理想塑性材料裂纹顶端附近的渐近解

王 克 仁

（中国科学院力学研究所）

Hutchinson[1] 和 Shih[2] 在讨论幂硬化材料裂纹顶端附近的渐近解时同时提出了理想塑性材料的应力分布（位移和应变是无法确定的）。本文指出，对于理想塑性材料来说，裂纹顶端附近的应力分布并非唯一的。下面讨论平面应变的情况，结果不难推广到其他情况。

采用图 1 所示的极坐标，引入应力函数 φ，命

图 1

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这时平衡条件已经满足。屈服条件为

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 \tag{2}$$

k 为材料常数。由于对于理想塑性材料应力是有限的，在裂纹顶端附近可以命

$$\varphi = r^2\tilde{\varphi}(\theta) \tag{3}$$

（在本文中带波纹的量均仅为 θ 的函数），则在裂纹顶端附近有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \tilde{\sigma}_r(\theta) = 2\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}'' \\ \sigma_\theta &= \tilde{\sigma}_\theta(\theta) = 2\tilde{\varphi} \\ \tau_{r\theta} &= \tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) = -\tilde{\varphi}' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

屈服条件成为

$$(\tilde{\varphi}'')^2 = 4(k^2 - \tilde{\varphi}'^2) \tag{5}$$

该方程式的通解为：

$$\tilde{\varphi} = \frac{k}{2}\left[\cos 2(\theta + \alpha) + \beta\right] \tag{6}$$

$$\tilde{\varphi} = \pm k(\theta + \gamma) \tag{7}$$

其中 α, β, γ 为任意常数。根据滑移线场理论，解 (6) 即为均匀应力区，解 (7) 为扇形区。对于对称（I 型）的情况，边界条件为 $\tilde{\varphi}'(0) = 0$，$\tilde{\varphi}(\pi) = \tilde{\varphi}'(\pi) = 0$。在 $\theta =$ 常数的射线上，$\tilde{\sigma}_\theta$ 和 $\tilde{\tau}_{r\theta}$ 必须连续，$\tilde{\sigma}_r$ 则允许有间断。在该情况下，有如下解：

a 区：$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \frac{k}{2}[\cos 2\theta + 4(\theta_1 + \theta_2) - 2\cos 2\theta_1 \\ &\quad - 2\cos 2\theta_2 + 1 - \pi] \\ \tilde{\sigma}_r &= -k[\cos 2\theta - 4(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad + 2\cos 2\theta_1 + 2\cos 2\theta_2 - 1 + \pi] \\ \tilde{\sigma}_\theta &= k[\cos 2\theta + 4(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad - 2\cos 2\theta_1 - 2\cos 2\theta_2 + 1 - \pi] \\ \tilde{\tau}_{r\theta} &= k\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

参 考 文 献

[1] LYNN, P. P. and DHILLON, B. S. TRIANGULAR THICK PLATE BENDING ELEMENTS, Proceeding of the 1st International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, M6/5 (1971).

[2] 胡海昌，广义变分原理在近似解中的合理应用，力学学报，1(1982).

[3] 铁三院科研所综合室，平行四边形单元单刚计算手册 (1979).

[4] 王钦儒，厚板壳元计算手册，铁三院科研所资料，6(1982).

[5] 叶蜚章、王钦儒，斜框构薄板与厚板假定有限元计算比较，科技通讯，5(1982).

（本文于 1984 年 3 月 22 日收到）

b 区：$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} + 2\theta_1$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= -\frac{k}{2}[\cos 2(\theta - 2\theta_1) - 4(\theta_1 + \theta_2) \\
&\qquad + 2\cos 2\theta_2 - 1 + \pi] \\
\tilde{\sigma}_r &= k[\cos 2(\theta - 2\theta_1) + 4(\theta_1 + \theta_2) \\
&\qquad - 2\cos 2\theta_2 + 1 - \pi] \\
\tilde{\sigma}_\theta &= -k[\cos 2(\theta - 2\theta_1) - 4(\theta_1 + \theta_2) \\
&\qquad + 2\cos 2\theta_2 - 1 + \pi] \\
\tilde{\tau}_{r\theta} &= -k\sin 2(\theta - 2\theta_1)
\end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

c 区：$\dfrac{\pi}{4} + 2\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4} - 2\theta_2$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= k\left(\theta - \cos 2\theta_2 + 2\theta_2 + \frac{1}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \\
\tilde{\sigma}_r &= 2k\left(\theta - \cos 2\theta_2 + 2\theta_2 + \frac{1}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \\
\tilde{\sigma}_\theta &= \tilde{\sigma}_r \\
\tilde{\sigma}_{r\theta} &= -k
\end{aligned}\right\} \tag{8c}$$

d 区：$\dfrac{3\pi}{4} - 2\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_2$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= \frac{k}{2}[\cos 2(\theta + 2\theta_2) + 1 - 2\cos 2\theta_2] \\
\tilde{\sigma}_r &= -k[\cos 2(\theta + 2\theta_2) - 1 + 2\cos 2\theta_2] \\
\tilde{\sigma}_\theta &= k[\cos 2(\theta + 2\theta_2) + 1 - 2\cos 2\theta_2] \\
\tilde{\tau}_{r\theta} &= k\sin 2(\theta + 2\theta_2)
\end{aligned}\right\} \tag{8d}$$

e 区：$\pi - \theta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= \frac{k}{2}(1 - \cos 2\theta) \\
\tilde{\sigma}_r &= k(1 + \cos 2\theta) \\
\tilde{\sigma}_\theta &= k(1 - \cos 2\theta) \\
\tilde{\tau}_{r\theta} &= -k\sin 2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{8e}$$

其中 θ_1，θ_2 可以任意调节，只需满足

$$\theta_1 \geqslant 0, \quad \theta_2 \geqslant 0$$

和

$$\theta_1 + \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

在 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \pi - \theta_2$ 两处 $\tilde{\sigma}_r$ 有间断，其余应力均连续．不难证明，在上述五个区域内，仅有 c 区允许产生塑性变形．这个区域扫过的角度不超过 $\pi/2$，其位置在 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$ 内则是任意的．注意，当 θ_1 或 θ_2 等于零时，a 区或 e 区消失，相应的 b 区或 d 区内的应力改变符号，从而 c 区内的应力也改变符号．θ_1 和 θ_2 同时为零的情况也就是 Hutchinson[1] 所给出的那个解，应力是全部连续的．在文献[2]中指出，在复合型的情况下，应力全部连续的解并不存在．采用本文相同的方法不难证明，文献[2]给出的解也不是唯一的，这里限于篇幅，不加详细说明了．

参 考 文 献

[1] Hutchinson, J. W., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **16**, 1 (1968), pp. 13—31.

[2] Shih, C. F., Fracture Analysis, ASTM STP 560 (1974), pp. 187—210.

（本文于 1983 年 10 月 9 日收到）

（上接第48页）

在短时间内，例如在一个周期内，随时间衰减的动量矩 H 与其平均值 $\bar{H}$ 相差很小．我们的实验分析表明：其相对“误差”小于 1%，所以分析一个周期的运动，实验数据是可靠的．

这里仅分析五张照片的实验数据

($\lambda = 2.23$, $k = 0.417$; $\lambda = 2.53$ $k = 0.348$; $\lambda = 2.70$, $k = 0.143$; $\lambda = 2.93$, $k = 0.071$; $\lambda = 3.18$, $k = 0.487$)

图 2，3，4，5 给出了准确解（11），（13），正则摄动解（15），（16），奇异摄动解（19），（28）与实验结果间的相互比较．

各图表明，准确解与实验结果十分相符．

$\lambda \leqslant 3$ 采用二阶近似的正则摄动解，$\lambda > 3$ 采用二阶近似的奇异摄动解，能与准确解极好的吻合．这样一来，在问题的整个 k，λ 参数范围内，我们得到了近似程度甚好的分析解．

参 考 文 献

[1] 朱照宣等编，理论力学(上)，北京大学出版社 (1981).

[2] 钱伟长主编，奇异摄动理论及其在力学上的应用，科学出版社 (1981).

[3] 丁汝，摄动法及其在力学上的应用，在力学研究所的讲学讲义 (1981).

[4] Van Dyke, M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York (1964).

（本文于 1984 年 7 月 28 日收到）