

非定常膨胀波进入圆管后 壁面附面层增长的计算

王松皋

(中国科学院力学研究所)

一、引言

为了提高管风洞、激波管的运行品质,非定常膨胀波进入圆管后壁面附面层增长问题的研究有着重要意义。尤其在跨音速管风洞,贮气管内附面层随时间的增长情况,直接影响到管风洞的运行时间及流动品质。这一问题的解决是设计管风洞的前提和基础。

贝克尔^[1](E. Becker)首先计算了贮气管道内附面层的生长。他用二元不可压缩的假定和 $1/7$ 次方速度分布,简化了附面层动量积分方程;然后用勃拉休斯(Blasius)表面摩擦规律求出了解,并得到了等效的有心膨胀波运动速度。虽然在附面层内及表面摩擦系数中考虑了可压缩性和热交换对 ρ/ρ_e 的影响,其结果还是不可压缩的。H. 路德维希^[2](Ludwig)用贝克尔方法,对速度剖面与表面摩擦系数规律作了修正,得到了比较好的结果。

J. C. 雪凡尔斯(Sivells)的工作^[3]指出,必须在轴对称性、表面摩擦系数、速度剖面及等效膨胀波原点位置等四方面进行修正,等效膨胀波传播速度仍可用贝克尔的结果。在他的计算过程中进行了二次修正:一次是对平板计算结果进行修正,第二次则根据实验起动时间对膨胀波等效原点位置进行修正。计算用数值方法。

我们直接从非定常轴对称附面层动量积分方程出发,假设定常时的附面层速度剖面及表面摩擦规律可用于非定常附面层状态,假设管内核心流压力轴向梯度可以不计,直接对膨胀波系内部及波后的壁面附面层增长进行求解。最后得到对应的等效膨胀波传播速度及附面层厚度计算公式。计算公式是代数表达式,在二元不可压缩的情况下就是贝克尔的结果。计算过程简单,与实验结果符合良好。从工程设计目的出发,等效膨胀波原点位置的修正可以不做。

二、基本方程及其解

用于圆管的非定常附面层动量积分方程是:

本文于1983年3月22日收到,5月4日收到修改稿。

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} (2\theta + \delta^*) + \theta \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dx} \right) + \frac{1}{\rho_e u_e^2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_e \delta^*) - \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \delta_\rho) = \frac{1}{2} c_f \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \\ \delta^* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \\ \delta_\rho &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 ρ 、 u 、 r_0 分别表示密度、流向速度及管道的内半径, 脚注 e 表示附面层边界自由流条件, c_f 是表面摩擦系数。 x 是轴向坐标, 正向与膨胀波传播方向一致, y 是径向坐标, 从壁面指向轴心。 t 是时间。

由

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} \delta^* + \frac{1}{u_e^2} \delta^* \frac{\partial u_e}{\partial t} &= \frac{\delta^*}{u_e} \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial u_e}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\delta^*}{\rho_e u_e^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

(1) 式可化为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 \frac{\theta}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\theta}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \delta^* - \rho_e \delta_\rho) = \frac{1}{2} c_f \quad (3)$$

用幂次律速度分布代入 (2) 式可以求出:

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \frac{\delta^* - \delta_\rho}{\theta} &= \frac{2}{n+2} \left[1 - \frac{n}{2(n+1)} \frac{T_e}{T_w} \right] - \frac{\delta}{r_0} \frac{1}{2(2n+1)} \left(1 - \frac{n}{2n+1} \frac{T_e}{T_w} \right) - \\ &\quad \frac{n}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{T_e}{T_w} + \left(1 - \frac{T_e}{T_w} \right) \frac{n+1}{n+3} \right] - \\ &\quad \frac{-\left(1 - \frac{T_e}{T_w} \right) \left[\frac{1}{n+1} - \frac{\delta}{r_0} \frac{1}{2(2n+1)} \right]}{n} \\ &\quad - \frac{\delta}{(2n+1)(2n+2) r_0} \left[\frac{T_e}{T_w} + \left(1 - \frac{T_e}{T_w} \right) \frac{2n+1}{2n+3} \right] \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时上式趋于 1。在 $n=7 \sim 11$ 时, $(T_e/T_w)=0.8 \sim 1.0$, $(\delta/r_0)=0 \sim 1$ 引起的变化在 4% 左右。整个变化约 8%。于是我们假定 Δ 为常数。(3) 式可重写为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta \left(\frac{2}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) + \frac{\Delta}{\rho_e u_e} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \theta) = \frac{1}{2} c_f \quad (4)$$

令

$$\phi = \frac{\rho_e u_e}{\rho_4 u_4} \theta \quad (5)$$

这里脚注 4 表示贮气状态。(4) 式化为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\phi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\Delta}{u_e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\phi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\rho_e u_e}{\rho_4 u_4} c_f \quad (6)$$

(6) 式是讨论的基本方程式。

一般说来,非定常膨胀波是一个有厚度的波系。波系内附面层增长过程应该与波系后附面层增长过程分开来讨论,在波尾处把二个解连接起来。图1解释了这种情况。下面我们分两种情况来讨论,然后把它们组合起来。

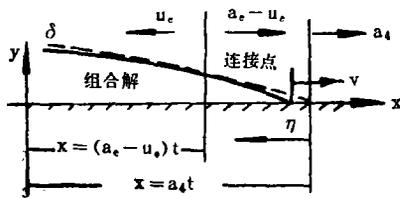


图1 附面层增长概图

(1) 有心波的情况

当非定常膨胀波的厚度为零时,圆管中波后核心流参数 ρ_e 与 u_e 是不变量,方程(6)简化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\Delta}{u_e} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{2} c_f \quad (7)$$

根据偏微分方程一般理论,可以得到(7)式的特征方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 1 \\ V \frac{dt}{ds} &= V \frac{\Delta}{u_e} \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{1}{2} c_f \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里 V 表示有心膨胀波的传播速度。从上式可以得到(7)式的等价常微分方程式:

$$\left(1 - \frac{V}{u_e} \frac{\delta^* - \delta_e}{\theta}\right) \frac{d\theta}{dX} = \frac{1}{2} c_f \quad (9)$$

其中

$$X = x - Vt$$

在确定 $c_f = c_f(\theta)$ 后,(9)式即可解出。

(2) 波系内的情况

令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= 1 - \frac{x}{a_4 t} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这里 a 表示音速。下标4表示贮气状态。有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{a_4} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{(1-\eta)^2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当 $\gamma = 1.4$ 时,非定常膨胀波系内参数与波前参数的关系是^[1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_e}{a_4} &= -\frac{5}{6} \eta \\ \frac{\rho_e}{\rho_4} &= \left(1 - \frac{1}{6} \eta\right)^5 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_e}{a_4}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_e}{a_4}\right) &= -\frac{5}{6} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

粘性系数用萨斯兰特 (Sutherland) 公式近似^[1]:

$$\frac{\mu_e}{\mu_s} = 1 - 0.28\eta \quad (14)$$

用以上各式, (6) 式可写为:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\eta}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left(1 + \frac{6\Delta}{5} \frac{1-\eta}{\eta} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1-\eta}{\xi \eta} \phi \left(1 - \frac{6\Delta}{5} \frac{1-\eta}{\eta} \right) \\ & = \frac{5}{12} \eta \left(1 - \frac{1}{6} \eta \right)^5 c_f \end{aligned} \quad (15)$$

由于 $Re_\theta = \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e} = \phi \frac{\rho_s a_s}{\mu_s} \frac{\mu_s}{\mu_e} = f(\phi, \eta)$, (15) 式中 $c_f = c_f(\phi, \eta)$

(15) 式的特征方程组是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= -1 \\ \frac{d\eta}{ds} &= \frac{1-\eta}{\xi} \left(1 + \frac{6\Delta}{5} \frac{1-\eta}{\eta} \right) \\ \frac{d\phi}{ds} + \frac{1-\eta}{\xi \eta} \phi \left(1 - \frac{6\Delta}{5} \frac{1-\eta}{\eta} \right) &= \frac{5}{12} \eta \left(1 - \frac{1}{6} \eta \right)^5 c_f \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

从前二式可得:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{-\eta d\eta}{(1-\eta) \left[\frac{6\Delta}{5} + \left(1 - \frac{6\Delta}{5} \right) \eta \right]} = - \left[\frac{1}{1-\eta} - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta} \right) \eta} \right] d\eta$$

解为:
$$\frac{\xi}{1-\eta} = c \left[1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta} \right) \eta \right]^{\frac{5}{6\Delta} - 1} \quad (17)$$

常数 c 在以后再定。

由 $\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\eta}{ds}$ 及 (17) 式, (15) 式的等效常微分方程是:

$$\frac{d\phi}{d\eta} - \frac{\phi}{\eta} \frac{1 - \left(1 + \frac{5}{6\Delta} \right) \eta}{1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta} \right) \eta} = \frac{25}{72} c \eta^2 \left(1 - \frac{1}{6} \eta \right)^5 \left[1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta} \right) \eta \right]^{\frac{5}{6\Delta} - 2} c_f \quad (18)$$

在确定 c_f 后可以解出 $\phi = \phi(\eta)$ 即 $\theta = \theta(\eta)$ 。

(3) 组合解

严格说, 附面层增长过程应该如图 1 所示分别解出波系内外二种情况, 然后在波尾处把二个解连接起来得到完整的解。显然 (18) 的解占主要工作量。我们可以设想一个组合解: 找出一个等效的无厚度膨胀波, 在同样时间、在波系的波尾处它引起的附面层厚度保持与 (18) 的结果一样。我们就用这样一个无厚度膨胀波来统一求解。实际上, 这是一个求等效有心波的传播速度 V 的问题。

假定一般的摩擦系数规律:

$$c_f = k(Re_\theta)^{-m} \quad (19)$$

k 为常数, 下标 θ 表示对 θ 取 Re 。

代入方程 (9) 得解:

$$-\theta^{m+1} = \frac{k}{2} (1+m) \frac{Vt-x}{\left(\frac{\rho_e u_e}{\mu_e}\right)^m \left(1 - \frac{V}{u_e} \Delta\right)}$$

即

$$\frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_e a_e}{\mu_e}\right)^{m+1} \frac{\mu_e}{\rho_e u_e} \phi^{m+1} = \frac{k}{2} a_e t \frac{1 - \frac{V}{a_e} - \eta}{1 - \frac{V}{u_e} \Delta} \quad (20)$$

把非定常膨胀波关系式代入, 可化为:

$$\frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_e a_e}{\mu_e}\right)^m \phi^{m+1} = \frac{5}{12} k a_e t \eta^2 \left(1 - \frac{\eta}{6}\right)^5 (1 - 0.28\eta)^m \left(\frac{1 - \frac{V}{a_e} - \eta}{\eta + \frac{6}{5} \frac{V}{a_e} \Delta}\right) \quad (21)$$

在波尾处 $\eta = \eta_1 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_3}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3}$, 一般说来, $M_3 < 0.30$ 即 $\eta_1 < 0.34$, η_1 是一个小量。

(21) 式右边只保留 η_1 的最低次项可得:

$$\frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_e a_e}{\mu_e}\right)^m \phi_1^{m+1} = \frac{25}{72} k a_e t \frac{1 - \frac{V}{a_e}}{\frac{V}{a_e} \Delta} \eta_1^2 \quad (22)$$

下标 1 表示波尾处之值。

与方程 (18) 对应的是:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^{m+1}}{d\eta} - (1+m) \frac{\phi^{m+1}}{\eta} \frac{1 - \left(1 + \frac{5}{6\Delta}\right)\eta}{1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta}\right)\eta} \\ = \frac{25}{72} (1+m) c k (1 - 0.28\eta)^m \frac{\left(1 - \frac{\eta}{6}\right)^5 \eta^2}{\left(\frac{\rho_e a_e}{\mu_e}\right)^m \left[1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta}\right)\eta\right]^{2 - \frac{5}{6\Delta}}} \end{aligned}$$

解为:
$$\frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_e a_e}{\mu_e}\right)^m \phi^{m+1} = \frac{25}{72} c k e^{(1+m)} \int \frac{1 - \left(1 + \frac{5}{6\Delta}\right)\eta}{1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta}\right)\eta} \frac{d\eta}{\eta} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\eta_1} \frac{(1-0.28\eta)^m \left(1-\frac{\eta}{6}\right)^5 \eta^2}{\left[1-\left(1-\frac{5}{6\Delta}\right)\eta\right]^{2-(5/6\Delta)}} e^{-(1+m)\eta} \frac{\eta^{1-(1+\frac{5}{6\Delta})\eta}}{1-(1-\frac{5}{6\Delta})\eta} \frac{d\eta}{\eta} d\eta \right\} \quad (23)$$

在波尾处:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_4 a_4}{\mu_4}\right)^m \phi_1^{m+1} &= \frac{25}{72} ck \left[\eta_1^{1+m} - (1+m) \frac{5}{3\Delta} \eta_1^{m+2} \right] \times \\ &\times \int_0^{\eta_1} (1-0.28m\eta) \left(1-\frac{5}{6}\eta\right) \eta^2 \left[\eta_1^{-(1+m)} + (1+m) \frac{5}{3\Delta} \eta^{-m} \right] d\eta \\ &\approx \frac{25}{72} ck \frac{\eta_1^3}{2-m} \end{aligned} \quad (24)$$

从 $\frac{\xi}{1-\eta} = a_4 t$ 定出 $c = a_4 t \left[1 - \left(1 - \frac{5}{6\Delta}\right)\eta\right]^{1-\frac{5}{6\Delta}}$ 代入上式, 只保留 η_1 的最低次项有:

$$\frac{1}{1+m} \left(\frac{\rho_4 a_4}{\mu_4}\right)^m \phi_1^{m+1} = \frac{25}{72} a_4 t k \frac{\eta_1^3}{2-m} \quad (25)$$

比较 (22) 与 (25) 两式可得:

$$\frac{V}{a_4} \Delta \frac{\eta_1}{2-m} = 1 - \frac{V}{a_4}$$

即

$$\frac{V}{a_4} = \left(1 + \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta} \frac{\eta_1}{2-m}\right)^{-1} \quad (26)$$

或

$$\frac{V}{a_4} = 1 - \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta} \frac{\eta_1}{2-m} \quad (27)$$

二元不可压缩流动且 $n=7$ 、 $m=\frac{1}{4}$ 时, $\Delta = \frac{n+2}{n} = \frac{9}{7}$, 有

$$\frac{V}{a_4} = \left(1 + \frac{36}{49} \eta_1\right)^{-1} \approx 1 - \frac{2}{3} \eta_1 \quad (28)$$

就是贝克尔的结果^[3]。由此可知, 严格说来, 轴对称情况下等效有心膨胀波的传播速度 V 在一级近似下也是与速度剖面及表面摩擦规律有关的。

三、结果与讨论

为了方便, 我们取 u_e 为绝对值, 则 (9) 式可改写为:

$$\left(1 + \frac{V}{u_e} \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta}\right) \frac{d\theta}{dX} = \frac{1}{2} c_f \quad (29)$$

其中

$$X = Vt - x \quad (30)$$

$$\frac{V}{a_4} = 1 - \frac{1}{2-m} \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta} \frac{(\gamma+1)M_3}{2 + (\gamma-1)M_3} \quad (31)$$

$$\frac{V}{u_e} = \frac{1}{M_3} + \frac{\gamma-1}{2} - \frac{\gamma+1}{2(2-m)} \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta} \quad (32)$$

只要 c_f 确定, 求解就可以进行。

我们可以注意到 $\frac{1}{2-m}$ 的值在 $m = \frac{1}{4} \sim \frac{1}{7}$ 变化时仅变化 3% 左右, 我们又假定了 $\frac{\delta^* - \delta_p}{\theta}$ 为常数 (虽然在计算中实际上包含了 $\frac{\delta^* - \delta_p}{\theta}$ 不大的变化), (26) 或 (27) 式可以近似认为不变。因而, 文献 [3] 的说法:

$$\frac{V}{a_s} \approx 1 - \frac{2}{3} \eta_s = 1 - \frac{\left(\frac{\gamma+1}{3}\right) M_s^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_s^2} \quad (33)$$

与速度剖面及表面摩擦的具体规律无关, 在轴对称的情况下仍然 (近似) 成立。在常用的范围内, (31) 与 (33) 式的值相差不超过 10%。

(29) 到 (32) 式是我们计算的出发方程, 为简单, (31) 和 (32) 式可以用贝克尔的对应结果来近似。

取卡门 (Karman) 摩擦系数修正表达式:

$$c_f = \frac{(0.242)^2}{(\lg Re_\theta + 1.1696)(\lg Re_\theta + 0.3010)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{-0.467} \quad (34)$$

代入 (29) 式并积分求解得出附面层厚度:

$$\delta = \frac{0.0293(Vt-x)}{\frac{\theta}{\delta} + \frac{V}{u_s} \frac{\delta^* - \delta_p}{\theta}} [\lg(2Re_\theta)]^{-2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{-0.467} \quad (35)$$

把 $\frac{\theta}{\delta}$ 、 $\frac{\delta^*}{\delta}$ 及 $\frac{\delta_p}{\delta}$ 的表达式求出来, 经过整理, 上式可写为:

$$C = B \left(\frac{\delta}{r_0}\right) - A \left(\frac{\delta}{r_0}\right)^2 \quad (36)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{n}{(2n+2)(2n+3)} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \frac{T_c}{T_w}\right) + \frac{V}{u_s} \frac{n}{(2n+1)(2n+2)} \left(1 + \frac{1}{n} \frac{T_c}{T_w}\right) \\ B &= \frac{n}{(n+2)(n+3)} \left(1 + \frac{2}{n+1} \frac{T_c}{T_w}\right) + \frac{V}{u_s} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \left(1 + \frac{2}{n} \frac{T_c}{T_w}\right) \\ C &= \frac{0.0293(Vt-x)}{r_0 [\lg(2Re_\theta)]^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{0.467}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

如果取 $\frac{T_c}{T_w} = 1$, 上式还可以化简。显然, 计算过程是很简单的。

图 2 与 3 是计算结果。

图 2 是本文计算结果及与哥廷根管风洞实验值的比较。计算结果与实验值符合得很好。图中也给出了路德维希的计算结果。

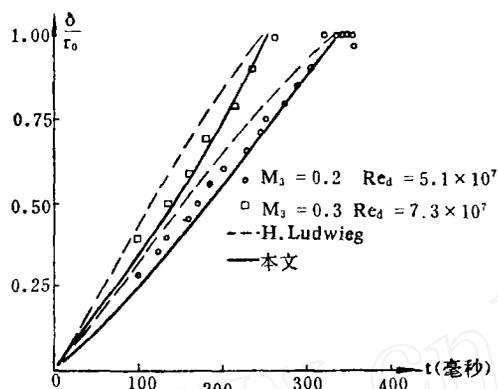


图 2 计算结果与比较

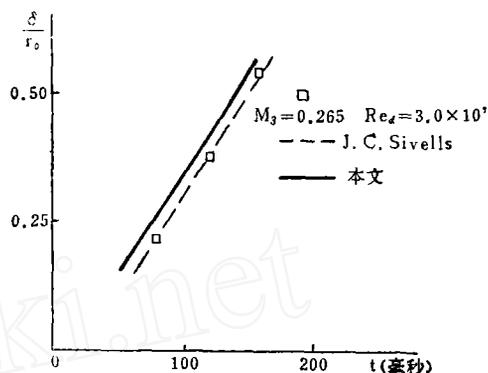


图 3 计算结果与比较

图 3 是本文计算结果与阿诺德工程发展中心 (AEDC) 模型管风洞实验值的比较。计算结果与实验值之间有一定的偏离。图中也给出了文献 [3] 的修正结果。雪凡尔斯用实验的起动时间得出等效原点位置的修正, 就是加上一个时间的修正量。当起动装置位于风洞下游时, 这一修正可以改善与实验值的符合程度。然而, 对工程设计而言, 不能事先得到这个修正值。从数值上来说, 这一修正值对设计目的而言并不带来很大的误差, 不计也是可以的。当然, 能从理论上来确定修正量是理想的。

综上所述, 直接从非定常轴对称附面层动量积分方程出发, 在一定的假设的基础上, 从理论上证明了非定常膨胀波进入圆管后壁面附面层的增长可以用一个以速度 V 传播的等效有心波的组合解来计算。等效速度 V 已求出, 在一定的误差范围内可以说它与速度剖面及表面摩擦规律无关。贝克尔的结果是二元不可压缩条件下, $n = (1/7)$ 与 $m = (1/4)$ 时的特例。组合解的结果是一个代数表达式。计算过程很简单, 结果与实验符合良好。对工程设计目的而言, 精度是足够的。

参 考 文 献

- [1] Becker, E., *Ingenieur Archiv*, **25**, 155—163 (1957).
- [2] Ludwig, H., et. al., AGARD-CP-174 (1976).
- [3] Sivells, J. C., AEDC-75-118 (1975).

**CALCULATION OF THE BOUNDARY LAYER GROWTH
BEHIND AN UNSTEADY EXPANSION
WAVE IN A TUBE**

Wang Songgao

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The problem of the boundary layer growth in the charge tube is discussed. Based on E. Becker's work and J. C. Sivells' modification, in the axisymmetric case, a theoretical treatment of the boundary layer growth in the expansion wave is given; the movement velocity of the equivalent unsteady expansion wave of zero width is derived; an analytical solution is obtained and has been reduced to an algebraical expression. The result contains various factors which affect boundary layer growth; axisymmetry, velocity profile, skin-friction coefficient law and expansion wave thickness effect. The calculation is simple and the results coincide with experiments.