

# 任意坐标系中的弹塑性矩阵

中国科学院力学研究所 任孝安

## 摘 要

本文推导了三维问题及平面应力、平面应变、轴对称问题在任意曲线坐标系中的弹塑性矩阵。由此最一般的表达式可以方便地得到任何特定坐标系中的弹塑性矩阵，供各类不同特点问题的有限元计算时使用。

文中推导得到的任意曲线坐标系中的本构方程，也同时为曲线差分法求解弹塑性问题提供了刚度系数显式。

## 一、引 言

在有限元计算中，选择合适的坐标系能使问题处理方便，尤其能简单、严格地满足边界条件。例如：发动机涡轮盘的外形，是沿周向呈现一定周期性的部件，为节省计算，可只取其部分。这时，无论其沿径向分布的离心力或是满足对称边界上周向位移为零，都以采用圆柱坐标为宜<sup>[1]</sup>。

对于传统的差分方法，人们感到最大的弱点是其在处理不规则边界问题上的困难。由于引进了曲线坐标<sup>[2,3,4]</sup>，在这方面大大提高了它的适应能力与使用的灵活性。

## 二、弹塑性本构方程

塑性理论中反映塑性应变增量与应力状态之间关系的流动法则为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} \quad (1)$$

其中  $d\lambda$  为待定标量因子； $F$  为屈服函数。

当应力有一微小增量  $d\sigma^{ij}$  时，应变的变化假定可分为弹性应变  $d\epsilon_{ij}^e$  和塑性应变  $d\epsilon_{ij}^p$  两部分，即

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (2)$$

则有

$$d\sigma^{ij} = E^{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (3)$$

式中  $E^{ijkl}$  为四阶弹性张量。

将 (1) 式和 (3) 式代入下面的一致性条件 (4) 式，并取塑性功  $W_p$  为内状态

参数

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \frac{\partial F}{\partial W^p} dW^p = 0 \quad (4)$$

求出

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} E^{ijkl} d\epsilon_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} - \frac{\partial F}{\partial W^p} \sigma^{mn} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}} \quad (5)$$

代入 (3) 式, 得到

$$d\sigma^{ij} = E^{ijkl} \left( d\epsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} \right) = (E^{ijkl} - P^{ijkl}) d\epsilon_{kl} \quad (6)$$

式中

$$P^{ijkl} = \frac{E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} - \frac{\partial F}{\partial W^p} \sigma^{mn} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}} \quad (6a)$$

(6) 式即为张量形式的弹塑性本构关系。

以下各节分别在三维及二维任意非正交曲线坐标系中推导  $P^{ijkl}$  的显式。

### 三、三维问题

在三维空间任意非正交曲线坐标系中, 对于各向同性材料

$$E^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl} + g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) \quad (7)$$

其中  $E$  为杨氏模量;  $\nu$  为泊桑比;  $g^{ij}$  为任意曲线坐标系中的度量张量。

采用 Von Mises 屈服准则

$$F(S_j^i, k) \equiv \frac{1}{2} S_j^i S_i^j - k^2 = 0 \quad (8)$$

其中  $S_j^i$  为应力偏量。若以  $\sigma_y$  表示  $t$  时刻纯拉时的屈服应力, 则  $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y$ 。

定义等效应力  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_j^i S_i^j}$ , 当  $\bar{\sigma} \geq \sigma_y$  时材料进入屈服。

(8) 式亦可写成用应力表示的形式

$$F(\sigma^{ij}, k) \equiv \sigma^{ik} \sigma^{jl} \left( \frac{1}{2} g_{jk} g_{li} - \frac{1}{6} g_{ik} g_{jl} \right) - k^2 = 0 \quad (9)$$

由 (9) 式可得到

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}} = S_{mn} \quad (10)$$

若用  $H^1 = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}^p$  表征塑性强化, 则有

$$-\frac{\partial F}{\partial W^p} = 2k \frac{\partial k}{\partial W^p} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p} = \frac{2}{3} H^1 \quad (11)$$

由上述各式, 并注意到  $S_k^k = 0$ , 可得到下列式子

$$-\frac{\partial F}{\partial W^2} \sigma^{mn} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}} = \frac{2}{3} H' S^{mn} S_{mn} = \frac{4}{9} H' \bar{\sigma}^2 \quad (12)$$

$$E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl} + g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) S_{kl} = \frac{E}{1+\nu} S^{ij} \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} E^{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} = \frac{E}{1+\nu} S_{ij} S^{ij} = \frac{E}{1+\nu} \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \quad (14)$$

将(12), (13)及(14)式代入(6a)式, 整理后得到三维问题在任意坐标系中  $P^{ijkl}$  的表达式

$$P^{ijkl} = \frac{9G^2}{(3G+H')\bar{\sigma}^2} S^{kl} S^{ij} \quad (15)$$

其中

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

在笛卡儿坐标系中

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

这时, 由(7)式与(15)式可直接得到有限元计算中大家所熟悉的三维弹塑性矩阵<sup>[6]</sup>。(7)式与(15)式是适用于任意坐标系(直线或曲线的, 正交系或非正交系)的最一般的表达式, 由此可以方便地得到任意特定坐标系中的弹塑性矩阵。由(15)式可见, 三维问题的  $P^{ijkl}$  仅与应力有关, 而与坐标系的几何参数无关, 所以对于所有正交系与非正交系, 其形式都与笛卡儿坐标系中的相同。

#### 四、平面应力问题

在所讨论的平面上取任意曲线坐标  $q^1, q^2$ , 取与该平面垂直的直线坐标为  $q^3$ , 并使  $g_{33} = 1$ 。

由于是平面应力状态, 所以

$$\sigma^{13} = \sigma^{23} = \sigma^{33} = 0, \quad S^{13} = S^{23} = 0$$

必须注意的是  $S^{33}$  一般不等于 0, 它由下式给出

$$S^{33} = \sigma^{33} - \frac{1}{3} \sigma_m^m g^{33} = -\frac{1}{3} (\sigma_1^1 + \sigma_2^2)$$

这样, Von Mises 屈服条件在此应写成如下形式

$$F(S_j^i) \equiv \frac{1}{2} S_j^i S_i^j + \frac{1}{2} S^2 - k^2 = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (16)$$

其中

$$S = -\frac{1}{3} (\sigma_1^1 + \sigma_2^2)$$

定义等效应力:  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (S_j^i S_i^j + S^2)}$ , 在单向拉伸  $\sigma_1^1 = \sigma, \sigma_2^2 = 0$  的情况下,

仍有  $\bar{\sigma} = \sigma$ 。

(16)式同样可写成用应力逆变分量表示的屈服条件(17)式, 其形式与三维问题中的(9)式相同, 但此时指标的取值为 1, 2。

$$F(\sigma^{ij}) \equiv \sigma^{ik} \sigma^{jl} \left( \frac{1}{2} g_{ki} g_{lj} - \frac{1}{6} g_{ki} g_{lj} \right) - k^2 = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (17)$$

对于平面应力问题, 其弹性系数为

$$E^{ijkl} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)g^{ik}g^{jl} + \nu g^{ij}g^{kl}] \quad (18)$$

通过与三维问题类似的运算, 并注意到

$$S_m^m = S_1^1 + S_2^2 = -S_3^3 = S \neq 0$$

可以得到适用于平面应力问题的  $p^{ijkl}$ :

$$p^{ijkl} = \frac{E}{Q(1-\nu^2)} [(1-\nu)S^{ij} + \nu S_m^m g^{ij}] [(1-\nu)S^{kl} + \nu S_m^m g^{kl}] \quad (19)$$

其中

$$Q = (1-\nu)S_{mn}S^{mn} + \nu S_m^m S_n^n + \frac{2H'(1-\nu)\bar{\sigma}^2}{9G}$$

将 (18) 与 (19) 式运用于笛卡儿坐标, 同样可得到有限元计算中所使用的平面应力问题的弹塑性矩阵<sup>(6)</sup>。

对于平面应力问题,  $p^{ijkl}$  与所采用的坐标系几何参数有关。例如应用于平面极坐标时:

$$q^1 = \gamma, \quad q^2 = \theta$$

这时

$$g_{11} = g^{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

将弹塑性本构关系 (6) 式写成矩阵形式

$$\{d\sigma\} = [D]_{EP} \{d\epsilon\}$$

则可得到平面应力问题在极坐标系中的弹塑性矩阵

$$[D]_{EP} = [D]_E - [D]_P$$

其中

$$[D]_E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{r^2} & 0 \\ & \frac{1}{r^4} & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1-\nu}{2r^2} \end{pmatrix}$$

$$[D]_P = \frac{E}{Q(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} (S_{11} + \nu S_{22})^2 & \left[ (1-\nu)S_{22} + \frac{\nu}{r^2}(S_{11} + S_{22}) \right] (S_{11} + \nu S_{22}) \\ & \left[ (1-\nu)S_{22} + \frac{\nu}{r^2}(S_{11} + S_{22}) \right]^2 \\ \text{对称} & & \\ & & (1-\nu)(S_{11} + \nu S_{22})S_{12} \\ & & (1-\nu) \left[ (1-\nu)S_{22} + \frac{\nu}{r^2}(S_{11} + S_{22}) \right] S_{12} \\ & & (1-\nu)^2 S_{12}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{式中} \quad Q = S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2\nu S_{11}S_{22} + 2(1-\nu)S_{12}^2 + \frac{2H'(1-\nu)\bar{\sigma}^2}{9G}$$

## 五、平面应变问题

与平面应力问题一样, 在所讨论的平面上取任意曲线坐标  $q^1, q^2$ , 取与该平面垂直的直线坐标为  $q^3$ , 并使  $g_{33} = 1$ 。

由于是平面应变, 因此

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \sigma^{13} = \sigma^{23} = 0$$

所以, 其本构方程的形式与三维问题完全相同, 即也为 (7) 与 (15) 式, 只是在此指标的取值为 1, 2。将三维问题的弹塑性矩阵  $[D]_{EP}$  中相应地划去三行三列, 即得平面应变的弹塑性矩阵。

## 六、轴对称问题

取与轴纵剖面垂直的环向为  $q^3$  坐标,  $q^1, q^2$  为轴纵剖面上的任意非正交曲线坐标。这样

$$g_{33} = r^2, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2}, \quad g_{13} = g_{23} = g^{13} = g^{23} = 0$$

由于轴对称, 所以位移  $u^3 = 0$ , 并有

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

因此将三维问题的  $[D]_{EP}$  划去相应的二行二列, 就得到轴对称问题的弹塑性矩阵。

切向应变  $\varepsilon_{33}$  可用轴纵剖面上的位移  $u^1$  与  $u^2$  表示。

$$\varepsilon_{33} = u_{3|3} = g_{m3} u^m_{|3} = g_{33} u^3_{|3} = r^2 \left( \frac{\partial u^3}{\partial q^3} + u^m \Gamma_{m3}^3 \right) = \frac{1}{2} \left( u^1 \frac{\partial r^2}{\partial q^1} + u^2 \frac{\partial r^2}{\partial q^2} \right)$$

式中  $\Gamma_{m3}^3$  为 Christoffel 符号。

## 七、弹塑性问题在任意坐标系中的差分求解方程

弹塑性问题增量形式的本构关系为

$$d\sigma^{ij} = (E^{ijkl} - p^{ijkl}) d\varepsilon_{kl} \quad (20)$$

前面已推导得到了  $E^{ijkl}$  和  $p^{ijkl}$  在任意坐标系中的表达式。

将 (20) 式代入下面增量平衡方程:

$$d\sigma^{ij}|_j = 0 \quad (21)$$

由于  $E^{ijkl}$  是在整个加载过程中不变的弹性系数, 因此可以移到微分符号外。在每一步加载过程中,  $p^{ijkl}$  又可视为由加载前状态决定的常量 (局部线性化), 这样  $p^{ijkl}$  也可移到微分号外, 即

$$d\sigma^{ij}|_j = [(E^{ijkl} - p^{ijkl}) d\varepsilon_{kl}]|_j = (E^{ijkl} - p^{ijkl}) d\varepsilon_{kl}|_j \quad (22)$$

以下用  $u^i$  表示位移增量。利用几何关系

$$d\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k|l} + u_{l|k})$$

及协变导数公式

$$u^i|_j = \frac{\partial(u^i|_j)}{\partial q^k} + \Gamma_{mk}^i u^m|_j - \Gamma_{jk}^m u^i|_m$$

$$u^i|_j = \frac{\partial u^i}{\partial q^j} + \Gamma_{m,j}^i u^m$$

将 (22) 式展开, 注意到其中仅  $i$  为自由指标。整理后对每个自由指标  $i$ , 能得到如下形式的微分方程

$$A_1 \frac{\partial^2 u^1}{(\partial q^1)^2} + A_2 \frac{\partial^2 u^1}{(\partial q^2)^2} + A_3 \frac{\partial^2 u^1}{\partial q^1 \partial q^2} + A_4 \frac{\partial^2 u^2}{(\partial q^1)^2} + A_5 \frac{\partial^2 u^2}{(\partial q^2)^2} + A_6 \frac{\partial^2 u^2}{\partial q^1 \partial q^2} + A_7 \frac{\partial u^1}{\partial q^1} + A_8 \frac{\partial u^1}{\partial q^2} + A_9 \frac{\partial u^2}{\partial q^1} + A_{10} \frac{\partial u^2}{\partial q^2} + A_{11} u^1 + A_{12} u^2 = 0 \quad (23)$$

以下讨论边界条件:

$$\begin{cases} u^i = \text{const} & \text{在位移边界 } S_u \text{ 上} \\ \sigma^{ij} \nu_j = t^i & \text{在力边界 } S_\sigma \text{ 上} \end{cases} \quad (24 a)$$

$$\quad \quad \quad (24 b)$$

以二维问题为例, 取边界曲线为曲线坐标  $q^1$  (图 1), 则其单位外法线向量为:

$$\tilde{\nu} = \nu_1 \tilde{g}^1 + \nu_2 \tilde{g}^2 \quad (25)$$

其中

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}}$$

外载为:

$$\tilde{T} = t^i \tilde{g}_i = \frac{T^1}{\sqrt{g_{11}}} \tilde{g}_1 + \frac{T^2}{\sqrt{g_{22}}} \tilde{g}_2 \quad (26)$$

式中  $T^1$  与  $T^2$  分别是  $\tilde{T}$  沿  $q^1$  与  $q^2$  的物理分量。

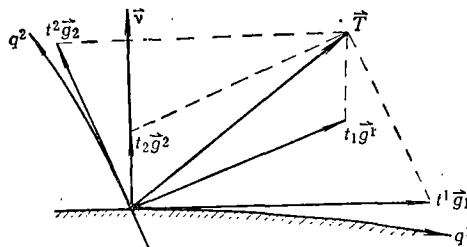


图 1 受力边界

Fig.1 Traction boundary

对每个加载增量, 由式 (25)、(26) 及 (24 b) 得到

$$d\sigma^{i2} = dT^i \sqrt{\frac{g^{22}}{g_{ii}}} \quad (\text{对 } i \text{ 不取和}) \quad (27)$$

同样, 利用物理关系及几何关系将 (27) 式中的应力增量用位移增量表示。对每个自由指标  $i$  有如下形式的方程:

$$C_1 \frac{\partial u^1}{\partial q^1} + C_2 \frac{\partial u^1}{\partial q^2} + C_3 \frac{\partial u^2}{\partial q^1} + C_4 \frac{\partial u^2}{\partial q^2} + C_5 u^1 + C_6 u^2 = dT^i \sqrt{\frac{g^{22}}{g_{ii}}} \quad (28)$$

(23) 与 (28) 式即为弹塑性问题在任意坐标系中, 以位移为基本微知量的求解方程。它为曲线差分法求解弹塑性问题提供了刚度系数显式。

假定全场有  $m$  个计算节点, 对其位移边界及力边界节点分别建立 (24 a) 式或 (28) 式, 内部节点建立 (23) 式, 利用差分离散后得到  $2m$  阶方程组:

$$[K]\{U\} = \{dT\} \quad (29)$$

式中 $[K]$ 是 $2m$ 阶的刚度系数矩阵,它由(23)式与(28)式中各项系数组成。而这些系数都是一些代数显式,在弹性范围,仅与网格几何参数有关,进入塑性后,同时与节点应力偏量有关,使(29)式呈现非线性。(29)式的求解,与有限元变刚度法类同。弹塑性过渡元等一些技巧,在此同样可运用。

图2给出了一个初步算例(圆孔圆板的平面应力问题)的计算结果。其内径为1cm,外径为10cm,载荷为 $87582.6\text{N/cm}^2$ ,全盘进入塑性。

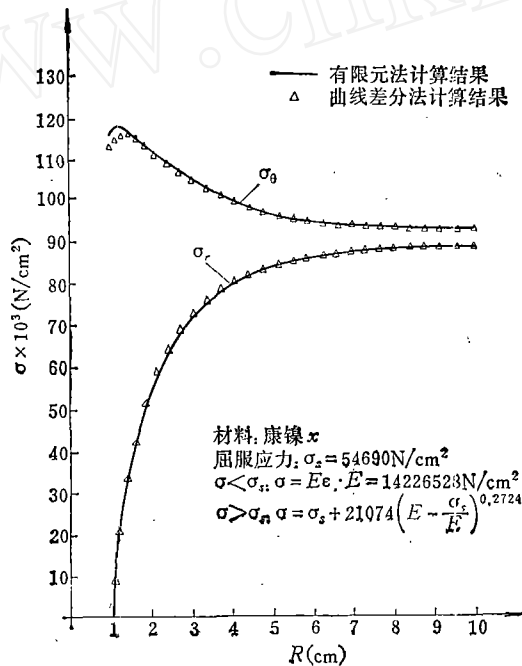


图2 使用有限元和曲线差分法计算得到的圆孔圆板应力分布

Fig.2 The Stress distribution of perforated disk obtained by F.E. and C.F.D

由于使用了任意曲线坐标,大大提高了传统差分法对曲线边界的适应能力。另一方面,差分法是直接从平衡方程出发离散,其系数都是代数显式,它不像基于变分原理的有限元法那样需要组装整体刚度阵过程(有时还需要数值积分)<sup>[3,4]</sup>,因此在刚度阵的形成上耗费的机时较省。在这方面差分法显示了它一定的优越性,尤其是对于非线性问题的求解,更有其实际意义。但(29)式中的 $[K]$ 不是对称矩阵,并且由于是从平衡方程出发,因此涉及到高一阶导数,这仍是差分法的不足之处。

### 参考文献

- [1] 吴永礼, 涡轮盘的三维热弹塑性有限元分析, 航空学会发动机结构强度振动学第二次学术交流会, (1983年)。
- [2] 李敏华, 变截面圆轴扭转问题用非正交曲线坐标的新解法, 固体力学学报, 第二期, (1980)。
- [3] 任孝安, 使用任意非正交曲线坐标解变截面圆轴扭转问题的数值计算, 固体力学学报, 第二期, (1983)。
- [4] P. C. M. Lau, Curvilinear Finite Difference Method for Biharmonic Equation, J. Numer. meth. Engrg. Vol, 14, No.6, (1979)。
- [5] 李大潜, 有限元法续讲, 科学出版社, (1979)。

## ELASTOPLASTIC MATRIX IN NON-ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

*Ren Xiaolan*

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### Abstract

The expressions for  $p^{ijkl}$  of the elastoplastic incremental constitutive equation (Eq. 6) are derived in non-orthogonal curvilinear coordinates (Eqs. 15 and 19). Choice of a proper curvilinear coordinate system sometimes makes the problem easy to treat, especially the boundary conditions to be satisfied easily and exactly. From these general equations the elastoplastic matrix for finite element method can be obtained in any specific coordinate system.

The adaptability and flexibility of conventional finite difference method are greatly enhanced by using non-orthogonal curvilinear coordinates. The elastoplastic constitutive equation expressed in curvilinear coordinates also provides explicit stiffness coefficients for solving elastoplastic problems with curvilinear finite difference.