中国科学

1985 年 10 月　　A 辑　　第 10 期

论星系盘上密度波的传播与演化

——I. 波子的一般演化方程及其解的讨论

徐 建 军*

(中国科学院力学研究所，北京)

摘　要

本文研究了星系密度波演化与传播的一般自洽理论，并提出了它的一个简化近似模型——"薄过渡层理论". 文中讨论了星系盘上波子演化基本方程的三种不同型式解：正则波动型、Swing (转化)型和一般演化型. 结果表明，前两种型式解只能在星系盘一定区域及波子波数的一定范围内应用，只有一般演化型解才能描述波包运动的全局图象. 从本文可以看出，著名的 G-L 片上波子 Swing 过程理论，只在一些特殊的星系基态类型下，才可局部地适用于星系盘.

一、引　言

自六十年代以来，星系盘上波子的演化问题一直受到人们的重视，最初由 Goldreich & Lyden-Bell (1965)[1]提出，继而 Juhan & Toomre 采用恒星动力学模型进行了研究[2]. 他们研究的是一种大为简化的物理模型(下面统称为 G-L 片模型). 假定在一个刚性旋转的空间中，存在一个密度均匀、自引力平行剪切的流场，在这流场中，波子

$$q_{扰动}(r,\theta,t)=\hat{q}(t)e^{i[k_r(t)x-m\theta]} \tag{1.1}$$

的演化特性. 经过分析，上述波子的波数 k_r 将以恒定速率从短的导波段持续地向短的曳波段转变 (Swing). 同时，波子振幅 $\hat{q}(t)$ 可能得到一种巨大的增长率. 此函数满足如下二阶常微分方程：

$$\frac{d^2\hat{q}}{dt^2}+S^2(t)\hat{q}=0. \tag{1.2}$$

值得注意的是：在 G-L 片模型下，方程 (1.2) 是精确的. 其系数 $S^2(t)$ 与振幅函数 $\hat{q}(t)$ 都只是时间 t 的函数，而与空间变元 r 无关.

1981 年 Toomre[7] 把上述波子转化过程中可能出现的振幅增长现象称为"Swing (转化)放大"，把方程 (1.2) 中的系数 $S^2(t)$ 称为弹簧系数. 将 G-L 片上波子演化理论作为一种局部近似应用于星系盘之后，Toomre 认为这个理论支持了一种结论——星系旋涡结构只是宇宙中昙花一现的瞬息现象.

本文 1984 年 9 月 3 日收到，1985 年 4 月17日收到修改稿.

* 本文是作者在美国麻省理工学院访问期间，在林家翘教授的建议和支持下完成的.

然而众所周知，从 70 年代开始，Lin 及其合作者们研究与发展了星系密度波的整体模式解理论[3]，说明了星系的旋涡结构是一种准稳态现象.

上述波子演化理论能否与整体模式理论联系起来？如何协调这两个理论对密度波传播过程的描述？这是当前星系动力学面临的一种挑战. 正是围绕这个课题，近年来 Goldreich & Tramain[4], Durary[5], Lau[6] 和 Lin[3] 等都相继开展了研究. Hunter[8] (1984) 曾指出："如何把这种(指波子演化)瞬态不稳定性与正则模式分析完全协调起来，这一问题仍未解决."

值得一提的是，迄今波子演化问题的研究大都沿用 G-L 片模型. 本文拟从另一个角度用渐近分析方法直接研究星系盘上波子演化的过程. 在引入总波长小参数 $\varepsilon=\frac{1}{kr}$ 之后，我们导出了星系盘上波子演化的一般控制方程. 这个方程虽与 G-L 片上波子演化方程(1.2)有着某种形式上的类似，但是由于星系基态存在的不均匀特性，两者又有重大差别. 分析表明：与 G-L 片上的情况不同，在星系盘上波子演化有着三种不同型式的解. 如果在 (r,τ) 平面上讨论波包传播轨线(这里 r 指星系盘的径向位置；τ 为波子的径向无量纲波数)，可以证明，其中正则波动型解 $\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}=0\right)$ 与 Swing 转化型解 $\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}=2A\right)$ 一般只存在于 (r,τ) 平面的一定区域. 因此它们不能单独给出波子传播演化的全部历程. 一般而言，波子演化遵循一般不稳定演化型解，这种解把正则波动型解与 Swing 型解作为两个极端情形联结起来，从而给出了波包运动的整体图式.

由于星系盘上波子的一般不稳定演化特征与 G-L 片上波子 Swing (转化)存在很大差别. 因此把 G-L 片 Swing 过程理论作为局部近似应用于星系盘的共转圈附近一般是不可行的. 只有在一些特殊的星系基态下(比如本文中所述的基态类型(A)之下)，这种应用才比较合理，并且给出关于波的增长率、反射、透射率的近似数值结果.

二、星系盘密度波的基本方程组

本文采用与 Hunter[8] 相一致的符号. 假定任一扰动量均可表为：

$$q_{扰动}(r,\theta,t)=q'(r,t)e^{im\theta}, \tag{2.1}$$

这样在转速为 Ω_a 的旋转坐标系中，扰动态服从下述基本方程组：

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+im[\Omega(r)-\Omega_a]\right\}u'-2\Omega(r)v'=\frac{\partial}{\partial r}(\psi'-h'), \tag{2.2}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+im[\Omega(r)-\Omega_a]\right\}v'-2B(r)u'=\frac{im}{r}(\psi'-h'), \tag{2.3}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+im[\Omega(r)-\Omega_a]\right\}\sigma'+\left(\frac{d\sigma}{dr}\right)u'+\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ru')}{\partial r}+\frac{im}{r}v'\right]=0, \tag{2.4}$$

$$h'=\frac{a^2}{\sigma}\sigma', \tag{2.5}$$

$$\psi'=\frac{2\pi G}{|k|}\sigma', \tag{2.6}$$

$$|k| = \left[k_r^2 + \frac{m^2}{r^2}\right]^{1/2}, \tag{2.7}$$

其中 $\{\Omega(r),\ B(r),\ \sigma(r),\ a^2(r)\}$ 均为基态量,其意义如通常所用,$\{k,\ k_r\}$ 是波数,其定义见后.

从方程 (2.2)—(2.4) 不难推出 (参看文献 [8])

(1) 涡量方程:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + im[\Omega(r) - \Omega_a]\right\}\left(\frac{\zeta'}{2B} - \frac{\sigma'}{\sigma}\right) - u'\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{B}{\sigma}\right) = 0. \tag{2.8}$$

(2) 密度波方程:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + im[\Omega(r) - \Omega_a]\right\}^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) - \frac{d\ln\sigma}{dr}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + im[\Omega(r) - \Omega_a]\right\}u'$$
$$= \nabla^2(h' - \psi') - 4Ae' - 2B\zeta', \tag{2.9}$$

其中

涡量
$$\zeta' = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv')}{\partial r} - \frac{im}{r}u'\right], \tag{2.10}$$

变形率:
$$e' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv')}{\partial r} + \frac{im}{r}u'\right] = \frac{\zeta'}{2} + \frac{im}{r}u'. \tag{2.11}$$

下面,利用扰动涡量 ζ',扰动速度 u' 和扰动密度 σ' 作为基本物理量. 从连续方程(2.4)以及涡量公式 (2.10) 中,消去 v'. 事实上,从 (2.4) 式可解出:

$$\frac{im}{r}v' = -\frac{D}{Dt}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) - \left(\frac{d\ln\sigma}{dr}\right)u' - \frac{1}{r}\frac{\partial(ru')}{\partial r}, \tag{2.12}$$

这里引入算子符号

$$\frac{D}{Dt} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + im[\Omega(r) - \Omega_a]\right\}. \tag{2.13}$$

再从 (2.12) 式,可导出:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}(rv') = \frac{i}{m}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{r^2\sigma'}{\sigma}\right)\right] + \frac{\delta_2}{r}u' + \frac{\delta_1}{r}\frac{\partial(ru')}{\partial r}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(ru')\right]\right\}, \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{d\ln\sigma}{d\ln r}, \\ \delta_2 = \dfrac{d^2\ln\sigma}{(d\ln r)^2}. \end{cases} \tag{2.15}$$

将方程 (2.14) 代入 (2.10) 式便可消去 v', 得出

$$\zeta' = \frac{i}{m}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{r^2\sigma'}{\sigma}\right)\right] + \frac{\delta_2}{r}u' + \frac{\delta_1}{r}\frac{\partial(ru')}{\partial r}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(ru')\right]\right\} - \frac{im}{r}u', \tag{2.16}$$

或者

$$\frac{m^2}{r^2}u' - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(ru')\right] - \frac{\delta_1}{r^2}\frac{\partial(ru')}{\partial r} - \frac{\delta_2}{r^2}u'$$
$$= \frac{im}{r}\zeta' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{r^2\sigma'}{\sigma}\right)\right]. \tag{2.17}$$

注意到下述算子交换次序的特性

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{D}{Dt}\right\} = \frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\right\} + im\Omega'(r)\{\cdot\}, \tag{2.18}$$

得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{r^2\sigma'}{\sigma}\right)\right] = \frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\right] + im\Omega'(r)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) + \frac{2}{r}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right). \tag{2.19}$$

由此,方程式 (2.17) 便可化为:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}(3+\delta_1)\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r^2}\left(1+\delta_1+\delta_2-\frac{m^2}{r^2}\right) + \frac{im}{r}\zeta'$$
$$+ \frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\right] + \frac{2}{r}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) + im\Omega'(r)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) = 0. \tag{2.20}$$

以上方程 (2.8), (2.9), (2.20) 是基本方程式,而 $\left\{u', \frac{\sigma'}{\sigma}, \frac{\zeta'}{2B}\right\}$ 则是基本扰动量.

三、星系盘上波子演化的一般控制方程

考察任意一个波动型扰动 $q'(r, t)$ 就会发现:对每一个固定时刻 t,扰动量沿 r 方向的分布曲线必呈一波浪状.对于这种分布曲线当然可以确定出一个径向波数 k_r.一般它随空间位置以及观察时刻而变化.即:$k_r = k_r(r, t)$.因此,不失一般性,我们总可把任意单一扰动波子描述为:

$$q'(r, t) = \tilde{q}(r, t)e^{i\int^r k_r(r,t)dr}, \tag{3.1a}$$

或者

$$q'(r, t) = \tilde{q}e^{i\Phi(r,t)}, \tag{3.1b}$$

其中

$$\Phi(r, t) = \int^r k_r dr. \tag{3.1c}$$

这里假设在(3.1a)式中,振幅函数 $\tilde{q}(r, t)$ 是空间变元 r 的一个缓变函数;波数函数 $k_r(r, t)$ 亦然.但是 $\tilde{q}(r, t)$ 可以随时间 t 迅速改变.

值得提醒的是:只有对单一波子的波场,上述描述才是可行的. 对于有若干不同波子叠加的波场 (3.1a—c) 是不能成立的.从(3.1)式可以推出:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\{q'(r, t)\} = e^{i\Phi(r,t)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r} + ik_r\right\}\tilde{q}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\{q'(r, t)\} = e^{i\Phi(r,t)}\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + 2ik_r\dfrac{\partial}{\partial r} + i\dfrac{\partial k_r}{\partial r} - k_r^2\right\}\tilde{q}. \end{cases} \tag{3.2}$$

我们定义波子的总波数 k 为：

$$k=\left\{k_r^2+\frac{m^2}{r^2}\right\}^{1/2}. \tag{3.3}$$

并且以总波长为尺度，引入短波长参数 $\varepsilon=\frac{1}{kr}\ll 1$，那么振幅函数 $\tilde{q}(r,t)$ 以及波数 $k_r(r,t)$ 随空间变元 r 缓变的特性，便可解析地表示为：

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\tilde{q}}{\partial r}\right|\ll|k\tilde{q}|,\\&\left|\frac{\partial k_r}{\partial r}\right|\ll k^2,\\ \text{或者}\quad&\\&\left|\frac{\partial\ln\tilde{q}}{\partial\ln r}\right|\ll\varepsilon^{-1},\quad\left|\frac{\partial\ln k_r}{\partial\ln r}\right|\ll\varepsilon^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

注意，这里引入的小参数 ε 与通常运用的基于径向波数 k_r 的短波长参数 $(1/k_r r)$ 不同。即使径向波数 k_r 很小，总波数 k 仍然可以很大（只要 m/r 很大）。因此运用短波长参数 ε，可以研究十分松卷的旋涡结构。

利用关系式 (3.4)，若只考虑短波长近似的首项，我们可作如下简化：

$$\begin{aligned}\nabla^2\{h'-\psi'\}=e^{i\Phi(r,t)}&\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}+2ik_r\right)\frac{\partial}{\partial r}+i\left(\frac{k_r}{r}+\frac{\partial k_r}{\partial r}\right)\right.\\&\left.-\left(k_r^2+\frac{m^2}{r^2}\right)\right\}(\tilde{h}-\tilde{\psi})\approx-k^2(h'-\psi'),\end{aligned} \tag{3.5a}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}(3+\delta_1)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1+\delta_1+\delta_2}{r^2}-\frac{m^2}{r^2}\right\}u'\\&=e^{i\Phi(r,t)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(\frac{3+\delta_1}{r}+2ik_r\right)\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial k_r}{\partial r}\right.\\&\qquad\left.+\frac{ik_r}{r}(3+\delta_1)-\left(k_r^2+\frac{m^2}{r^2}\right)+\frac{1+\delta_1+\delta_2}{r^2}\right\}u'\\&\approx-k^2u'.\end{aligned} \tag{3.5b}$$

利用 (3.5a,b)，以及略去其它所有 $O(\varepsilon)$ 的小量项之后，基本方程 (2.8)，(2.9)，(2.11)，(2.20) 便可简化为：

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\zeta'}{2B}-\frac{\sigma'}{\sigma}\right\}=0, \tag{3.6}$$

$$\frac{D^2}{Dt^2}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\right\}=k^2(\psi'-h')-4Ae'-2B\zeta', \tag{3.7}$$

$$-k^2u'+\frac{im}{r}\zeta'+\frac{D}{Dt}\left\{ik_r\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\right\}+im\Omega'(r)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)=0, \tag{3.8}$$

$$e'=\frac{\zeta'}{2}+\frac{im}{2}u'. \tag{3.9}$$

方程 (3.6) 给出了涡量守恒关系式。

$$\frac{\zeta'}{2B(r)}=\frac{\sigma'}{\sigma(r)}. \tag{3.10}$$

方程 (3.8) 给出了

$$u'=\frac{i}{k^2}\left\{\frac{m}{r}\zeta'+k_r\frac{D}{Dt}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)+\left[\frac{\partial k_r}{\partial t}+m\Omega'(r)\right]\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\right\}. \tag{3.11}$$

将 (3.9), (3.10), (3.11) 式代入方程 (3.7), 便推得

$$\left\{\frac{D^2}{Dt^2}-\frac{4Ak_rk_\theta}{k^2}\frac{D}{Dt}\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)+\left\{k^2a^2-2\pi G\sigma|k|+4B(A+B)\right.$$
$$\left.-\frac{8ABk_\theta^2}{k^2}-\frac{4Ak_\theta}{k^2}\left[\frac{\partial k_r}{\partial t}+m\Omega'(r)\right]\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)=0. \tag{3.12}$$

这里,我们引入符号

$$k_\theta=\frac{m}{r}, \tag{3.13}$$

$A(r)$, $B(r)$ 是星系盘的 Oort 函数,它们满足如下恒等式:

$$\begin{cases}A+B=\Omega, \qquad \kappa^2=4\Omega^2\left(1-\dfrac{s}{2}\right),\ A=\dfrac{s}{2}\Omega,\\ 4B(A+B)=\kappa^2,\\ AB=A^2\left(\dfrac{2}{s}-1\right),\ s=-\dfrac{d\ln\Omega}{d\ln r}.\end{cases} \tag{3.14}$$

方程 (3.12) 还可改写为

$$\left\{\frac{D^2}{Dt^2}-\frac{4A(\tau)\tau}{1+\tau^2}\frac{D}{Dt}\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)+\left\{\kappa^2[1+(m\varepsilon_0Q)^2(1+\tau^2)\right.$$
$$\left.-2m\varepsilon_0(1+\tau^2)^{1/2}+\frac{8A^2}{1+\tau^2}\left(1-\frac{2}{s}\right)-\frac{4A}{1+\tau^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}-2A\right)\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)=0, \tag{3.15}$$

其中

$$\tau=\frac{k_r}{k_\theta},\quad \varepsilon_0=\frac{\pi G\sigma(r)}{\kappa^2 r},\quad Q=\frac{a\kappa}{\pi G\sigma(r)}. \tag{3.16}$$

方程 (3.15) 就是我们需要的星系盘上波子演化的一般控制方程. 这里特别应指出的是: (1) 方程 (3.15) 的系数除包含基态函数 $\{A(r), Q(r), \varepsilon_0(r), s(r)\}$ 外,还包含扰动的径向波数函数 τ 及其演化率 $(\partial\tau/\partial t)$, 而在波场没有解出之前, 这个径向波数函数是未知的. 所以求解方程 (3.15) 必须采用某种迭代方法: 首先假定波子径向波数 $\tau=\tau^{(0)}(rt)$, 然后求解方程 (3.15) 得出波场分布, 从而确定其波数函数 $\tau^{(1)}(r,t)$. 我们必须调整 $\tau^{(0)}(r,t)$, 使得 $\tau^{(0)}(r,t)=\tau^{(1)}(r,t)$; (2) 方程 (3.15) 是描述单一波子演化过程的, 如果扰动场由几个波子迭加而成, (3.1) 式将不能成立. (3.15) 式亦失去物理意义. 因此, 从物理上看, 在方程 (3.15) 的迴转点附近, 我们的模型不成立; 但是从数学上看, 这个方程在迴转点附近也是有意义的, 因此, 我们可以在整个 (r, t) 平面上讨论方程(3 15)的解, 只是要记住这个数学解所给出的: 波场在迴转点附近同物理上真实的波场可以有出入.

下面, 我们将讨论演化方程 (3.15) 的几种不同类型的解. (1) 正则波动型解[参看 (4.11)

及 (4.15) 式]；(2) Swing (转化) 型解 [参看 (5.9) 式]；(3) 一般不稳定演化型解 [参看 (7.16) 及 (7.25) 式].

我们将指出：前面两种类型解一般只能在 (r, τ) 平面上某一区域内成立，他们都不能单独用来描述波包运动的全部过程，只有最后这一类解才可用来描述波包在星系盘运动的全部过程.

四、正则波动型解

首先，我们考虑最简单一类解式，其中波数函数 k_r 与时间变元 t 无关，因此有

$$\frac{\partial k_r}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{4.1}$$

在这种情形下，演化方程 (3.15) 变为：

$$\left\{\frac{D^2}{Dt^2} - \frac{4A\tau}{1+\tau^2}\frac{D}{Dt}\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) + \left\{\kappa^2 q_1^2(r, \tau) + \frac{16A^2}{1+\tau^2}\left(1 - \frac{2}{s}\right)\right\}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) = 0, \tag{4.2}$$

其中

$$q_1^2(r, \tau) = 1 + m^2\varepsilon_0^2 Q^2(1+\tau^2) - 2m\varepsilon_0(1+\tau^2)^{1/2}. \tag{4.3}$$

由于 $\tau = \tau(r)$ 与变元 t 无关，方程 (4.2) 很容易解出. 事实上令

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) = W e^{\frac{2A(r)\tau}{1+\tau^2} t}, \tag{4.4}$$

可把方程 (4.2) 化为如下标准型：

$$\frac{D^2 W}{Dt^2} + S_1^2(r, \tau) W = 0, \tag{4.5}$$

其中

$$S_1^2(r, \tau) = \kappa^2 q_1^2(r, \tau) + \frac{4A^2}{1+\tau^2}\left\{3 - \frac{4}{s} + \frac{1}{1+\tau^2}\right\}. \tag{4.6}$$

假定波子在静止坐标中的振荡频率为 ω，那么在转动坐标中，

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -i\omega + im\Omega_a. \tag{4.7}$$

方程 (4.5) 给出解式：

$$W = A_{\pm}(r) e^{\mp(\omega - m\Omega_a)t}, \tag{4.8}$$

其中

$$[\omega - m\Omega(r)]^2 = s_1^2(r, \tau). \tag{4.9}$$

如果利用下式定义的无量纲频率

$$\nu = \frac{\omega - \Omega(r)}{\kappa}, \tag{4.10}$$

那么公式 (4.9) 给出如下无量纲的色散关系：

$$\kappa^2\nu^2 = s_1^2(r, \tau). \tag{4.11}$$

回到扰动密度，我们有解式

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) = \hat{A}_{\pm}(r)e^{\frac{2A\tau}{1+\tau^2}t} \cdot \{e^{\mp i(\omega - m\Omega_a)t + i\int k_\theta \tau dr}\}. \tag{4.12}$$

解式(4.12)也可看作具有相函数

$$\Theta(r, t) = \mp (\omega - m\Omega_a)t + \int k_\theta \tau dr \tag{4.13}$$

的一种波包,其色散关系

$$\omega = \omega(k_r, r) \tag{4.14}$$

必定等同于公式(4.9). 因为星系基态是定常的,这个色散关系当然不会显含时间变元 t. 按照一般波动理论(参看文献[10]),如果我们跟随波包以群速度在星系盘上运动,那么下列等式须成立:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad 或者 \quad \omega(k_r, r) = \omega_0 = 常数. \tag{4.15}$$

由此看出,在 (r, τ) (或 (r, k_r)) 平面上研究波包运动是十分便利的. 任一在星系盘上以群速度 C_g 运动的波包将在 (r, τ) 平面上给出一条轨线,其轨线方程即(4.15)式.

但是另一方面,让我们考察一个具有同一色散关系(4.14)的稳定波列(Stationary wave train)(4.12)式,并且假定此波列的频率 $\omega = \omega_0$,那么这个波列在共转圈上有 $\nu = 0$. 并且在 (r, τ) 平面上可表示出其结构图式. 此图式方程也是(4.15)式. 这些讨论便说明:只要给定波的色散关系,我们就可从两种不同角度来考察波的运动. 即波包运动与稳态波列运动. 在 (r, τ) 平面上波包运动的轨线恰好是稳态波列的结构图式.

以后我们会经常交替使用这两种讨论方法. 当我们谈波包运动时,也可以提及与其相应的共转圈. 此共转圈就是由常数 ω_0 所决定的半径位置.

现在让我们回转来讨论正则波动型解式的色散关系(4.11)式. 显然在极短波长范围内, $\tau \gg 1$, $S_1^2(r, \tau) \sim \kappa^2 q_1^2(r, \tau)$, 我们可重新获得熟知的 Lin-Shu 色散关系

$$\nu^2 - 1 = m^2\varepsilon_0^2 Q^2(1 + \tau^2) - 2m\varepsilon_0(1 + \tau^2)^{1/2}. \tag{4.16}$$

如果在整个 (r, τ) 平面上, $S_1^2(r, \tau) > 0$, 那么公式(4.11)给出:

$$\kappa\nu = \pm S_1(r, \tau). \tag{4.17}$$

它对应两枝不同的波包运动轨线: 一个在共转圈内 $(\nu < 0)$; 另一个在共转圈外 $(\nu > 0)$.

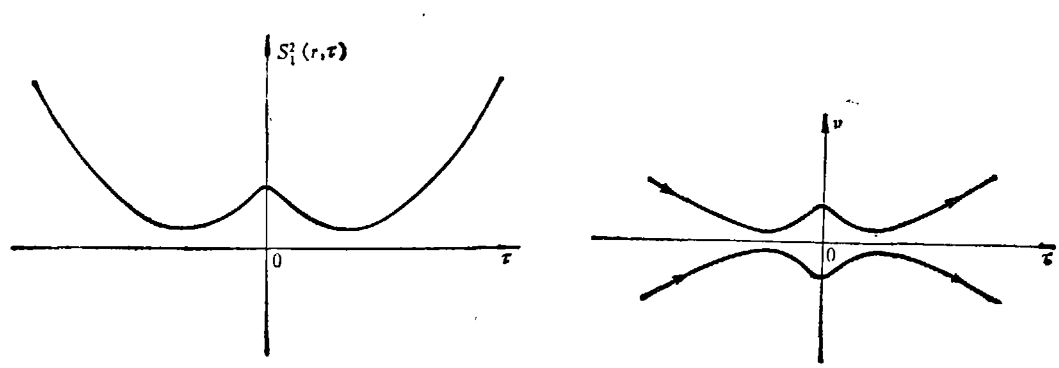

图1 当 $S_1^2 > 0$ 时,正则波动型解式的示意图

((a) 系数函数分布曲线, (b) 波包在 (ν, τ) 平面上的运动轨线)

如果忽略隧道效应，每条轨线均代表一个波子演化全过程（见图 1）．这种纯正则波动型解只代表波包的一种瞬态运动，不涉及我们感兴趣的动力学放大机制，这里暂不加以讨论．在本文中，我们主要处理函数 $S_1^2(r, \tau)$ 具有负值区域的情形．

因此，假定在 (r, τ) 平面上曲线 (Γ_1) 把全平面划分成两个区域 $D_1^{(+)}$ 和 $D_1^{(-)}$．在其中 $S_1^2(r, \tau)$ 分别取正值和负值(见图 2)．这样任一按正则波动型解运动的波包从区域 $D_1^{(+)}$ 某点 A 出发，其轨线将终止于边界线 (Γ_1) 上某点 C（对应着共转圈位置)．如果仅局限于考虑正则波动型解，我们将无法预测波包的进一步运动．

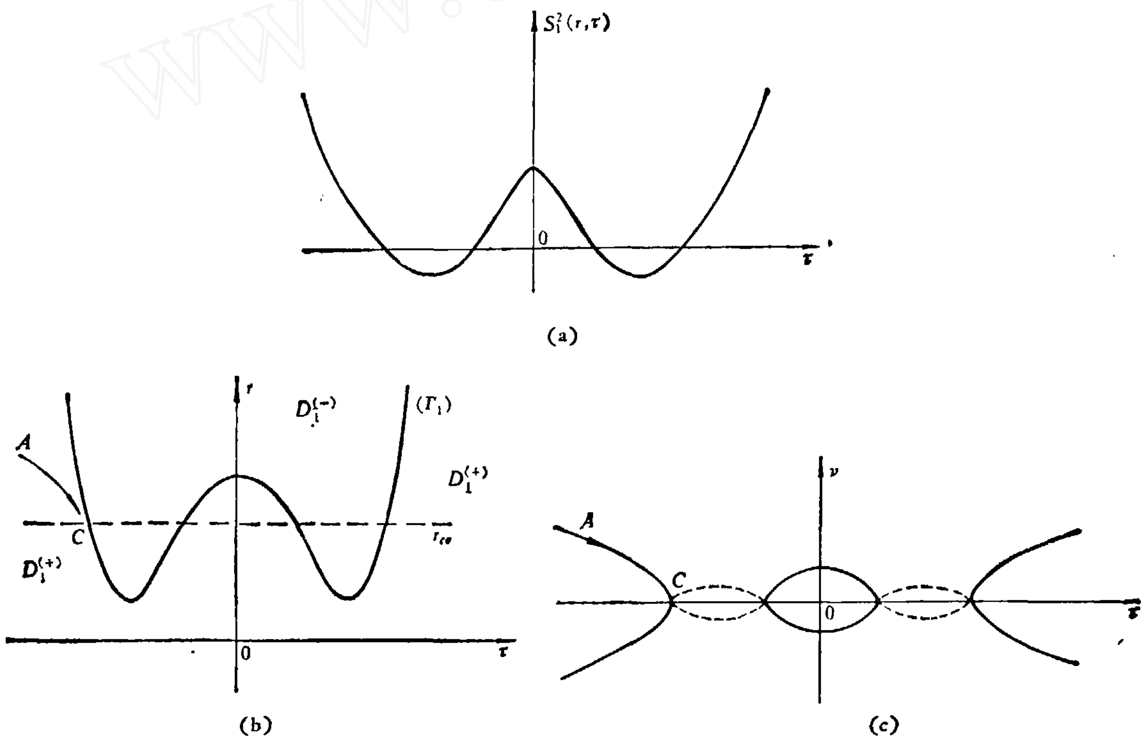

图 2　正则波动型解的一般特征示意图

((a) 系数函数分布曲线，(b) 正则波动型解在 (r, τ) 平面上存在区域，(c) 色散关系曲线)

五、Swing（转化)型解

现让我们考虑另一类解式，其中波子的波数函数依赖于时间 t，并假定其演化率为：

$$\frac{\partial k_r}{\partial t} = -m\Omega'(r) \quad \text{或者} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2A(r), \ \tau = \tau_0 + 2A(r)t. \tag{5.1}$$

这类解的波数演化特性十分类似于 Goldreich 等人用 G-L 片模型所研究的波子 Swing（转化）特性．所不同的只是这里由于考虑了星系基态的非均匀特性，表达式 (5.1) 中的参数 $A(r)$, $\Omega'(r)$ 均是空间变元 r 的函数．在这种情况下，算子 D/Dt 将退化为

$$\frac{D}{Dt}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + im[\Omega(r) - \Omega_a]\right\}\left[\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)e^{i\Phi(r,t)}\right]$$

$$= e^{i\varphi(r,t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right). \tag{5.2}$$

这里我们适当选择参考半径 R，使得

$$\Omega(R) = \Omega_a. \tag{5.3}$$

现在，方程 (3.15) 变为：

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4A\tau}{1+\tau^2}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right) + \left\{\kappa^2 q_1^2(r,\tau) + \frac{8A^2}{1+\tau^2}\left(1-\frac{2}{s}\right)\right\}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right) = 0, \tag{5.4}$$

引入变换

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) = W\exp\left\{\int\frac{2A\tau}{1+\tau^2}\,dt\right\}, \tag{5.5}$$

之后，方程 (5.4) 可化为如下标准型：

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + S_2^2(r,\tau)\right\}\tilde{\phi} = 0, \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{cases} S_2^2(r,\tau) = \kappa^2 q_1^2(r,\tau) + 4A^2 q_2^2(r,\tau), \\ q_2^2(r,\tau) = \dfrac{3}{(1+\tau^2)^2} - \dfrac{4}{s}\dfrac{1}{1+\tau^2}. \end{cases} \tag{5.7}$$

方程(5.6)在形式上完全类似于 G-L 片波子 Swing 演化方程，所以可称为星系盘上波子 Swing 演化方程. 这里不同的是由于星系基态的非均匀特性参数 $\{\kappa, A, S, \varepsilon_0, \Omega\}$ 不可能同时保持为常数，因此"弹簧常数" $S_2^2(r,\tau)$ 必定是空间变元 r 的函数. 在离迴转点较远处，方程(5.6)有如下 W. K. B. 渐近解：

$$\tilde{\phi}_\pm(r,t) \approx A_\pm(r)S_2^{1/2}\exp\left[\pm i\int_0^t S_2 dt_1\right]. \tag{5.8}$$

扰动引力势本身则为

$$\phi'_\pm(r,t) \approx A_\pm(r)S_2^{1/2}\exp\left[\pm i\int_0^t S_2 dt_1 + i\int_R^r k_r dr\right]. \tag{5.9}$$

计算这个波场的波数函数，我们可得：

$$k_r = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\pm\int_0^t \mathrm{Re}\{S_2\}dt_1 + \int_R^r k_r dr\right\}, \tag{5.10}$$

所以，欲使波场与波数函数 (5.1) 式相适应，下述波子 Swing 条件必须满足：

$$\mathrm{Re}\{S_2(r,\tau)\} = 0 \quad 或者 \quad S_2^2(r,\tau) \leqslant 0. \tag{5.11}$$

Swing 条件(5.11)极端重要. 在 G-L 片模型中，这种条件是不存在的. 该条件说明：如果把 (r,τ) 平面用界线 (Γ_2) $\{S_2^2(r,\tau)=0\}$ 划分为 $D_2^{(+)}$ 和 $D_2^{(-)}$，在其中 $S_2^2(r,\tau)$ 分别取正值与负值(见图3)，那么 Swing (转化)型解式，只能存在于 $D_2^{(-)}$ 区域内. 在其内，此解式是纯粹随时间增长或减少的，它所代表的波包不能沿径向传播 $\left[C_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_r}\right)_r = 0\right]$. 在 (r,τ) 平面上，这种波包运动只能给出一根局限于 $D_2^{(-)}$ 区域内的水平线段. 如果函数 $S_2^2(r,\tau)$ 在 (r,τ) 平面上恒为正，那么波子在星系盘根本就不存在 Swing 型的运动. 这时波包运动

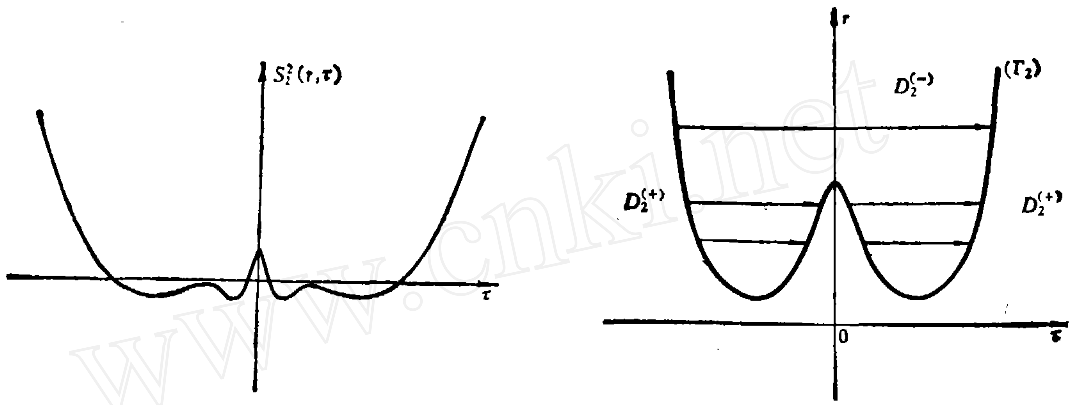

图 3　Swing 型解的一般特性示意图

((a) 系数函数的 $S_1^2(r,\tau)$ 分布曲线，(b) Swing 型解在 (r,τ) 平面上存在区域)

将只采取正则波动型式(注意，$S_1^2(r,\tau) \geqslant S_2^2(r,\tau) > 0$).

由此可看出，星系盘上波子演化过程与 G-L 片的情形有很大不同. 在 G-L 片上，波子的 Swing 过程可以无视边界条件以及其它影响持续地进行下去，在这个过程中波子从导波变为曳波，而且越变越紧. 而在星系盘上，这种 Swing 过程只能在一定范围内进行，情况变得复杂得多了.

六、一般不稳定演化型解

上面结果说明：无论正则波动型解式还是 Swing 型解式，一般都只能在 (r,τ) 平面的一定范围内成立，显然它们都不能给出波包在 (r,τ) 平面的全部运动轨线. 因此，为了研究波子在星系盘上演化的全部过程，我们必须讨论更一般的解式——一般演化型解式. 我们假定波子波数的演化率是变元 (r,t) 的一般函数：

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda(r,t). \tag{6.1}$$

因此推出：

$$\frac{\partial k_r}{\partial t} = k_\theta \lambda(r,t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m[\Omega(r) - \Omega(R)] + \delta(r,t), \tag{6.2}$$

其中

$$\delta(r,t) = \int_R^r [\lambda(r,t) - 2A(r)] k_\theta dr. \tag{6.3}$$

在这种情况下，算子 D/Dt 变为：

$$\frac{D}{Dt}\{q'\} = e^{i\Phi(r,t)}\left\{\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + i\delta\tilde{q}\right\}. \tag{6.4}$$

方程 (3.15) 变为：

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\delta\right)^2 - \frac{4A\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\delta\right)\right\}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right)$$

$$+\left\{\kappa^2 q_1^2(r,\tau)+\frac{8A^2}{1+\tau^2}\left(1-\frac{2}{s}\right)-\frac{4A}{1+\tau^2}(\lambda-2A)\right\}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right)=0. \qquad (6.5)$$

在引入变换

$$\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right)=W\exp\left\{-i\int_0^t \delta(r,t_1)dt_1+\int_0^t \frac{2A(r)\tau}{1+\tau^2}\dot{d}t_1\right\} \qquad (6.6)$$

之后,方程(6.5)可改变为:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}+S^2(r,\tau,\lambda)\right\}W=0, \qquad (6.7)$$

其中

$$\begin{cases} S^2(r,\tau,\lambda)=S_1^2(r,\tau)+f(r,\tau)\lambda(r,t), & (6.8)\\ f(r,\tau)=\dfrac{4A(r)}{1+\tau^2}\left(\dfrac{1}{1+\tau^2}-\dfrac{3}{2}\right)<0. & (6.9)\end{cases}$$

方程(6.7)就是波子不稳定演化型的基本方程式. 显然,作为特殊情形,我们可以重新得到前面两种型式的方程. 即: 当 $\lambda=0$, $S^2(r,\tau,\lambda)=S_1^2(r,\tau)$ (正则波动型); 当 $\lambda=2A(r)$; $S^2(r,\tau,\lambda)=S_2^2(r,\tau)$ (Swing 型). 为导出波数函数与波场的自相容条件,我们写出方程(6.7)的 W. K. B. 型渐近解:

$$W\sim A_{\pm}(r)S^{1/2}\exp\left[\pm i\int_0^t S dt_1\right], \qquad (6.10)$$

相应地

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\sim A_{\pm}(r)S^{1/2}\exp\left[\pm i\int_0^t S dt_1-i\int_0^t \delta dt_1+\int_0^t \alpha dt_1+i\Phi(r,t)\right]. \qquad (6.11)$$

由此可计算波子的波数函数:

$$\begin{aligned} k_r&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_r\pm\int_0^t \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial S}{\partial r}\right\}_{t_1}dt_1-\int_0^t\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}\right)_{t_1}dt_1\\ &=k_r\pm\int_0^t \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial S}{\partial r}\right\}_{t_1}dt_1-\int_0^t\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}\right)_{t_1}dt_1. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

从而便推出如下波子波数与波场的自相容条件:

$$(\lambda-2A)k_\theta=\pm\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_t\right\}. \qquad (6.13)$$

条件(6.13)式也是波子波数演化率 $\lambda(r,t)$ 所必须满足的基本方程. 我们假定从此方程式已解出函数 $\lambda(r,t)$ 和 $\tau(r,t)$. 我们可从 $\tau=\tau(r,t)$ 中解出 t, 并且以 (r,τ) 为自变量以替代变量 (r,t). 由(6.13)式不难看出: 在 (r,τ) 平面上,函数 $S(r,\tau,\bar{\lambda})$ 的负值区域 $D^{(-)}$ 内 $(\bar{\lambda}=\lambda[r,t(r,\tau)]=\bar{\lambda}(r,\tau))$, 由于 $\mathrm{Re}\{S\}=0$, 我们有关系式

$$\bar{\lambda}=2A(r);\ S^2(r,\tau,\bar{\lambda})=S_2^2(r,\tau). \qquad (6.14)$$

这就说明在 $D^{(-)}$ 区域内,一般不稳定演化型运动正好是 Swing 型运动.

现在再来看在函数 $S^2(r,\tau,\bar{\lambda})$ 的正值区域 $D^{(+)}$ 内的情况. 同前面一样,假定在静止坐标中波子振荡频率为 ω. 从(6.11)式便得出:

$$-\omega+m\Omega(R)=\pm\,\mathrm{Re}\{S(r,\tau,\lambda)\}-m[\Omega(r)-\Omega(R)]$$

或者

$$\kappa\nu = \mp \mathrm{Re}\{S(r, \tau, \lambda)\}. \tag{6.15}$$

如果在公式 (7.23) 以 (r, τ) 为自变量，那么我们便得到波子的色散关系式

$$\kappa\nu(r) = \mp \mathrm{Re}\{S[r, \tau, \bar{\lambda}(r, \tau)]\}. \tag{6.16}$$

值得注意的是，当 $\tau \gg 1$ 时，由公式(6.8)，(6.9)式可看出：$S^2(r, \tau, \lambda) = S_1^2(r, \tau) + O(1/\tau^2) \approx S_1^2(r, \tau)$. 而由公式 (4.9) 已知，$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)_t = -2Ak_\theta$，所以，由 (6.13) 式可推出，如 $\tau \to \infty$。

$$\lambda \to 0 \quad 或 \quad \lambda = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right). \tag{6.17}$$

换言之，在极短波长范围内，一般演化型运动应和正则波动型运动相合。

由上讨论我们看到，只要由方程 (6.13) 确定波子波数演化率 $\lambda(r, t)$ (或波数函数 $\tau(r, t)$)，波子演化的基本方程(6.7)便完全确定，波的传播与演化规律就可以求解出来. 而且我们还看到波子的这种一般不稳定演化型运动在 $D^{(-)}$ 区域内，即 Swing 型运动；在极短波范围内($\tau^2 \gg 1$) 即正则运动型运动.

当然，由方程(6.13)确定演化率 $\lambda(r, t)$ 不是简单的事，给出一种近似简化理论以确定该函数，将是十分有意义的事情. 在本文的下部分我们将叙述这一工作.

参 考 文 献

[1] Goldreich, P. and Lynden-Bell, D., *M. N. R. A. S.*, **130**(1965), 125.
[2] Julian, W. H. and Toomre, A., *Ap. J.*, **146**(1966), 810.
[3] Lin, C. C. and Lau, Y. Y., *SIAM, J. Appl. Math.*, **29**(1975), 352; Lin, C. C. and Bertin, G., *IAU Symposium,* No. 106, 1983.
[4] Goldreich, P. and Tremaine, S., *Ap. J.*, **222**(1978), 850.
[5] Lu ke O. C. Durary, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **193**(1980), 337—343.
[6] Lau, Y. Y., Waves in a Sheared Medium, 1980.
[7] Toomre, A., *The structure and evolution of Normal Galaxy* (Ed. Fall, S. M. et al.), Cambridge University Press, New York, 1981, 111—136.
[8] Hunter, C., *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics,* 1984, 179—203.
[9] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves,* John Wiley and Sons Inc., 1974.