

强非线性振子的渐近分析

戴世强

(中国科学院力学研究所, 1984年5月24日收到)

摘要

本文提出一种渐近方法, 用来分析一类强非线性自治振动系统, 给出了振幅和相位所满足的方程, 并确定了极限环的振幅和稳定性.

一、引言

如所周知, 应用奇异摄动法可以有效地处理弱非线性问题^[1,2], 但处理强非线性问题则较为困难. Кызмар^[3]和Luke^[4]曾用两变量展开法研究过有缓变系数的强非线性系统和非线性波 Whitham^[5]用平均变分法讨论过非线性波问题, 最近, Burton^[6]提出了一种时间变换法, 分析了强非线性振子的极限环性态. 在本文中, 我们提出一种较为简捷有效的摄动方法, 不仅可以给出强非线性振动系统的极限环振幅, 而且可以鉴定此极限环的稳定性.

假设强非线性自治振动可用如下方程描述:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + g(u) = \varepsilon f\left(u, \frac{du}{dt}\right) \quad (1.1)$$

其中, g 、 f 为它们的宗量的非线性解析函数, $\varepsilon > 0$ 为小参数. 我们还假设: 对应于 $\varepsilon = 0$ 的退化问题有周期解. 下一节我们概述求解(1.1)的方法; 接着用此法分析一个特例——修正的 van der Pol方程, 得到了与文献[6]一致的结果, 并且判定所得的极限环是稳定的. 本文的方法可望应用于其它一些强非线性振动和波动问题的分析.

二、方法的描述

当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程(1.1)化为

$$\frac{d^2u}{dt^2} + g(u) = 0 \quad (2.1)$$

假定(2.1)有周期解

$$u = u_0(a, \psi) \quad (2.2)$$

其中 a 为振幅(常数), ψ 为相位因子, u_0 为 ψ 的常周期函数, 不失一般性, 设该周期为 2π , 而且

$$\frac{d\psi}{dt} = B_0(a) \quad (2.3)$$

亦即(2.1)的解的周期为

$$T = \frac{2\pi}{B_0(a)} \quad (2.4)$$

由于(2.1)为非线性方程, 所以周期是振幅的函数. 容易证实, $u_0(a, \psi)$ 满足

$$B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} + g(u_0) = 0 \quad (2.5)$$

现在我们假设(1.1)的解仍有(2.2)的形式, 只是

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{d\psi}{dt} &= B_0(a) + \frac{d\theta}{dt} = B_0(a) + [\varepsilon B_1(a) + O(\varepsilon^3)] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\psi = \int_{t_0}^t B_0(a) dt + \theta(t) \quad (2.7)$$

也就是说, a 和 θ 是时间 t 的缓变函数, 因此,

$$\frac{du_0}{dt} = B_0 u_{0\psi} + \frac{da}{dt} u_{0a} + \frac{d\theta}{dt} u_{0\psi} \quad (2.8)$$

设

$$\frac{da}{dt} u_{0a} + \frac{d\theta}{dt} u_{0\psi} = 0 \quad (2.9)$$

于是有

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = B_0^2 u_{0\psi\psi} + \frac{da}{dt} [B_0 u_{0a\psi} + B_0'(a) u_{0\psi}] + \frac{d\theta}{dt} B_0 u_{0\psi\psi} \quad (2.10)$$

把(2.2)、(2.8)~(2.10)代入(1.1), 发现 $u_0(a, \psi)$ 仍满足(2.5), 同时有

$$\frac{da}{dt} [B_0 u_{0a\psi} + B_0'(a) u_{0\psi}] + \frac{d\theta}{dt} B_0 u_{0\psi\psi} = \varepsilon f(u_0, B_0 u_{0\psi}) \quad (2.11)$$

从(2.9)、(2.11)解得

$$\mathcal{D} \frac{da}{dt} = \varepsilon u_{0\psi} f(u_0, B_0 u_{0\psi}) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{D} \frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon u_{0a} f(u_0, B_0 u_{0\psi})$$

其中

$$\mathcal{D} = u_{0\psi} (B_0 u_{0a\psi} + B_0'(a) u_{0\psi}) - B_0 u_{0a} u_{0\psi\psi} \quad (2.13)$$

对(2.12)的两端在一个周期 $(t, t+T)$ 内取平均, 相当于关于 ψ 在 $(\psi, \psi+2\pi)$ 内取平均, 而且

把 $\frac{da}{dt}$ 、 $\frac{d\theta}{dt}$ 看成在此周期内不变, 我们得到

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) \quad (2.14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a) \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{F_1(a)}{D(a)}, & B_1 &= \frac{G_1(a)}{D(a)} \\ D &= \int_0^{2\pi} \mathcal{D} d\psi \\ F_1 &= \int_0^{2\pi} u_{0\psi} f(u_0, B_0 u_{0\psi}) d\psi \\ G_1 &= - \int_0^{2\pi} u_{0\alpha} f(u_0, B_0 u_{0\psi}) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

于是问题归结成求解方程组(2.14)(2.15); 若

$$F_1(a) = 0 \quad (2.17)$$

有解 $a = a_0$, 则 a_0 就是极限环的振幅.

容易看出, 这里描述的方法是Крылов-Боголюбов平均法^[7]的自然推广, К-Б方法的原型不能用来处理强非线性问题, 用本方法则能处理了.

三、应用

我们用上节描述的方法来研究修正的van der Pol方程:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u + u^3 = \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} \quad (3.1)$$

这时(2.5)变成

$$B_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \psi^2} - u_0 + u_0^3 = 0 \quad (3.2)$$

我们仅考察以 $u_0 = 0$ 为中心的振动(参看[2, § 3.6]), (3.2)的解为

$$u_0 = a \operatorname{cn}(\Psi, k), \quad \Psi = \frac{2K\psi}{\pi} \quad (3.3)$$

$$B_0^2 = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 (a^2 - 1), \quad k^2 = \frac{a^2}{2(a^2 - 1)} \quad (3.4)$$

式中 $\operatorname{cn}(\Psi, k)$ 是模为 k 的Jacobi椭圆余弦函数, $K = K(k)$ 为第一类完全椭圆积分. 利用[8]中给出的公式算得(参看附录A, B)

$$u_{0\psi} = -\frac{2Ka}{\pi} \operatorname{sn}\Psi \operatorname{dn}\Psi \quad (3.5)$$

$$u_{0\alpha} = \operatorname{cn}\Psi + \frac{1}{a^2 - 1} \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2\Psi \operatorname{cn}\Psi - \frac{1}{(a^2 - 1)k'^2} \left[E(\Psi) - \Psi \frac{E}{K} \right] \operatorname{sn}\Psi \operatorname{dn}\Psi \quad (3.6)$$

$$B_0' = \frac{B_0}{a} \left[1 + \frac{2}{a^2 - 2} \frac{E}{K} \right] \quad (3.7)$$

$$f(u_0, B_0 u_{0\psi}) = -a\sqrt{a^2 - 1} (1 - a^2 \operatorname{cn}^2\Psi) \operatorname{sn}\Psi \operatorname{dn}\Psi \quad (3.8)$$

式中, $\operatorname{sn}\Psi$ 和 $\operatorname{dn}\Psi$ 是模为 k 的Jacobi椭圆函数, $E(\Psi)$ 为第二类正规椭圆积分, $E = E(k)$ 为第二类完全椭圆积分, 而

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{a^2 - 2}{2(a^2 - 1)} \quad (3.9)$$

由(2.16), (3.4)~(3.9)得到(见附录B)

$$A_1 = \frac{1}{15aK} [(3a^4 - 5a^2 - 2)K - 2(3a^4 - 6a^2 - 1)E] \quad (3.10)$$

$$B_1 = 0 \quad (3.11)$$

从而得到振幅和相位因子满足的方程

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + O(\varepsilon^2), \quad \frac{d\psi}{dt} = B_0(a) + O(\varepsilon^2) \quad (3.12)$$

其中 A_1 和 B_0 分别由(3.10)和(3.4)给定. 令

$$A_1(a) = 0$$

得到极限环振幅

$$a = a_0 = 1.8396 \quad (3.13)$$

Burton用时间变换法算得

$$a_0 = 1.8433$$

由此可见, 两种结果非常接近. 不难算得

$$A_1'(a_0) = -0.9599 < 0 \quad (3.14)$$

因而这一极限环是稳定的, 用[6]中的方法不能判定这种稳定性.

四、讨 论

(1) 本文提出的方法较为简捷有效, 由于选定了切合于强非线性系统的零阶解形式, 即非正弦函数的周期解, 因而能较好地把握渐近解的性质, 从而可以避免解[6]中那样的无穷多个谐波平衡方程.

(2) 本文的方法可望用于其它的强非线性振动系统(例如受非线性阻尼的单摆的大幅度振动等等)以及连续介质中的强非线性振动和波动.

(3) 如果要得到高阶解, 需要把 Крылов-Боголюбов-Митропольский 方法加以推广, 我们以后将另行讨论.

附 录 A

本文中用到一些椭圆积分公式, 列举如下^[6]

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{kk'^2}(E - k'^2K), \quad \frac{dE}{dk} = \frac{1}{k}(E - K) \quad (A.1)$$

$$\frac{d}{dv}(\text{cn } v) = -\text{sn } v \text{dn } v \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial k}[\text{cn}(v, k)] = \frac{\text{sn } v \text{dn } v}{kk'^2} \left[-k'^2 v + E(v) - k^2 \frac{\text{sn } v \text{cn } v}{\text{dn } v} \right] \quad (A.3)$$

$$C_2 = \int_0^K \text{cn}^2 v \text{dn } v = \frac{4}{k^2}(E - k'^2K) \quad (A.4)$$

$$C_4 = \int_0^K \text{cn}^4 v \text{dn } v = \frac{4}{3k^2} [2(2k^2 - 1)E + (2 - 3k^2)k'^2K] \quad (A.5)$$

$$C_6 = \int_0^{4K} \text{cn}^6 v dv = \frac{1}{5k^2} [3k'^2 C_2 + 4(2k^2 - 1)C_4] \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^{4K} \left[E(v) - v \frac{E}{K} \right] \text{sn} v \text{dn} v \text{cn}^3 v dv = \frac{1}{4} \left[\left(k'^2 - \frac{E}{K} \right) C_4 + k^2 C_6 \right] \quad (\text{A.7})$$

附录 B

对第三节中的若干计算作些说明.

计算 u_{0a} 时, 要考虑到 k 对 a 的依赖关系, 需要利用(A.1)~(A.3)

$$\begin{aligned} u_{0a} &= \text{cn} \psi + a \frac{dk}{da} \frac{2\psi}{\pi} \frac{dK}{dk} \frac{d}{d\psi} \text{cn} \psi + a \frac{dk}{da} \frac{\partial}{\partial k} \text{cn}(\psi, k) \\ &= \text{cn} \psi - a \frac{dk}{da} \frac{2\psi}{\pi} \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \text{sn} \psi \text{dn} \psi + a \frac{dk}{da} \frac{\text{sn} \psi \text{dn} \psi}{kk'^2} \left[-k'^2 \psi + E(\psi) - k^2 \frac{\text{sn} \psi \text{cn} \psi}{\text{dn} \psi} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

由(3.4)得

$$a \frac{dk}{da} = -\frac{k}{a^2 - 1} \quad (\text{B.2})$$

从而可得(3.6)中的 u_{0a} , 它显然是 ψ 的周期为 2π 的函数.

计算(3.10)给出的 A_1 的过程较为繁复. 因为

$$A_1 = \frac{F_1(a)}{D(a)} \quad (\text{B.3})$$

我们分别计算 $F_1(a)$ 和 $D(a)$, 由(2.16)和(3.1),

$$\begin{aligned} F_1(a) &= B_0 \int_0^{2\pi} (1 - u_0^2) u_0^2 \psi d\psi = -B_0 \int_0^{2\pi} \left(u_0 - \frac{1}{3} u_0^3 \right) u_0 \psi d\psi = -\frac{1}{B_0} \frac{2\pi}{K} \int_0^{4K} \left(u_0^2 - \frac{4}{3} u_0^4 + \frac{1}{3} u_0^6 \right) d\psi \\ &= -\frac{a^2}{3B_0} \frac{2\pi}{K} [3C_2 - 4a^2 C_4 + a^4 C_6] \end{aligned}$$

利用(A.4)~(A.6)导得

$$F_1(a) = -\frac{a}{B_0} \frac{2\pi}{k^2} \frac{a}{30} \left[(3a^4 - 5a^2 - 2) - 2(3a^4 - 6a^2 - 1) \frac{E}{K} \right] \quad (\text{B.4})$$

再来计算 $D(a)$

$$D(a) = \int_0^{2\pi} [u_0 \psi (B_0 u_{0a} \psi + B_0' u_0 \psi)] - B_0 u_{0a} u_0 \psi d\psi$$

由分部积分,

$$D(a) = -\int_0^{2\pi} (2B_0 u_{0a} + B_0' u_0) u_0 \psi d\psi = I_1 + I_2 \quad (\text{B.5})$$

利用(A.2)~(A.7), 得到

$$\begin{aligned} I_1 &= -2B_0 \int_0^{2\pi} u_{0a} u_0 \psi d\psi \\ &= -\frac{2a}{B_0} \frac{\pi}{2K} \left\{ -\frac{5}{2} \frac{k^4}{k'^2} C_6 + \left[a^2 + \frac{2a^2 + 3}{2(a^2 - 1)} \frac{k^2}{k'^2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k'^2} \left(k'^2 - \frac{E}{K} \right) \right] C_4 \right. \\ &\quad \left. - \left[1 + \frac{1}{a^2 - 1} \frac{k^2}{k'^2} - \frac{1}{2(a^2 - 1)} \left(1 - \frac{E}{k'^2 K} \right) \right] C_2 \right\} \\ &= -\frac{a}{B_0} \frac{2\pi}{k^2} \left[\frac{1}{3} (a^2 + 1) - \frac{2}{3} \frac{E}{K} - \frac{2}{3(a^2 - 2)} \left(\frac{E}{K} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -B'_0 \int_0^{2\pi} u_0 u_{\theta\psi\psi} d\psi = \frac{a}{B_0} \frac{\pi}{2K} (a^2 C_4 - C_2) \left(1 + \frac{2}{a^2 - 2} \frac{E}{K}\right) \\
 &= \frac{a}{B_0} \frac{2\pi}{k^2} \left[\frac{a^2 - 2}{6} + \frac{2}{3} \frac{E}{K} + \frac{2}{3(a^2 - 2)} \left(\frac{E}{K}\right)^2 \right] \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

把(B.6)、(B.7)代入(B.5), 得到

$$D = \frac{a}{B_0} \frac{2\pi}{k^2} \cdot \frac{1}{2} a^2 \quad (\text{B.8})$$

把(B.4)、(B.8)代入(B.3)就导出(3.10)所给出的 A_1 .

参 考 文 献

- [1] 钱伟长, 奇异摄动理论及其在力学中的应用, 科学出版社(1981).
- [2] Kevorkian, J. and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York (1981).
- [3] Кузмак Г. Е., Асимптотические решения дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, *ПММ*, 23(1959), 515—526.
- [4] Luke, J. C., A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc. Ser. A292* (1966), 403—412.
- [5] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1974).
- [6] Burton, T. D., Non-linear oscillator limit cycle analysis using a time transformation approach, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 17 (1982), 7—19.
- [7] Боголюбов Н. Н. и Ю. А. Митропольский, *Асимптотические Методы в Теории Нелинейных Колебаний*, (Изд. 4), Издательство «Наука» Москва (1974).
- [8] Byrd, P. F. and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York (1971).

Asymptotic Analysis of Strongly Nonlinear Oscillators

Dai Shi-qiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, an asymptotic method is presented for the analysis of a class of strongly nonlinear autonomous oscillators. The equations governing the amplitude and phase factor are established, as well as the amplitude and stability of the corresponding limit cycle are determined.