子体,密度有跳跃,这是限制器的影响所致,在计算中用密度跳跃来近似描述实际情况中的很大的梯度. 图 5、图 8 是锐边界,取边界处的密度是磁轴处的 1/5.

图 3—图 5 是把入射波能量 W_i 归一化为 1, 利用(1)—(18)式及玻印廷矢量, 求出 O 波、X 波及 r 波的能量与 θ_i 的关系. 分 E^i 平行及垂直入射面两种情况.

由图 3、图 4 看到,当 E^i 平行入射面,在 θ_i 较小时,O 波的能量远大于 X 波. 这是因

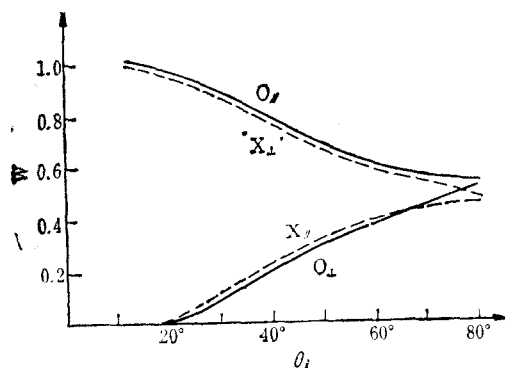


图 3 内侧射入,扩散边界. $O_{\parallel}, X_{\parallel}, O_{\perp}, X_{\perp}$ 为 E^i 平行及垂直入射面时 O 波及 X 波能量

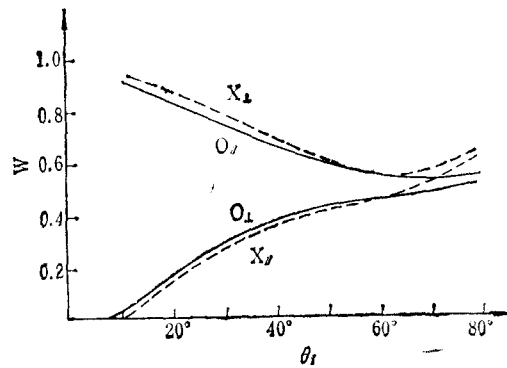


图 4 外侧射入,扩散边界 符号与图 3 相同

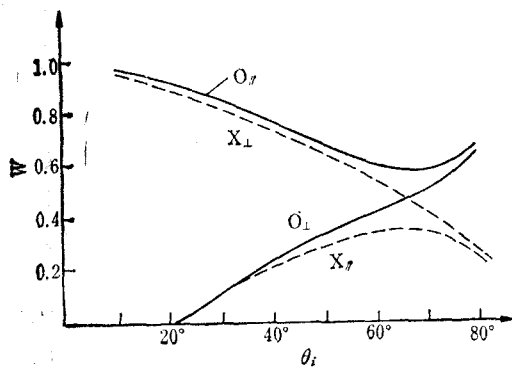


图 5 内侧射入,锐边界 符号与图 3 相同

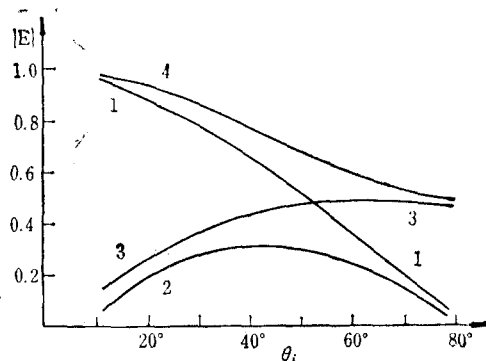


图 6 内侧射入,扩散边界. 1,2 为 O_{\parallel} 和 O_{\perp} 的 $|E_x|$, 3,4 为 X_{\parallel} 和 X_{\perp} 的 $|E_y|$

为当 θ_i 很小(接近于垂直入射)时, E^i 接近于沿 z 的方向, 此时 O 波折射角 $\theta_a \approx \theta_i$ (图 9、图 10), 故 O 波近似于垂直传播, 其电场也接近于沿 z 方向, 所以入射波的电场形状近似于 O 波, 因而入射波的能量主要转移给 O 波, 而 X 波的能量则很小. 当 θ_i 增大时, O 波能量渐降, X 波则渐升, θ_i 接近 90° 时, 二者的能量趋于相等.

当 E^i 垂直入射面时, O 波及 X 波的能量随 θ_i 的变化, 与 E^i 平行入射面时正好相反.

比较图 3 和图 4, 可见内侧射入及外侧射入对能量的分配影响不大.

计算表明 r 波能量很小, 在图 3、图 4 的参数范围, 当 θ_i 较小时为 10^{-2} 量级, 当 θ_i 增至 80° 时, r 波能量逐渐增大但小于 10^{-2} , 故图中略去. 作为比较, 图 5 是锐边界时的能量分配情形, 它与扩散边界的情况大致相同.

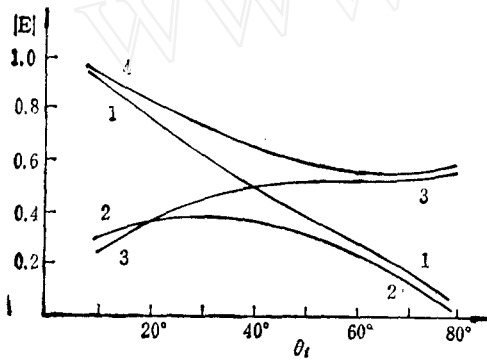


图 7 外侧射入, 扩散边界. 符号与图 6 相同

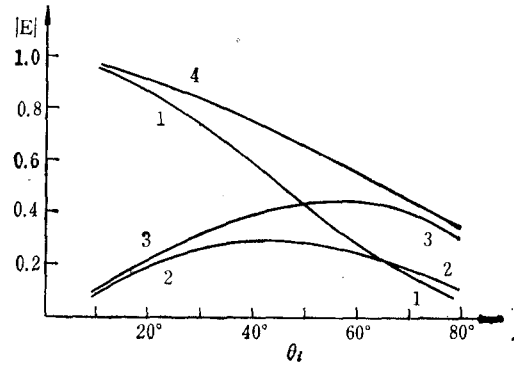


图 8 内侧射入, 锐边界. 符号与图 6 相同

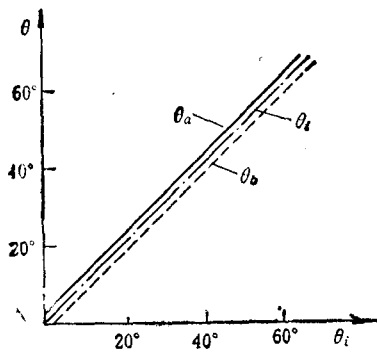


图 9 内侧射入, 扩散边界

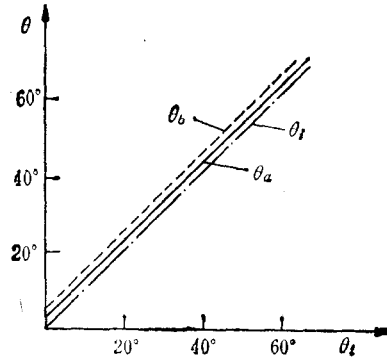


图 10 外侧射入, 扩散边界

图 6、图 7 给出把入射波的电场 E^i 归一化为 1 时, 内侧及外侧射入时 O 波的 $|E_z|$ 及 X 波的 $|E_y|$ 随 θ_i 变化的曲线. Fidone^[9] 曾求出当 $\frac{k_{\perp}}{k} \ll 1$ (即 θ_i 较小) 时, 等离子体吸收 O 波和 X 波功率的关系是: $P_o \propto |E_z|^2$; $P_x \propto |E_y|^2$. 由图 6、图 7 可见, E^i 平行入射面时, θ_i 较小时 O 波的 $|E_z|$ 很大而 X 波的 $|E_y|$ 很小; 当 E^i 垂直入射面, O 波的 $|E_z|$ 很小而 X 波的 $|E_y|$ 很大. 作为比较, 图 8 给出锐边界时内侧射入的 O 波的 $|E_z|$ 及 X 波的

$|E_y|$.

图 9 是内侧射入和扩散边界时, O 波和 X 波的折射角 θ_a 和 θ_b 随 θ_i 的变化曲线. 可见 $\theta_a > \theta_i$ 而 $\theta_b < \theta_i$. 二者与 θ_i 的偏离很小. 在锐边界情况下, 上述性质不变. 图 10 是外侧射入时的结果, 此时 $\theta_b > \theta_a > \theta_i$, θ_a 与 θ_b 偏离 θ_i 也很小.

由图 9、图 10 可认为, $\theta_a \approx \theta_b \approx \theta_i$.

四、结 论

Fidone^[9] 计算了 O 波及 X 波在等离子体中的 k'' (波矢 \mathbf{k} 的虚部), 据此来判断 O 波及 X 波加热的优劣. 这样的讨论只是问题的一方面. 因为由图 3—图 5 可见, 当 θ_i 小时, 只当 \mathbf{E}^i 平行入射面时, O 波的加热才有意义, 而 X 波的加热是无意义的, 因为入射波的能量绝大部分转移给 O 波, 即使 X 波的 k'' 较大, 其加热效果也不会明显. 反之, 当 \mathbf{E}^i 垂直入射面时, X 波加热有意义, 而 O 波的加热无意义.

另外, 比较图 3 与图 5, 图 6 与图 8, 可见锐边界与扩散边界的差别不大.

附录一 公式(1)—(9)的推导

由图 1, 设 \mathbf{E}^i 平行入射面, \mathbf{B}^i 沿 y 方向. 以 $\alpha = i, r, a, b$ 代表入射、反射、寻常及非常波. 物理量 F 表为

$$F^{(\alpha)} = F^{\alpha} \exp\{ik_{\alpha}(x \cos \theta_{\alpha} + z \sin \theta_{\alpha})\} \quad (1.1)$$

设等离子体边界无面电流和面电荷, 则分界面 ($N = 0$) 处的边界条件是

$$E_y(+0) = E_y(-0); \quad E_z(+0) = E_z(-0) \quad (1.2)$$

$$B_y(+0) = B_y(-0); \quad B_z(+0) = B_z(-0) \quad (1.3)$$

$$D_x(+0) = D_x(-0); \quad B_x(+0) = B_x(-0) \quad (1.4)$$

在边界处温度一般很低, 故色散关系是^[11]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 - N^2 - \cos^2 \phi & i\epsilon_2 & N^2 \cos \phi \sin \phi \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \phi \sin \phi & 0 & \epsilon_3 - N^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

其中 ϕ 是 \mathbf{k} 与 z 轴夹角.

对 r 波, $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$, $\epsilon_2 = 0$, $N = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_r$, 由(1.5)可得

$$E_x^r \cos \theta_r + E_z^r \sin \theta_r = 0 \quad (1.6)$$

同理, 对 O 波及 X 波, 由(1.5)得到

$$\left. \begin{aligned} -i\epsilon_2 E_x^a + (\epsilon_1 - N_a^2) E_y^a &= 0 \\ N_a^2 \sin \theta_a \cos \theta_a E_x^a + (\epsilon_3 - N_a^2 \cos^2 \theta_a) E_z^a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} -i\epsilon_2 E_x^b + (\epsilon_1 - N_b^2) E_y^b &= 0 \\ N_b^2 \sin \theta_b \cos \theta_b E_x^b + (\epsilon_3 - N_b^2 \cos^2 \theta_b) E_z^b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 得到

$$E_x^i \sin \theta_i - E_z^i \cos \theta_i = B_y^i \quad (1.9)$$

$$-E_y^i \sin \theta_i = B_x^i \quad (1.10)$$

$$E_x^i \sin \theta_i - E_z^i \cos \theta_i = B_y^i \quad (1.11)$$

$$E_y^i \cos \theta_i = B_x^i \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} -N_a \sin \theta_a E_y^a = B_x^a & (1.13) \\ N_a \sin \theta_a E_x^a - N_b \cos \theta_b E_z^b = B_y^a & (1.14) \\ N_a \cos \theta_a E_z^a = B_z^a & (1.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_b \sin \theta_b E_y^b = B_x^b & (1.16) \\ N_b \sin \theta_b E_x^b - N_b \cos \theta_b E_z^b = B_y^b & (1.17) \\ N_b \cos \theta_b E_z^b = B_z^b & (1.18) \end{cases}$$

由(1.2),(1.3)式得到边条件

$$E_y^a + E_y^b = E_y^r \quad (1.19)$$

$$E_z^a + F_z^b = E_z^r + E_z^i \quad (1.20)$$

$$B_x^a + B_x^b = B_x^r + B_x^i \quad (1.21)$$

$$B_y^a + B_y^b = B_y^r \quad (1.22)$$

代(1.1)入(1.20),有关系

$$k_a \sin \theta_a = k_b \sin \theta_b = k_r \sin \theta_r = k_i \sin \theta_i$$

于是有

$$\begin{cases} \theta_r = \pi - \theta_i \\ N_a \sin \theta_a = \sin \theta_i; N_b \sin \theta_b = \sin \theta_i \end{cases} \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

(1.24)就是 Snell 定律.

代(1.9),(1.11),(1.14),(1.17)式入(1.21)式,并计及(1.6)——(1.8),就有

$$-\varepsilon_3 \left(\frac{E_z^a}{N_a \cos \theta_a} + \frac{E_z^b}{N_b \cos \theta_b} \right) = \frac{1}{\cos \theta_i} (E_z^r - E_z^i) \quad (1.25)$$

代(1.12)(1.15)(1.18)入(1.22),计及(1.19),得

$$(N_a \cos \theta_a + \cos \theta_i) E_y^a + (N_b \cos \theta_b + \cos \theta_i) E_y^b = 0 \quad (1.26)$$

定义

$$\left. \begin{aligned} A_a &= \frac{\varepsilon_1 - N_a^2}{i\varepsilon_2}, & B_a &= \frac{N_a^2 \sin \theta_a \cos \theta_a}{N_a^2 \cos^2 \theta_a - \varepsilon_3} \\ U_a &= 1 + \frac{\varepsilon_3 \cos \theta_i}{N_a \cos \theta_a}, & V_a &= N_a \cos \theta_a + \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

如把下标 a 换成 b , 就是 A_b, B_b, U_b 和 V_b .

采用 A_a 等符号后,即得(1)——(9)式. 其中(1),(3)来自(1.7)式,(4),(6)来自(1.8)式,(5)来自(1.26)式,(2)是由(1.25),(3),(6),(8),(9)式得到.

给定 E_z^i 及 θ_i 后,就可由(1)——(9)式求出 $E_{x,y,z}^a, \alpha = a, b, r$. 再由(1.9)——(1.18)式求出 $E_{x,y,z}^b$.

在上述各表达式中,折射率 N_a 及 N_b 由 Booker 公式给出^[11],但 Booker 公式是通过 q 式间接表出 N^2 的. 下面我们导出通过 θ_i 表出 N^2 的公式.

已知 N^2 为^[12]

$$N^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1.28)$$

$$A = \varepsilon_1 \sin^2 \phi + \varepsilon_3 \cos^2 \phi, \quad B = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \phi) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) \sin^2 \phi, \quad C = \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2).$$

计及 $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$, 有关系

$$\cos^2 \phi = \sin^2 \theta = \sin^2 \theta_i / N^2 = S / N^2$$

$S = \sin^2 \theta_i$, 上式已用了 Snell 定律. 这样, A, B, C 可改写为: $A = \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) S / N^2, B = (-\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) + (-\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) S / N^2, C = \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2)$, 代入(1.28)式,得到

$$N^2 = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'} \quad (1.29)$$

其中 $A' = \varepsilon_1$, $B' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)S - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2$, $C' = (-\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2)S + \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2)$. θ_i 一定,就可得到 N^2 .

附录二 公式(10)–(18)的推导

由图 2, E^i 垂直入射面, B^i 平行入射面. 此时(1.2)–(1.8)式不变,(1.9)式改为

$$E_z^i \cos \theta_i = B_z^i; \quad -E_z^i \sin \theta_i = B_x^i \quad (2.1)$$

于是

$$\frac{B_x^i}{B_z^i} = -\tan \theta_i \quad (2.2)$$

(1.10)–(1.18)式不变;(1.19)–(1.22)式变成

$$E_y^a + E_y^b = E_y^c + E_y^d \quad (2.3)$$

$$E_z^a + E_z^b = E_z^c \quad (2.4)$$

$$B_y^a + B_y^b = B_y^c \quad (2.5)$$

$$B_z^a + B_z^b = B_z^c + B_z^d \quad (2.6)$$

(1.23)、(1.24)式仍成立,(1.25)及(1.26)式变成

$$-\varepsilon_3 \left(\frac{E_z^a}{N_a \cos \theta_a} + \frac{E_z^b}{N_b \cos \theta_b} \right) = \frac{1}{\cos \theta_i} E_z^c \quad (2.7)$$

$$(N_a \cos \theta_a + \cos \theta_i) E_y^a + (N_b \cos \theta_b + \cos \theta_i) E_y^b = 2E_y^c \cos \theta_i \quad (2.8)$$

于是就得到(10)–(18)式.

参 考 文 献

- [1] Аликаев, В. В., и др. *Физика Плазмы*, **2** (1976) 390.
- [2] Пилюя, А. Д., и др. *Ж. Т. Ф.*, **34** (1964) 1753.
- [3] Тимофеев, А. В., *Успех Физ. Наук* **110** (1973) 329.
- [4] Sprott, J. C., et al, *Phys. Fluid*, **14** (1971), 2703.
- [5] Kuckes, A. F., *Plasma Phys*, **10**(1968), 367.
- [6] Балмашинов, А. А., и др. *Ж. Т. Ф.*, **45** (1975) 766.
- [7] Brambilla, M., *Plasma Phys*, **10**(1968) 359.
- [8] Litvak, A. G., *Nucl. Fusion*, **17**(1977). 659.
- [9] Fidone, I., et al., *Phys. Fluid*, **21** (1978) 645.
- [10] Ott, E., et al., *Phys. Fluid*, **23** (1980), 1031.
- [11] Budden, K. G., *Radio Waves in the Ionosphere*, (1961), Chap. 8.
- [12] Akhiezer, A. I., et al., *Plasma Electrodynamics*, (1975), Chap. 5, p. 212–213.

EFFECTS OF DIFFERENT PATTERNS OF WAVE INCIDENCE TO THE PLASMA HEATING BY WAVES

Kang Shouwan

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

ECRH of Tokamak plasma is examined. When plasma is heated by waves, we must consider the distribution of incident wave energy to O mode and X mode as the wave is incident from vacuum to the surface of plasma as well as the absorption efficiency of O mode and X mode.

Numerical calculation shows that for small incident angle, the incident energy transfers principally into O mode when the electric field E^i of incident wave is parallel to the incident plane, therefore it is efficient to heat the plasma by O mode. When E^i is perpendicular to the incident plane, the energy transfers principally into X mode and heating the plasma by X mode is efficient.