

斜加筋悬臂板的振动分析

中国科学院力学研究所 缪经良 欧阳怡

提要 本文利用李国豪教授1957年提出的斜交异性板的弯曲理论中的变形关系^[1], 由能量法推导了这种板的刚度矩阵, 求得了板的振动方程及其边界条件。还选用了一组未曾分离变量的形函数, 并使它既能满足位移边界条件, 又以能量形式满足力的边界条件。编制了计算程序, 计算了这种结构的固有频率和振型。与实验结果^[2]比较, 两者符合较好。

一、引言

自李国豪教授1957年提出斜交异性板的弯曲理论以来, Morly也讨论过这一类问题^[3], 林之培等还按李氏理论用变分法计算了一对简支边、一对自由边的加筋斜板的静力问题^[4]。目前, 在航空和导弹工程中, 小展弦比翼面已普遍应用, 如果把蒙皮和桁条结构看作为加筋板的话, 则这类振动问题属于斜加筋斜板的振动问题。有关这类研究工作的论文发表不多。文献〔2〕研究过这种结构的振动问题, 该文是按各向异性板来计算的, 并用梁函数的方法, 求得了斜加筋悬臂板的低阶频率。但没有求解振型。本文分别考虑表板和筋的势能, 导出该板的刚度矩阵。用能量法推导了运动方程边界条件, 然后选用了一组未曾分离变量的形函数, 使它既能满足位移边界条件, 又能以能量形式满足力的边界条件, 从而获得了方程的级数解。利用所编制的计算程序得到了两组板的各阶频率和振型的数值结果。顺便指出: 这种方法可以推广到任意多边形板的振动分析。并不限于下面将要讨论的平行四边形板。

二、加筋斜板的势能和刚度矩阵

为了方便, 我们研究的板是一块平行四边形板, 两边夹角为 α , 板内的筋条亦平行于两夹边。如图1所示。

由斜坐标系、直角坐标系之间的应力应变关系^[4], 利用能量法, 不难导出斜加筋板的总势能 U_0 。

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint X'^T D X' S dx dy \quad (1)$$

此处

$$D = \frac{1}{S^4} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

D 为斜加筋悬臂板的刚度矩阵。其中每一个元素如下:

$$D_{11} = S^4 \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{\lambda_y} [I_x + F_0(z_1 - z'_1)^2] + D_0 + C^2 S^2 \left[\frac{E z_1'^2 h_1}{2(1+\nu)} + \frac{k_x}{\lambda_y} \right]$$

$$+ \frac{E}{1-\nu^2} z_1'^2 h_1 (1 - C^2 S^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = (C^2 + S^2 \nu) D_0 + S^2 \frac{\nu + \nu S^2 - C^2}{2} \frac{E z_1' z_2' h_1}{1-\nu^2}$$

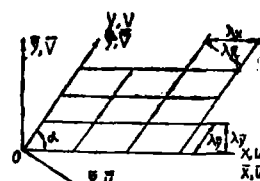


图1

$$D_{22} = S^4 \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{\lambda_x^2} [I_x + F_0(z_2 - z_2')^2] + D_0 + C^2 S^2 \left[\frac{E z_2'^2 h_1}{2(1+\nu)} + \frac{K_y}{\lambda_x^2} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} z_2'^2 h_1 (1 - C^2 S^2)$$

$$D_{13} = D_{31} = -C \left(D_0 + \frac{S^2}{2} \frac{K_x}{\lambda_y} \right)$$

$$D_{23} = D_{32} = -C \left(D_0 + \frac{S^2}{2} \frac{K_y}{\lambda_x} \right)$$

$$D_{33} = \frac{1+C^2-S^2\nu}{2} D_0 + \frac{S^2}{4} \left(\frac{K_x}{\lambda_y} + \frac{K_y}{\lambda_x} \right)$$

$$D_0 = \frac{E h_1^3}{12(1-\nu^2)}$$

此处, k_x, k_y 分别为沿 x, y 轴的抗扭刚度。可用如下近似公式计算之:

$$k_x = k_y = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1}{3} d h^3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{h_2}{d} \operatorname{th} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{d}{h_2} \right)$$

E 为材料的杨氏模量; ν 为材料的泊桑比; h_1 为面板厚度; h_2 为筋厚度; d 为筋宽度; z_1, z_2 为筋的重心至面板中心的距离; z_1', z_2' 为斜加筋板在 x, y 方向的弯曲中心; F_0 为筋的横截面积; I_x, I_y 为沿 x, y 轴的筋的惯矩。

这里, 要精确计算 z_1', z_2' 是一个比较复杂的问题。因为这里是相交加筋板。我们引用文献〔5〕所述的宽梁翼有效宽度的计算公式来计算筋之间板面受力不均匀, 而代以均匀受力的等效宽度。其公式为:

$$\lambda' = \frac{1}{\pi(3+2r-r^2)} \quad (2)$$

此处, l 为筋的自由长度, r 为有效宽度。

对于强加筋板, 主要承受载荷的是筋, 所以, z_1', z_2' 可近似地用 z_1, z_2 来代替。但是, 实际上的加筋板往往不是这样。如果轻易地用 z_1, z_2 来代替 z_1', z_2' , 则会产生很大误差。在我们的算例中, 即便是第一阶频率, 误差也达到 51.4% 以上。显然, 合理选取斜加筋板的弯曲中心, 往往对计算起着决定性的影响。

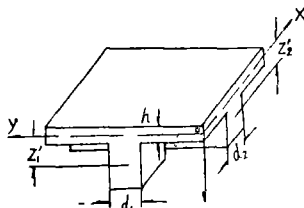


图 2

三、振动方程、边界条件及其解

用能量法推导振动方程及边界条件。如图 3 所示, 三自由边 $c_1 + c_2 + c_3$ 为力的边界条件, 固支端 c_4 为位移边界条件。此板的动能为:

$$T = 1/2 \iint \rho h \omega^2 W^2 S dx dy \quad (3)$$

能量的变分泛函为:

$$\pi = U_0 - T = \frac{1}{2} \iint X'^T D X' S dx dy - \frac{1}{2} \iint \rho h \omega^2 W^2 S dx dy \quad (4)$$

由 $\delta\pi = 0$, 再经分部积分后得:

$$\delta\pi = \iint (F^T D F W - \rho h \omega^2 W) \delta W S dx dy - \int_0^a \left[D_2 F W S \delta \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]_{y=0} dx$$

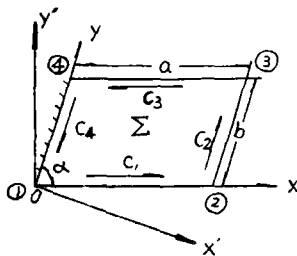


图 3

$$\begin{aligned}
& + \int_0^a \left\{ \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \delta W \right\}_{r=0} dx \\
& + \int_0^b \left[D_1 FWS \delta \left(-\frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]_{x=a} dy \\
& - \int_0^b \left\{ \left[D_1 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \delta W \right\}_{x=a} dy \\
& - \int_a^0 \left[D_2 FWS \delta \left(-\frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]_{r=b} dx \\
& + \int_a^0 \left\{ \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \delta W \right\}_{r=b} dx \\
& + \int_b^0 \left[-\frac{\partial W}{\partial x} \delta (D_1 FWS) \right]_{x=0} dy \\
& - \int_b^0 \left\{ W \delta \left[D_1 \frac{\partial}{\partial x} (FW) S + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} (FW) S \right] \right\}_{x=0} dy \\
& + W_1 \delta [2D_3 F W_1 S] \\
& - 2D_3 F W_2 S \delta W_2 + 2D_3 F W_3 S \delta W_3 - W_4 \delta [2D_3 F W_4 S]
\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{S^4} [D_{11} D_{12} D_{13}] \\ D_2 &= \frac{1}{S^4} [D_{21} D_{22} D_{23}] \\ D_3 &= \frac{1}{S^4} [D_{31} D_{32} D_{33}] \end{aligned}$$

考虑到变分号的各自独立性, 可得振动微分方程:

$$(F \cdot DF - \lambda) W = 0 \tag{6}$$

边界条件有:

$$x=0: \left. \begin{aligned} \bar{W} &= W \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

$$x=a: \left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= -D_1 FWS \\ \bar{Q}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{M}_{x,y} &= \left[D_1 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

$$y=0: \left. \begin{aligned} \bar{M}_y &= -D_2 FWS \\ \bar{Q}_y + \frac{\partial}{\partial x} \bar{M}_{y,x} &= \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$y=b: \left. \begin{aligned} \bar{M}_y &= -D_2 FWS \\ \bar{Q}_y + \frac{\partial}{\partial x} \bar{M}_{y,x} &= \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (FW) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (FW) \right] S \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

角点条件:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= W_1 \\ \bar{Q}_2 &= 2D_3 F W_2 S \\ \bar{Q}_3 &= -2D_3 F W_3 S \\ \bar{W}_4 &= W_4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 $\lambda = \rho h \omega^2$; h 是平均厚度。

平均厚度的计算是按算术平均法进行的, 它仅与系统的动能 T 的值有关。我们曾分别对面板和筋求系统的动能, 与此进行比较, 发现其计算结果极为接近, 这可能是因为筋的均匀分布所致, 而求取系统势能时, 弯曲中心值的选取则对计算结果有较大影响, 这在前面已作叙述。

设振动方程 (6) 解的形式为:

$$W = B^T \Phi \quad (12)$$

此处 B 为特征向量, Φ 为形函数。

$$B = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} \quad \Phi = \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \\ \vdots \\ \phi_n(x, y) \end{Bmatrix}$$

又设 $\phi_i(x, y) = X^T A^i Y$

$$X = \begin{Bmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \\ \vdots \\ X_{n_1}(x) \end{Bmatrix}; \quad Y = \begin{Bmatrix} Y_1(y) \\ Y_2(y) \\ \vdots \\ Y_{n_2}(y) \end{Bmatrix}; \quad A^i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & \cdots & A_{1n_2}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & \cdots & A_{2n_2}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_11}^i & A_{n_12}^i & \cdots & A_{n_1n_2}^i \end{pmatrix}$$

矩阵 A^i 是为了满足某些特定边界条件而设立的。用克雷洛夫函数的组合形式作为 X 和 Y 的函数。

$$\text{选取 } X_i(x) = U(\lambda_i \frac{x}{a}) - \frac{U(\lambda_i)}{V(\lambda_i)} V(\lambda_i \frac{x}{a}) \quad (i=1, 2, \dots, n_1) \quad (13)$$

$$Y_i(y) = \begin{cases} 1 \quad (i=1) \\ 1 - 2\frac{y}{b} \quad (i=2) \\ S(\lambda'_{i-2} \frac{y}{b}) - \frac{T(\lambda'_{i-2})}{U(\lambda'_{i-2})} T(\lambda'_{i-2} \frac{y}{b}) \quad (i=3, 4, \dots, n_2) \end{cases} \quad (14)$$

此处 λ_i 和 λ'_i 分别为下列方程第 i 个根

$$\left. \begin{aligned} 1 - \cos \lambda_i \operatorname{ch} \lambda_i &= 0 \\ 1 + \cos \lambda'_i \operatorname{ch} \lambda'_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

S 、 T 、 U 、 V 为一般的克雷洛夫函数。

矩阵 A^i 由力的边界条件确定:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b \left\{ D_1 \frac{\partial}{\partial x} [F(X^T A^i Y)] + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} [F(X^T A^i Y)] \right\} dy = 0 \\ \int_0^b D_1 F(X^T A^i Y) dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } C_2 \text{ 内, } x=a) \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \left\{ 2D_3 \frac{\partial}{\partial x} [F(X^T A^i Y)] + D_2 \frac{\partial}{\partial y} [F(X^T A^i Y)] \right\} dx = 0 \\ \int_0^a D_2 F(X^T A^i Y) dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } C_1 \text{ 内, } y=0) \quad (17)$$

$$\int_0^a \left\{ 2D_3 \frac{\partial}{\partial x} \left[F(X^{TA^i}Y) \right] + D_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[F(X^{TA^i}Y) \right] \right\} dx = 0 \quad \left(\text{在 } C_3 \text{ 内, } y=b \right) \quad (18)$$

$$\int_0^a D_2 F(X^{TA^i}Y) dx = 0$$

将(12)式代入(4)式, 并对 $B_i (i=1, 2, \dots, m)$ 变分后可得:

$$(\Omega - \rho h \omega^2 \psi) B = 0 \quad (19)$$

此处 $\Omega_{ij} = \int_0^a \int_0^b F^T(X^{TA^i}Y) DF(X^{TA^i}Y) dx dy$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \int_0^b \left[D_1 F(X^{TA^i}Y) \frac{\partial}{\partial x} (X^{TA^i}Y) + D_1 F(X^{TA^i}Y) \frac{\partial}{\partial x} (X^{TA^i}Y) \right] dy \right.$$

$$- \int_0^b \left[D_1 \frac{\partial}{\partial x} (F(X^{TA^i}Y)) + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} (F(X^{TA^i}Y)) X^{TA^i}Y \right] dy$$

$$- \left. \int_0^b \left[D_2 \frac{\partial}{\partial x} (F(X^{TA^i}Y)) + 2D_3 \frac{\partial}{\partial y} (F(X^{TA^i}Y)) X^{TA^i}Y \right] dy \right\}_{x=a}$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a \left[D_2 F(X^{TA^i}Y) \frac{\partial}{\partial y} (X^{TA^i}Y) + D_2 F(X^{TA^i}Y) \frac{\partial}{\partial y} (X^{TA^i}Y) \right] dx \right.$$

$$- \int_0^a \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (F(X^{TA^i}Y)) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (F(X^{TA^i}Y)) \right] X^{TA^i}Y dx$$

$$- \left. \int_0^a \left[2D_3 \frac{\partial}{\partial x} (F(X^{TA^i}Y)) + D_2 \frac{\partial}{\partial y} (F(X^{TA^i}Y)) \right] X^{TA^i}Y dx \right\}_{y=b}$$

$$+ \left[D_3 F(X^{TA^i}Y) X^{TA^i}Y + D_3 F(X^{TA^i}Y) X^{TA^i}Y \right]_{y=0}$$

$$- \left[D_3 F(X^{TA^i}Y) X^{TA^i}Y + D_3 F(X^{TA^i}Y) X^{TA^i}Y \right]_{y=b}$$

$$\psi_{ij} = \int_0^a \int_0^b X^{TA^i}Y \cdot X^{TA^i}Y dx dy$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m)$$

求解上式, 可得特征向量 B^i 和各阶频率 ω_i , 而各阶振型为:

$$W_i(x, y) = B^i X^{TA^i}Y \quad (20)$$

四、数值算例结果

根据上节所提供的计算方法, 编制了计算程序, 对两块铅金属的斜加筋悬臂板进行了计算。其大小如图4所示。材料的杨氏模量 $E=7.2 \times 10^5$ 克重/厘米², 泊松系数 $\nu=0.32$, 比重为 $\gamma=2.85$ 克重/厘米³。面板厚度 $h_1=2 \times 10^{-1}$ 厘米, 筋高 $h_2=4 \times 10^{-1}$ 厘米, 筋宽 $d=12/\sqrt{2} \times 10^{-1}$ 厘米, $\alpha=45^\circ$ 。计算结果列于表1。并从文献〔2〕中摘抄相应板的试验结果, 两者比较, 频率值符合较好。计算结果是在取 $m=10, n_1=n_2=4$ 的情况下获得的。如果再多取几项, 精度可以提高一些, 但所费机时要增多。

计算的节线和试验的结果如图5所示, 可以看出两者有差别。其原因可能为(1)在计算过程中发现板的刚度对节线位置影响较大, 稍微改变刚度的具体数值, 节线就有变化。因此刚度对此是很敏感的; (2)文献〔2〕中的试验结果是在接触式激振器激振下获得的, 这对板的刚度有影

响。故两者形状有差异,但所得振型节线对工程问题亦有一定的参考价值。

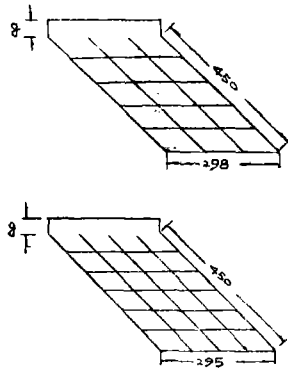


图4

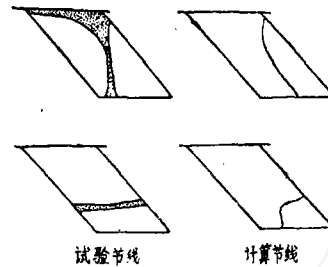


图5

表1 频率计算值与试验值比较

板号	a (厘米)	b (厘米)	筋 数		频率 f (Hz)		误差 %	平均误差 %
			x 方向	y 方向	计算值	试验值		
I	45	29.8	2	4	16.7	16.5	1.2	3.74
					59.9	61	1.8	
					103	113.5	9.3	
					171	168	1.8	
					289	279	3.6	
II	45	29.5	3	5	17.4	18	3.3	3.82
					63.4	63.4		
					107	120	10.8	
					177	185	4.3	
					301	303	0.7	

参考文献

- (1) 李国豪, 斜交异性板的弯曲理论及其对于斜桥的应用, 力学学报, 2卷1期, 1958年1月
- (2) 力学所十二室振动组, 悬臂平行四边形斜加筋板固有频率的计算和试验, 力学情报, 1976年固体力学专集2
- (3) Morley L.S.D., skew Plates and structures, 1963年
- (4) 林之培、程为和, 斜交构造异性板的弯曲理论及其在斜桥上的应用, 上海力学, 1980年2期
- (5) Timoshenko S., Goodiex J.N., Theory of Elasticity, 1951

请订阅《液压与气动》杂志

本杂志是液压气动专业的综合性技术刊物。主要报道本专业的基础理论、发展趋势、产品设计、应用技术方面的经验与成果,是连接生产、科研、教学、用户的纽带,是沟通情况、反映动态、交流成果、普及知识、促进发展的有力工具。欢迎投稿。本杂志由中国机械工程学会液压气动专业委员会、全国液压气动标准化技术委员会及机械工业部北京机械工业自动化研究所合办,可供液压气动技术领域从事科研、教学、设计、制造、使用的工程技术人员、管理人员、大专院校师生和技术工人阅读。

本刊为季刊,每期64页,定价0.9元,每季末月15日出版。读者可直接向当地邮局订阅(本刊代号2-828)。国外发行刊号:Q-813,国外发行:中国国际图书贸易总公司(北京2820信箱)。另需购本编辑部编印的“1985年液压气动专业研究生入学考试试题汇编”(每本1.5元),可直接与本刊编辑部联系。

《液压与气动》编辑部地址:北京德胜门外操场口1号
电话:442231-366 电报挂号:0112