第5卷 第1期
1984年2月

工程热物理学报
JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS

Vol. 5, No. 1
Feb., 1984

标量脉动"能量"传递函数与 −5/3 次方律

谢 象 春
(中国科学院力学研究所)

本文在 Heisenberg 关于速度脉动能量传递函数假设的基础上，提出标量脉动"能量"传递函数的相应形式。讨论了具有常值横向平均速度梯度与标量梯度的均匀湍流流场中关于大波数情形的标量脉动"能"谱性质.

众所周知，阐明剪切湍流中的热量或质量传递机理对研究湍流传热与湍流燃烧等问题具有十分重要的意义。这里，我们讨论具有常值横向平均速度梯度与标量（温度或浓度）梯度的粘性不可压缩均匀湍流流场中的标量脉动"能"谱问题.

所论流场中 A、B 两点的标量脉动二元相关动力学方程具有下列形式

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{\gamma,\gamma} + \frac{d\Gamma}{dx_2}(Q_{2,\gamma} + Q_{\gamma,2}) + \frac{dU_1}{dx_2}\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q_{\gamma,\gamma}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \xi_i}(S_{\gamma,i\gamma} - S_{i\gamma,\gamma}) + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{\gamma,\gamma} \tag{1}$$

式中

$$Q_{\gamma,\gamma} = \overline{\gamma_A \gamma_B},\quad Q_{2,\gamma} = \overline{(u_2)_A \gamma_B},\quad Q_{\gamma,2} = \overline{\gamma_A (u_2)_B},$$
$$S_{\gamma,i\gamma} = \overline{\gamma_A (u_i)_B \gamma_B},\quad S_{i\gamma,\gamma} = \overline{\gamma_B (u_i)_A \gamma_A}$$

此处 x_i 表示笛卡儿坐标，$\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A$，$u_i$ 表示速度脉动，γ 表示标量脉动，U_i 表示平均速度，Γ 表示平均标量，α 表示扩散系数，t 表示时间，重复下标表示求和. 采用三维 Fourier 变换，则由上式得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\gamma(k, t) + G_\gamma(k, t)\frac{d\Gamma}{dx_2} + W_\gamma(k, t)\frac{dU_1}{dx_2}$$
$$= F_\gamma(k, t) - 2\alpha k^2 E_\gamma(k, t) \tag{2}$$

此处 k 是波数.（2）式中的标量谱函数 $E_\gamma(k, t)$、湍谱函数 $G_\gamma(k, t)$ 的物理意义以及标量"传递"谱函数 $F_\gamma(k, t)$ 与湍谱函数 $W_\gamma(k, t)$ 所满足的条件如下:

$$\int_0^\infty E_\gamma(k, t)\,dk = \overline{\gamma^2},\quad \int_0^\infty G_\gamma(k, t)\,dk = 2\overline{\gamma u_2},$$
$$\int_0^\infty F_\gamma(k, t)\,dk = 0,\quad \int_0^\infty W_\gamma(k, t)\,dk = 0.$$

由方程(2)可得关于定常流动在大波数平衡区即 $k \gg k_e$（k_e 表示含能涡旋波段的波数）情形的标量谱方程

本文于1983年1月3日收到.

$$\varepsilon_\gamma = 2\alpha\int_0^k k^2 E_\gamma(k)dk - \int_0^k F_\gamma(k)dk \tag{3}$$

此处 $\varepsilon_\gamma = -2\overline{\gamma u_2}\dfrac{dT}{dx_2}$ 表示由主要运动中的平均标量梯度产生的标量脉动“能量”或由湍流引起的主要运动标量“能量”消散.

为了求解方程(3)，我们在 Heisenberg 关于速度脉动能量传递函数假设[1]的基础上，由量纲分析，设所论标量脉动“能量”传递函数具有下列形式:

$$\int_0^k F_\gamma(k)\,dk = -2\beta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\gamma}}\int_k^\infty\sqrt{\frac{E_\gamma(k)}{k^3}}\,dk\int_0^k k^2E_\gamma(k)dk \tag{4}$$

式中 $\varepsilon = -\overline{u_1u_2}\dfrac{dU_1}{dx_2}$，$\beta$ 是无量纲常数．于是(3)式可写成:

$$\varepsilon_\gamma = 2\alpha\int_0^k k^2E_\gamma(k)dk + 2\beta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\gamma}}\int_k^\infty\sqrt{\frac{E_\gamma(k)}{k^3}}\,dk\int_0^k k^2E_\gamma(k)dk \tag{5}$$

此方程的解具有与 Bass[2] 关于各向同性湍流速度脉动能谱动力学方程准确解相类似的下列形式:

$$E_\gamma(k) = \left(\frac{8}{9\beta}\right)^{2/3}(\varepsilon^{-3}\varepsilon_\gamma^4\alpha^5)^{1/4}\frac{(k/k_d)^{-5/3}}{\left[1+\dfrac{8}{3\beta^2}\left(\dfrac{k}{k_d}\right)^4\right]^{4/3}} \tag{6}$$

此处 $k_d = (\varepsilon/\alpha^3)^{1/4}$．所得标量谱公式(6)是具有常值横向平均速度梯度的均匀湍流速度谱[2] 的相应形式．当 $k/k_d \ll 1$，则由上式得到所论流动标量脉动“能”谱的 −5/3 次方律:

$$E_\gamma(k) = \left(\frac{8\varepsilon_\gamma^{3/2}}{9\beta\varepsilon^{1/2}}\right)^{2/3}k^{-5/3} \tag{7}$$

相应的一维标量谱是:

$$E_{\gamma1}(k_1\eta) = 常数\cdot(k_1\eta)^{-5/3} \tag{8}$$

式中 η 表示 Колмогоров 微尺度，k_1 表示所论一维谱的波数矢量分量.

同样，仿照前面把标量“传递”谱函数 $F_\gamma(k, t)$ 表示成如(4)式所示的类似形式求解关于各向同性湍流流场的标量谱方程，则可得到类似(6)式的解；而 Corrsin (1951)[3] 与 Hinze (1959)[2] 的结果则是它的特殊情形.

上面所讨论的此种具有常值横向平均速度梯度与标量梯度的均匀湍流流场与其它已被研究过的流动相比系较为接近实际情形的一种流动[2]．另外，在一般剪切湍流流场中，两点的诸脉动相关函数随位置的变化比随两点间距离的变化要小．因此，从这样一些意义上讲，所得(7)式[从而(8)式]可近似地适用于普遍剪切湍流流动.

按照公式(8)与 Antonia 和 Danh 关于湍流边界层一维温度脉动谱的实验数据[4]比较示于图 1(图中 $\bar{\chi}$ 是各向同性的平均消散，ν 是运动粘性系数)，由该图可以看出，在边界层湍流流场中(实验室 Reynolds 数条件下)，存在 $0.05<k_1\eta<0.12$ 的惯性次区，其温度谱性质证明了本文的理论结果.

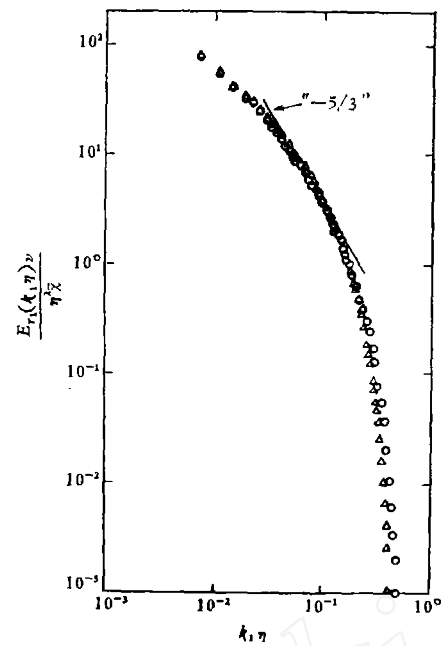

图 1

参 考 文 献

[1] Heisenberg, W., "Zur statistischen Theorie der Turbulenz", Z. Physik, 124, (1948), pp.628—657.

[2] Hinze, J. O., "Turbulence", McGraw-Hill, New York, (1959).

[3] Corrsin, S., "On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence", J. Appl. Phys., 22, 4, (1951), pp. 469—473.

[4] Antonia, R. A. and Danh, H. Q., "Structure of temperature fluctuations in a turbulent boundary layer," Phys. Fluids, 20, 7, (1977), pp. 1050—1057.

TRANSFER FUNCTION FOR SCALAR FLUCTUATION "ENERGY" AND−5/3 POWER LAW

Xie Xiangchun (Shieh Sang-Chun)

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, on the basis of the hypothesis of Heisenberg for the transfer function of velocity fluctuation energy, the transfer function for scalar fluctuation "energy" is suggested. The characteristics of scalar fluctuation "energy" spectrum concerning the large wave number case for the homogeneous turbulent flow with constant transverse mean velocity gradient and scalar gradient are discussed.