

复变量广义 Airy 函数

李家春 赵大刚

(中国科学院力学研究所, 1984年9月18日收到)

摘 要

本文详尽研究了在波传播与流动稳定性问题中有广泛应用的广义 Airy 函数, 给出了复变量广义 Airy 函数的一系列图表. 计算结果是令人满意的.

Airy 函数是具有广泛应用的特殊函数之一, 尤其在波动问题中, 在先导波、焦散面附近的物理量均可以 Airy 函数来表达. 对于以一阶零点为转向点的含大参数的二阶方程, 其一致有效渐近解也是 Airy 函数^[1]. 在研究流动稳定性与星系密度波理论时, 经常要遇到复本征值问题^[2,3], 因此, 必须计算复变量的 Airy 函数. Reid 等^[4-6]还定义了一组广义 Airy 函数, 并用它来表达相应于平面 Couette 流、平面 Poiseuille 流的 Orr-Sommerfeld 方程的准确解和一致有效渐近解. 迄今, 人们只给出了实变量的 Airy 函数表^[7], 本文提出了计算复变量广义 Airy 函数的方法及结果, 无疑, 这对于上述领域的研究工作是有益的.

1. 定义 1972年, W. H. Reid 引进了一类广义 Airy 函数 $A_k(z)$, $A_k(z, p)$, $A_k(z, p, q)$, 其积分表示为:

$$A_k(z, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} t^{-p} (\ln t)^q \exp\left(zt - \frac{1}{3}t^3\right) dt \quad (1.a)$$

$$B_k(z, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k} t^{-p} (\ln t)^q \exp\left(zt - \frac{1}{3}t^3\right) dt \quad (1.b)$$

式中, p 为整数, q 为零或正整数, 积分路径 L_k, l_k 如图 1 所示.

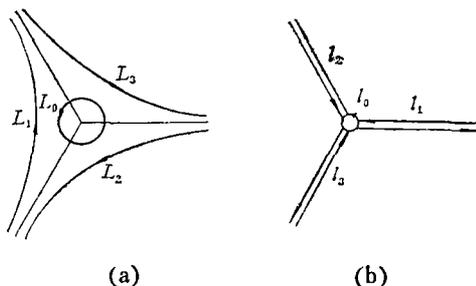


图1 广义 Airy 函数积分路径

注意, 上述定义包括了通常的 Airy 函数在内, 即

$$A_k(z) = A_k(z, 0, 0) \quad (1.c)$$

$$A_k(z, p) = A_k(z, p, 0) \quad (1.d)$$

2. 方法 在计算复变量广义 Airy 函数时, 我们采用把复平面上的积分化成实积分的方法, 再依靠数值计算来得到结果.

譬如: 在计算 $A_1(z)$ 时, 我们有

$$A_1(z) = (I_1 + I_2) + i(I_3 + I_4) \quad (2.a)$$

其中

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[-(ax+y)\xi - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) \xi^3 \right] \left\{ \cos \left[(x-ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] - \alpha \sin \left[(x-ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] \right\} d\xi \quad (2.b)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[-(ax-y)\xi - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) \xi^3 \right] \left\{ \cos \left[(x+ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] - \alpha \sin \left[(x+ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] \right\} d\xi \quad (2.c)$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[-(ax+y)\xi - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) \xi^3 \right] \left\{ \alpha \cos \left[(x+ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] + \sin \left[(x-ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] \right\} d\xi \quad (2.d)$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp \left[-(ax-y)\xi - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) \xi^3 \right] \left\{ \alpha \cos \left[(x+ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] + \sin \left[(x+ay)\xi + \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 \right) \xi^3 \right] \right\} d\xi \quad (2.e)$$

这里, 积分路径如图 2(a) 所示. 这样选择一方面是为了使积分表达式尽量地简单, 另一方面, 适当选取 α 可以使积分迅速收敛. 因为在每个积分中, 都含有 $\exp \left[- \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right) \xi^3 \right]$ 的因子, 当 $\alpha=1$ 时, 衰减得最快.

对于广义 Airy 函数, 为了避开原点的奇异性, 其积分路径如图 2(b) 所示, 并同样地将复平面上的积分化成实积分来计算.

3. 瑕积分的处理 由于积分(2.b)~(2.e)的积分上限为 ∞ , 我们可用两种方法处理.

一是通过误差估计, 在一定精度范围内, 将无穷域的积分用有限域的积分来代替. 譬如在计算 I_1 时, 当上限改成有限值 R 时, 我们有

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \exp \left[-(x+y)\xi - \frac{2}{3} \xi^3 \right] \left\{ \cos \left[(x-y)\xi - \frac{2}{3} \xi^3 \right] - \sin \left[(x-y)\xi - \frac{2}{3} \xi^3 \right] \right\} d\xi \quad (3.a)$$

那么

$$E_{r,r} = |I_1 - \bar{I}_1| \leq \frac{1}{\pi} \int_R^{\infty} \exp \left[2r\xi - \frac{2}{3} \xi^3 \right] d\xi \quad (3.b)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 当 $R \geq \max(\sqrt{6r}, 1)$ 时,

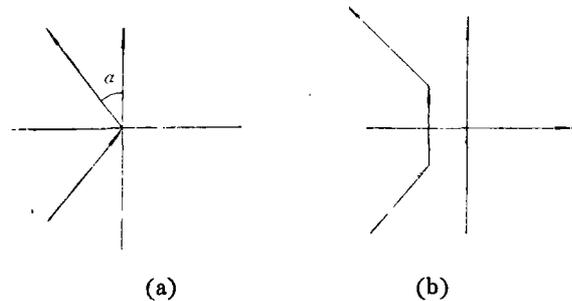


图2 计算复变量广义 Airy 函数的积分路径

$$E_{rr} \leq \frac{1}{\pi} \int_R^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{3}\xi^2\right) d\xi \quad (3.c)$$

我们用渐近积分估计上式,

$$E_{rr} \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) \sim \frac{3}{2\pi R} \left[1 - \frac{3}{2R^2} + (1 \cdot 3) \left(\frac{3}{2R^2}\right)^2 - \dots + (-1)^n (2n-1)!! \left(\frac{3}{2R^2}\right)^n + \dots\right] \exp\left(-\frac{R^2}{3}\right) \quad (3.d)$$

取 $R=7$ 时, 最佳截断在第15项处, 误差小于 10^{-8} .

另一种方法是使积分上限逐步增大, 直至相继的两个积分值之差异小于事先规定的小量为止.

4. 自变量及其范围的选取 由于我们可以利用递推公式, 不必计算全部函数, 所以计算工作量大大地减小了.

从附录中, 我们看到一个函数与另一个函数之间的联系往往用极坐标表达最为方便, 所以, 我们的函数表是以 (r, θ) 为自变量的.

附录还给出了广义 Airy 函数的渐近展开. 我们选取自变量的范围为: r 从 0 到 5, θ 从 $0^\circ \sim 360^\circ$. 至于 $r > 5$ 时, 可以用渐近公式得到较准确的函数值.

5. 检验 为了保证我们的计算结果达到规定的准确度, 我们采用下述方法进行检验.

首先将结果与实变量 Airy 函数表比较, 可以看到, 在自变量取实数时, $A_1(z), A_1(z, -1)$ (即 $A_1'(z)$) 都准确到八位有效数字.

其次, 要求计算的结果满足附录中的恒等式.

三是采用复变量数值积分的方法来计算函数值, 并与我们的结果进行比较. 譬如: $A_1(z)$ 满足方程

$$y'' - zy = 0 \quad (4.a)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 0.35502805 \\ y'(0) &= -0.25881940 \end{aligned} \right\} \quad (4.b)$$

在复平面上, 我们沿着 $\eta = \operatorname{tg}\theta \xi$ 积分, 得到下述微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_{01}}{dr} &= y_{11} \cos\theta - y_{12} \sin\theta \\ \frac{dy_{02}}{dr} &= y_{11} \sin\theta + y_{12} \cos\theta \\ \frac{dy_{11}}{dr} &= r(y_{01} \cos 2\theta - y_{02} \sin 2\theta) \\ \frac{dy_{12}}{dr} &= r(y_{01} \sin 2\theta + y_{02} \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.c)$$

以及初始条件:

$$\left. \begin{aligned} y_{01}(0) &= 0.35502805 \\ y_{02}(0) &= 0 \\ y_{11}(0) &= -0.25881940 \\ y_{12}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.d)$$

上述方程组的计算结果应使

$$y_{01} + iy_{02} = A_1(z) \quad (4.e)$$

$$y_{11} + iy_{12} = A_1(z, -1) \quad (4.f)$$

我们试算了几例，结果是令人满意的（图3~图14）。

致谢：美国麻省理工学院林家翘教授建议了这项工作，作者谨表示衷心感谢。

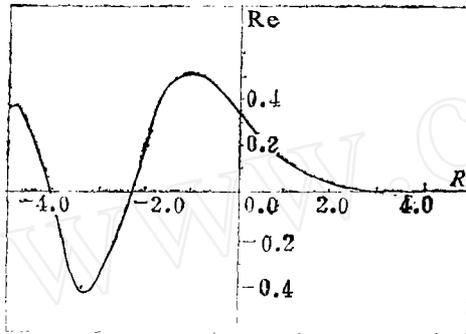


图3 $A_1(z, 0) 0^\circ, 180^\circ$

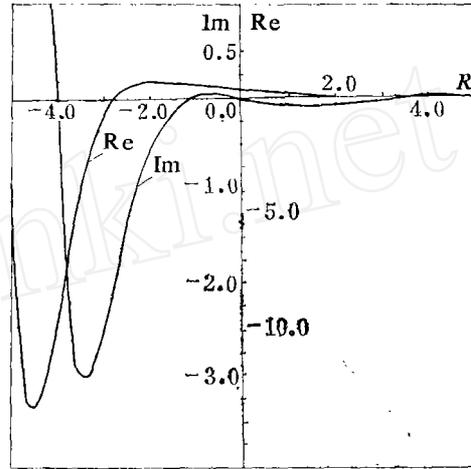


图4 $A_1(z, 0) 30^\circ, 210^\circ$

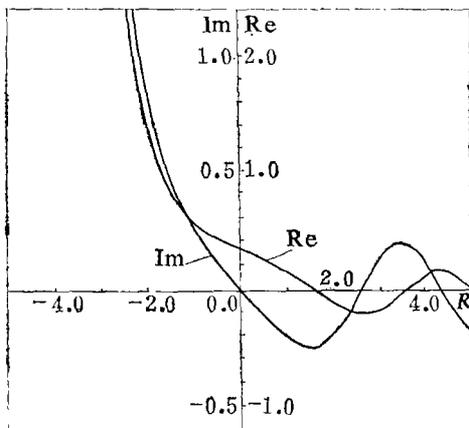


图5 $A_1(z, 0) 60^\circ, 240^\circ$

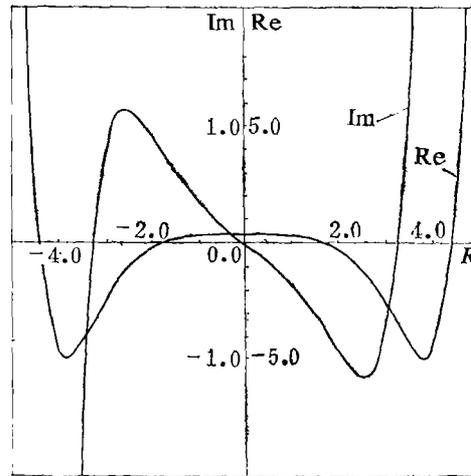


图6 $A_1(z, 0) 90^\circ, 270^\circ$

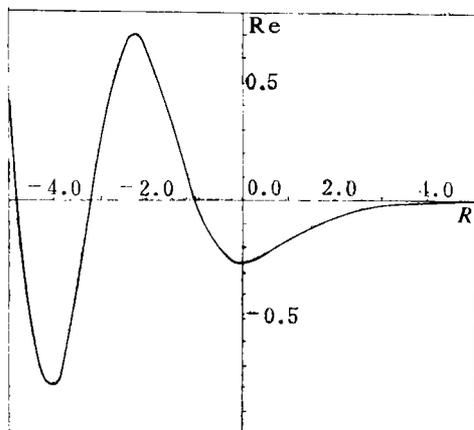


图7 $A_1(z, -1)0^\circ, 180^\circ$

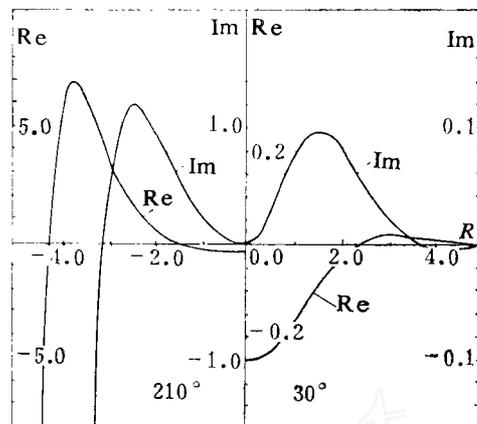


图8 $A_1(z, -1)30^\circ, 210^\circ$

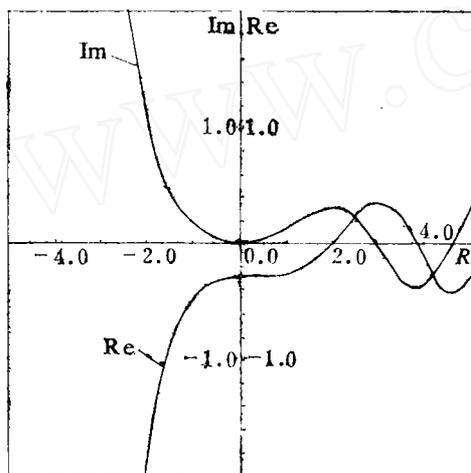


图9 $A_1(z, -1)60^\circ, 240^\circ$

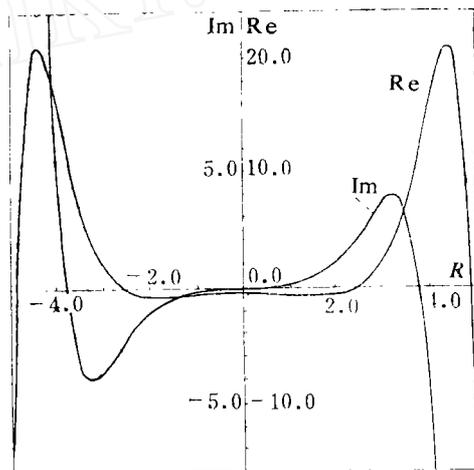


图10 $A_1(z, -1)90^\circ, 270^\circ$

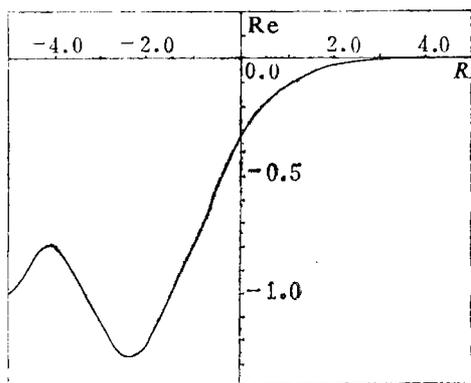


图11 $A_1(z, 1)0^\circ, 180^\circ$

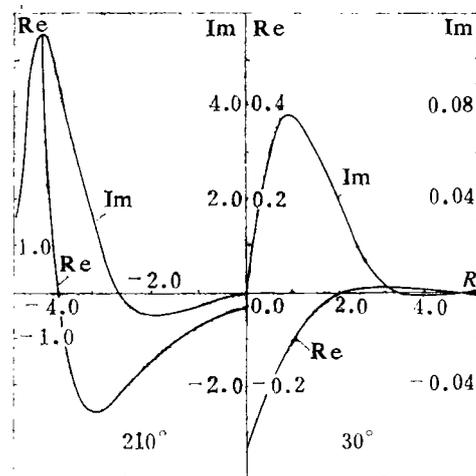


图12 $A_1(z, 1)30^\circ, 210^\circ$

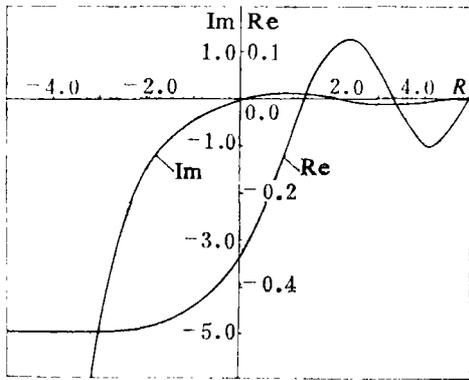


图13 $A_1(z, 1) 60^\circ, 240^\circ$

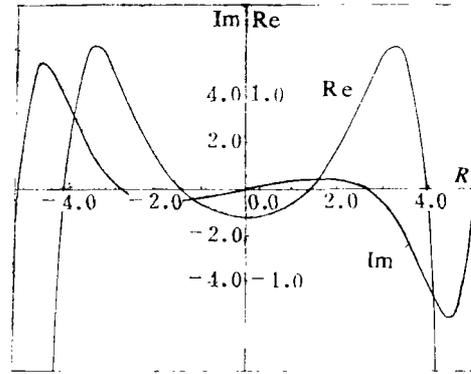


图14 $A_1(z, 1) 90^\circ, 270^\circ$

附录

1. 递推公式

$$\left. \begin{aligned} A_1(z) &= A_1(z) \\ A_2(z) &= \exp[2\pi i/3] A_1(z \exp[2\pi i/3]) \\ A_3(z) &= \exp[-2\pi i/3] A_1(z \exp[-2\pi i/3]) \\ \sum_{i=1}^3 A_i(z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(z, p) &= A_1(z, p) \\ A_2(z, p) &= \exp[-2\pi i(p-1)/3] A_1(z \exp[2\pi i/3], p) \\ A_3(z, p) &= \exp[2\pi i(p-1)/3] A_1(z \exp[-2\pi i/3], p) \\ \sum_{i=1}^3 A_i(z, p) + B_0(z, p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(z, p, q) &= A_1(z, p, q) \\ A_2(z, p, q) &= \exp[-2\pi i(p-1)/3] \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \left(\frac{2\pi i}{3}\right)^j A_1(z \exp[2\pi i/3], p, q-j) \\ A_3(z, p, q) &= \exp[2\pi i(p-1)/3] \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \left(\frac{2\pi i}{3}\right)^j A_1(z \exp[-2\pi i/3], p, q-j) \\ \sum_{i=1}^3 A_i(z, p, q) + B_1(z, p, q) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

2. 渐近展开

$$A_1(z, p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\pm 1)^p z^{-\frac{(2p+1)}{4}} e^{\pm z} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m a_m(p) \xi^{-m}$$

式中 $\xi = \frac{2}{3} z^{3/2}$

$$a_0(p) = 1$$

$$a_1(p) = \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} [12(p+1)^2 - 7]$$

$$a_2(p) = \frac{1}{2^7 \cdot 3^4} [144(p+1)^4 + 768(p+1)^3 + 696(p+1)^2 - 768(p+1) - 455]$$

那么

$$\begin{aligned}
 A_1(z, p) &\sim A_- & z \in T_2, T_3 \\
 A_2(z, p) &\sim iA_+ & z \in T_3, T_1 \\
 A_3(z, p) &\sim \begin{cases} -A_- \\ -iA_+ \end{cases} & \begin{matrix} z \in T_1 \\ z \in T_2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

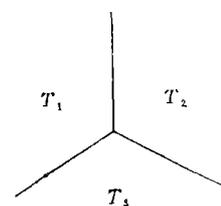


图15 渐近展开之区域

参 考 文 献

- [1] 李家春、戴世强, 数学物理中的渐近方法, 中国科学院研究生院, 北京(1984).
- [2] 李家春, 流动稳定性和渐近方法, 力学与实践, 3, 4 (1981).
- [3] 岳曾元, 关于奇异摄动理论在自引力介质波动中的应用, 力学学报, 6 (1983).
- [4] Reid, W. H., Composite approximation to the solutions of the Orr-Sommerfeld equation, *Studies in Appl. Math.* 51, 4 (1972).
- [5] Reid, W. H., An exact solution of the Orr-Sommerfeld equation for plane Couette flow, *Studies in Appl. Math.*, 61, 1 (1979).
- [6] Lakin, W. D. et al, Approximations to the eigenvalue relation for the Orr-Sommerfeld problem, *Phi. Trans. Roy. Soc. Lon.*, 289, 1360 (1978).
- [7] Abramowitz, M. and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Wash., US GPO (1965).

Generalized Airy Functions with Complex Variables

Li Jia-chun Zhao Da-gang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In the present paper, we made a detailed study of the generalized Airy functions, which have found wide applications in the field of wave propagation and hydrodynamic stability. A series of tables and graphs are provided for the above functions with complex variables. The results are proved satisfactory.