

I 型平面应力准静态稳恒裂纹扩展

清华大学工程力学系 罗学富

中国科学院力学研究所 张晓堤

清华大学工程力学系 黄克智

摘 要

根据 J_2 流动理论并采用有限元法分析了小范围屈服条件下, 各向同性幂强化材料及理想塑性材料中的准静态 I 型平面应力稳恒裂纹扩展问题。计算结果表明, 与平面应变情况不同, 对于平面应力稳恒裂纹扩展, 材料的强化指数 N 对塑性区形状有显著影响。对理想塑性材料, 在裂纹延长线上 ($\theta=0$), 应变似呈现对数奇异性。计算中未发现二次塑性区。利用 COD 断裂准则得出, 应力强度因子比 $K_{I,ss}/K_I$ 也强烈地依赖于材料常数 σ_0/G 及强化指数 N 。

关键词: I 型平面应力, 裂纹扩展。

一、引 言

目前在对弹塑性扩展裂纹尖端场的研究中, 对 III 型问题的研究比较充分。就材料来说, 对理想塑性材料中的扩展裂纹的研究也已取得不少成果。Slepyan^[1], 高玉臣^[2]及 Rice 等^[3]得到了理想塑性体中的 I 型平面应变稳恒扩展裂纹尖端场。对幂强化材料, 高玉臣、张晓堤、黄克智^[4,5]得到了 III 型稳恒裂纹扩展的渐近解。高玉臣和黄克智^[6]还对 I 型平面应变问题 ($\nu = \frac{1}{2}$) 得到了渐近解。但是幂强化及理想塑性材料中的 I 型平面应力稳恒扩展裂纹解至今还未得到过。

扩展裂纹尖端场的解析求解在数学上存在着相当大的困难, 因而常常不得不较多地采用数值解。在裂纹稳恒扩展的有限元分析中, Dean 和 Hutchinson^[7] 采用让有限元网格随裂纹扩展而移动的方法分析了 III 型及 I 型平面应变的稳恒裂纹扩展。本文将这种方法推广于 I 型平面应力稳恒裂纹扩展问题的分析。

裂纹稳恒扩展的特征是: 对一个随扩展的裂纹尖端而移动的观察者来说, 他所看到的裂尖附近的弹塑性应力应变场是不随时间而改变的。因而当有限元网格随扩展裂纹的尖端一起移动时, 各单元的应力应变状态也是不随时间变化的。此时, 只要解得任意一个时刻裂尖场的分布, 就等于得到了稳恒扩展裂纹场中所有质点的全部变形历史。这就使得用有限元法计算稳恒扩展场的工作量与计算一个静止裂纹场相同。

本文于 1983 年 3 月收到

二、有限元计算

本文采用无量纲量进行计算,并以“—”标记无量纲量。取无量纲坐标,无量纲位移,无量纲应力及无量纲应变分别为:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/(K/\sigma_0)^2, & \bar{y} &= y/(K/\sigma_0)^2 & \bar{r} &= r/(K/\sigma_0)^2 \\ \bar{u} &= u/(K^2/G\sigma_0), & \bar{v} &= v/(K^2/G\sigma_0) \\ \bar{\sigma}_x &= \sigma_x/\sigma_0, & \bar{\sigma}_y &= \sigma_y/\sigma_0, & \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy}/\sigma_0 \\ \bar{e}_x &= G e_x/\sigma_0, & \bar{e}_y &= G e_y/\sigma_0, & \bar{\gamma}_{xy} &= G \gamma_{xy}/\sigma_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 K 为弹性应力强度因子, σ_0 为材料的屈服应力, G 为弹性剪切模量。

材料的强化特性由下式表达:

$$\bar{\sigma}_e^{1/N} - \bar{\sigma}_e = 3\bar{e}_e^p \quad (2)$$

其中 N 为幂强化指数, $\bar{\sigma}_e$ 为等效应力, $\bar{e}_e^p = \int d\bar{e}_e^p$ 为等效塑性应变。

静力平衡的变分方程为:

$$\int \{\bar{\sigma}\}^T \delta\{\bar{e}\} d\bar{A} = \int \{\bar{f}\}^T \delta\{\bar{u}\} d\bar{s} \quad (3)$$

其中 $\{\bar{f}\}$ 为边界荷载。由虎克定律,

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{D}^e](\{\bar{e}\} - \{\bar{e}^p\}). \quad (4)$$

采用有限元法离散化,记 $\{\bar{U}\}$ 为结点位移向量,则

$$\{\bar{e}\} = [\bar{B}]\{\bar{U}\}, \quad \{\bar{u}\} = [\bar{H}]\{\bar{U}\} \quad (5)$$

其中 $[\bar{B}]$ 为应变矩阵, $[\bar{H}]$ 为插值函数矩阵。

将 (4), (5) 代入 (3) 可得结点平衡方程:

$$[\bar{K}^e]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}^p\} \quad (6)$$

其中 $[\bar{K}^e]$ 为弹性刚度矩阵, $\{\bar{F}\}$ 为边界结点荷载, $\{\bar{F}^p\}$ 为塑性等效结点荷载,且有:

$$\begin{aligned} [\bar{K}^e] &= \int [\bar{B}]^T [\bar{D}^e] [\bar{B}] d\bar{A} \\ \{\bar{F}\} &= \int [\bar{H}]^T \{\bar{f}\} d\bar{s} \\ \{\bar{F}^p\} &= \int [\bar{B}]^T [\bar{D}^e] \{\bar{e}^p\} d\bar{A} \end{aligned} \quad (7)$$

裂纹稳恒扩展问题的分析归结到求解方程 (6)。由于 $\{\bar{F}^p\}$ 依赖于塑性应变 $\{\bar{e}^p\}$, 而后者又是未知的,故 (6) 式需迭代求解。

计算域取为矩形,网格如图 1。图 1 中的每个矩形均由两个三角形组成。相邻两三角形公共边的中点为应力佳点^[8]。根据裂纹稳恒扩展问题的特点,场中某一物质点在某

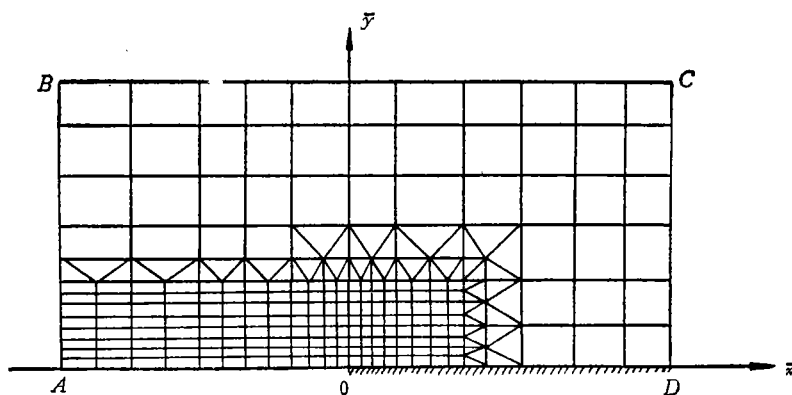


图1 有限元网格略图

一时刻的状态（应力及应变），就是它的左邻物质点在前一时刻的状态。对塑性区中的某一物质点来说，它右边的同一高度（ \bar{y} 坐标相同）的一系列物质点在某一时刻的状态，就描述了该物质点在此时刻之前的变形历史。因而，塑性区中某一应力佳点的应力可由该点右侧一系列 \bar{y} 值相同的应力佳点的应力沿负 \bar{x} 方向的积分来计算。

计算域的无量纲尺寸为： $\bar{x}_D = 7.2$ ， $\bar{x}_A = -6.0$ ， $\bar{y}_B = 8.64$ 。单元总数为 4183，自由度总数为 4374。裂尖附近的最小单元尺寸为 0.002。计算结果表明，最小单元尺寸为理想塑性情况下塑性区 \bar{x} 方向尺寸的 0.7%，所取的计算域达到塑性区尺寸的 25 倍以上。改变域的尺寸所作的计算表明，当前采用的计算域尺寸已使小范围屈服的条件近似得到满足。

取弹性奇异 K 场为作用在 AB ， BC ， CD 边界上的外载荷，即

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) / \sqrt{2\pi\bar{r}} \\ \bar{\sigma}_y &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) / \sqrt{2\pi\bar{r}} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta / \sqrt{2\pi\bar{r}}\end{aligned}\quad (8)$$

引入：应力偏量向量

$$\{\bar{s}\}^T = \{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_m, \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_m, -\bar{\sigma}_m, \sqrt{2} \bar{\tau}_{xy}\} \quad (9)$$

塑性应变增量向量

$$\{\Delta \bar{\epsilon}^p\}^T = \{\Delta \bar{\epsilon}_x^p, \Delta \bar{\epsilon}_y^p, \Delta \bar{\epsilon}_z^p, \Delta(\bar{\gamma}_{xy}^p / \sqrt{2})\} \quad (10)$$

应力偏量增量向量

$$\{\Delta \bar{s}\}^T = \{\Delta \bar{\sigma}_x - \Delta \bar{\sigma}_m, \Delta \bar{\sigma}_y - \Delta \bar{\sigma}_m, -\Delta \bar{\sigma}_m, \Delta(\sqrt{2} \bar{\tau}_{xy})\} \quad (11)$$

应变偏量增量向量

$$\{\Delta \bar{\epsilon}\}^T = \{\Delta \bar{\epsilon}_x - \Delta \bar{\epsilon}_m, \Delta \bar{\epsilon}_y - \Delta \bar{\epsilon}_m, \Delta \bar{\epsilon}_z - \Delta \bar{\epsilon}_m, \Delta(\bar{\gamma}_{xy}/\sqrt{2})\} \quad (12)$$

其中平均应力 $\bar{\sigma}_m = \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)$, $\Delta \bar{\sigma}_m$ 及 $\Delta \bar{\epsilon}_m$ 分别为平均应力增量及平均应变增量。

定义等效塑性应变增量为:

$$\Delta \bar{\epsilon}_e^p = \left(\frac{2}{3} \{\Delta \bar{\epsilon}^p\}^T \{\Delta \bar{\epsilon}^p\} \right)^{1/2} \quad (13)$$

等效应力为

$$\bar{\sigma}_e = \left(\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^T \{\bar{s}\} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Mises 屈服准则为:

$$\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^T \{\bar{s}\} - \bar{\sigma}_e^2 = 0 \quad (15)$$

其增量形式为:

$$3 \{\bar{s}\}^T \{\Delta \bar{s}\} = 2 \bar{\sigma}_e \cdot \Delta \bar{\sigma}_e,$$

即

$$\Delta \bar{\sigma}_e = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}_e} \{\bar{s}\}^T \{\Delta \bar{s}\} \quad (16)$$

由流动法则得:

$$\{\Delta \bar{\epsilon}^p\} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\epsilon}_e^p}{\bar{\sigma}_e} \{\bar{s}\} \quad (17)$$

定义屈服面的单位法线向量 $\{n\}$ 为:

$$\{n\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\bar{\sigma}_e} \{\bar{s}\} \quad (18)$$

则 (16), (17) 式分别变为:

$$\Delta \bar{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \{n\}^T \{\Delta \bar{s}\} \quad (19)$$

$$\{\Delta \bar{\epsilon}^p\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_e^p \{n\} \quad (20)$$

由单向拉伸的应力—塑性应变关系可得强化曲线的斜率 $\xi = \Delta \bar{\sigma}_e / \Delta \bar{\epsilon}_e^p$ 。当材料为理想塑性时 $\xi = 0$,

偏量形式的虎克定律为:

$$\{\Delta \bar{s}\} = 2(\{\Delta \bar{\epsilon}\} - \{\Delta \bar{\epsilon}^p\}) = 2\{\Delta \bar{\epsilon}\} - \sqrt{6} \Delta \bar{\epsilon}_e^p \{n\} \quad (21)$$

以 $\sqrt{\frac{3}{2}} \{n\}^T$ 前乘上式两边并化简得:

$$\Delta \bar{\epsilon}_e^p = \frac{\sqrt{6}}{\xi + 3} \{n\}^T \{\Delta \bar{\epsilon}\} \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (21) 式得增量形式的本构关系为:

$$\{\Delta \bar{s}\} = 2 \left([I_4] - \frac{3}{\xi + 3} \{n\} \{n\}^T \right) \{\Delta \bar{e}\} \quad (23)$$

其中 $[I_4]$ 为 4×4 单位矩阵。

将 (23) 式代入 (19) 式可得由增量加载所引起的等效应力增量 $\Delta \bar{\sigma}_e$ 为:

$$\Delta \bar{\sigma}_e = \frac{\sqrt{6} \xi}{\xi + 3} \{n\}^T \{\Delta \bar{e}\} \quad (24)$$

三、本构关系中参数的选择

求解基于增量理论的非线性问题时,总是采用分段线性化的办法。即在每一荷载增量中,本构关系 (23) 式中的 $\{n\}$ 及 ξ 均取为常数。适当选择 $\{n\}$ 及 ξ 的值可使增量加载的终态精确地满足材料的强化曲线。

对理想塑性材料, $\xi = 0$, 可采用 Rice 及 Tracey^[9] 建议的方法适当选择 $\{n\}$ 。以 $\{\bar{s}_1\}$ 及 $\{\bar{s}_2\}$ 分别表示增量加载初态及终态的应力偏量。设 $\{\bar{s}_1\}$ 精确满足本构关系, 若要求 $\{\bar{s}_2\}$ 也精确满足本构关系, 则 $\{\bar{s}_1\}$ 及 $\{\bar{s}_2\}$ 向量的末端均应落在屈服面上。图 2 为屈服面在应力空间 π 平面上的投影圆。以向量 OA, OB 分别表示 $\{\bar{s}_1\}, \{\bar{s}_2\}$, 则 $\overline{AB} = \{\Delta \bar{s}\}$ 。取 AB 中点 C , 则 $OC \perp AB$ 。由 (23) 式知:

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \{\Delta \bar{e}\} - \{n\} \{n\}^T \{\Delta \bar{e}\}$$

假设 $\{\Delta \bar{e}\}$ 已经求得, 并记 $\overline{AD} = \{\Delta \bar{e}\}$, 则

$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = \{n\} \{n\}^T \{\Delta \bar{e}\}$$

可见, 向量 \overline{CD} 的方向即为单位法线向量 $\{n\}$ 的方向, 且 $|\overline{CD}| = \{n\}^T \{\Delta \bar{e}\}$ 。故 \overline{CD} 与 \overline{AC} 垂直, O, C, D 三点在同一直线上, 向量 \overline{OD} 的方向也即为单位法线向量 $\{n\}$ 的方向。故可将 $\{n\}$ 取为:

$$\{n\} = \frac{\{\bar{s}_1\} + \{\Delta \bar{e}\}}{|\{\bar{s}_1\} + \{\Delta \bar{e}\}|} \quad (25)$$

这样选取的 $\{n\}$ 将使增量加载的终态精确地满足本构关系。

对强化材料, 设增量加载的初态精确满足材料的强化曲线, 则与初态对应的等效应力 $\bar{\sigma}_e$ 及等效塑性应变 \bar{e}_e^p 应满足 (2) 式。若要求有限步长增量加载的终态亦精确地满足材料的强化曲线, 则应有:

$$(\bar{\sigma}_e + \Delta \bar{\sigma}_e)^{1/N} - (\bar{\sigma}_e + \Delta \bar{\sigma}_e) = 3(\bar{e}_e^p + \Delta \bar{e}_e^p) \quad (26)$$

其中, $\Delta \bar{\sigma}_e, \Delta \bar{e}_e^p$ 分别为等效应力增量及等效塑性应变增量, 其值分别由 (24), (22)

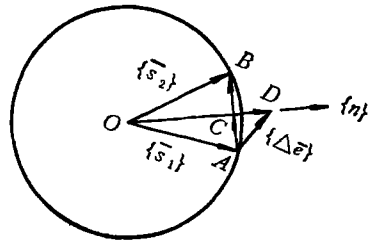


图 2 理想塑性材料的增量加载

式确定。显然，它们都与 $\{n\}$ 及 $\bar{\xi}$ 的数值有关，适当选择 $\{n\}$ 及 $\bar{\xi}$ ，可使 (26) 式得到满足。

由 (26) 式减去 (2) 式得：

$$(\bar{\sigma}_e + \Delta\bar{\sigma}_e)^{1/N} = \bar{\sigma}_e^{1/N} + \Delta\bar{\sigma}_e + 3\Delta\bar{\epsilon}_e^p \quad (27)$$

由 (24)，(22) 式得：

$$\Delta\bar{\sigma}_e + 3\Delta\bar{\epsilon}_e^p = \sqrt{6} \{n\}^T \{\Delta\bar{\epsilon}\}$$

将上式代入 (27) 式得：

$$\Delta\bar{\sigma}_e = (\bar{\sigma}_e^{1/N} + \sqrt{6} \{n\}^T \{\Delta\bar{\epsilon}\})^N - \bar{\sigma}_e \quad (28)$$

为使增量加载的终态满足强化曲线， $\Delta\bar{\sigma}_e$ 应满足 (28) 式。

由 (24) 式中解出 $\bar{\xi}$ 得：

$$\bar{\xi} = \frac{3\Delta\bar{\sigma}_e}{\sqrt{6} \{n\}^T \{\Delta\bar{\epsilon}\} - \Delta\bar{\sigma}_e} \quad (29)$$

在以上公式中，法线向量 $\{n\}$ 还未确定。考虑到 $\xi \rightarrow 0$ 时材料趋近于理想塑性，此时对强化材料的计算公式也应自然过渡到理想塑性时的公式。为此，可仍取 (25) 式作为强化材料时一步长增量加载中屈服面的法线向量。这样，对强化材料在已知 $\{s_1\}$ 及 $\{\Delta\bar{\epsilon}\}$ 之后，可由 (25) 式定出 $\{n\}$ ，代入 (28) 式确定出 $\Delta\bar{\sigma}_e$ ，再由 (29) 式可确定出 $\bar{\xi}$ 。由此确定的 $\{n\}$ 及 $\bar{\xi}$ ，将使增量加载的终态落在材料的强化曲线上。

四、方程的迭代求解

由于在平面应力问题中，根据面内位移分量 \bar{u} ， \bar{v} 只能确定应变 $\bar{\epsilon}_x$ ， $\bar{\epsilon}_y$ 及 $\bar{\gamma}_{xy}$ ，而不能直接确定沿厚度方向的应变 $\bar{\epsilon}_z$ ，故 (12) 式的 $\{\Delta\bar{\epsilon}\}$ 无法确定。为了克服平面应力问题比平面应变多出的这一困难，可利用体积变形定律，将平均应变 $\bar{\epsilon}_m$ 与结点位移 $\{\bar{U}\}$ 一同进行迭代求解。因而求解方程 (6) 的迭代步骤如下：

- 1) 由结点位移的第 $(i-1)$ 次估计值 $\{\bar{U}\}^{(i-1)}$ 计算各单元应变 $\bar{\epsilon}_x^{(i-1)}$ ， $\bar{\epsilon}_y^{(i-1)}$ ， $\bar{\gamma}_{xy}^{(i-1)}$ 。
- 2) 由 $\bar{\epsilon}_m^{(i-1)}$ 及 $\bar{\epsilon}_x^{(i-1)}$ ， $\bar{\epsilon}_y^{(i-1)}$ ， $\bar{\gamma}_{xy}^{(i-1)}$ 计算 $\{\Delta\bar{\epsilon}\}^{(i-1)}$ 。
- 3) 对弹性单元按虎克定律 (4) 式计算单元应力 $\{\bar{\sigma}\}^{(i-1)}$ 。
- 4) 对塑性单元按 (23) 式计算 $\{\Delta\bar{s}\}$ ，沿负 $\bar{\kappa}$ 方向积分计算 $\{\bar{s}\}^{(i-1)}$ ，并确定单元应力 $\{\bar{\sigma}\}^{(i-1)}$ ，进而按虎克定律计算塑性应变：

$$\{\bar{\epsilon}^p\}^{(i-1)} = \{\bar{\epsilon}\}^{(i-1)} - [\bar{D}^e]^{-1} \{\bar{\sigma}\}^{(i-1)} \quad (30)$$

- 5) 由 $\{\bar{\epsilon}^p\}^{(i-1)}$ 按 (7) 式计算塑性等效结点荷载 $\{\bar{F}^p\}^{(i-1)}$ 。
- 6) 求解 $[\bar{K}^e] \{\bar{U}\}^{(i)} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}^p\}^{(i-1)}$ ，得结点位移的第 i 次估计值 $\{\bar{U}\}^{(i)}$ 。
- 7) 根据体积变形定律计算平均应变的第 i 次估计值 $\bar{\epsilon}_m^{(i)}$

$$\bar{\varepsilon}_m^{(i)} = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \bar{\varepsilon}_z^{(i-1)} \quad (31)$$

8) 由 6) 及 7) 所得出的 $\{\bar{U}\}^{(i)}$ 及 $\bar{\varepsilon}_m^{(i)}$ 可进行新的迭代, 直至收敛。

求解时取弹性场的结点位移及平均应变作为高强度材料求解的第一次近似。并以高强度材料收敛后的解作为强化程度较低的材料的首次近似, 直至理想塑性材料。本文对 $N=0.9, 0.8, \dots, 0.1, 0$ 等 10 种材料分别作了计算。

相邻两次迭代计算的误差取为:

$$e^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{|\bar{U}_j^{(i)} - \bar{U}_j^{(i-1)}|}{|\bar{U}_j^{(i)}| + 1} \right) \quad (32)$$

其中 $\bar{U}_j^{(i)}$, $\bar{U}_j^{(i-1)}$ 分别为第 j 个自由度的第 i 次及第 $(i-1)$ 次位移计算值, n 为自由度总数。通过取不同的收敛标准所作的试算比较, 我们确定, 当 $e^{(i)} \leq 0.0004$ 时则可认为迭代收敛。按这样的收敛标准, 对 N 值较大的材料迭代次数小于 10, 对理想塑性材料约需 30 次迭代。在达到了上述收敛标准后若继续迭代, 塑性区尺寸及各场参量已很少变化。Douglas 等^[10] 在 III 型问题理想塑性材料稳恒裂纹扩展的有限元分析中取收敛标准为: 相邻两次迭代计算所得结点位移差的平方和的平方根小于 0.0001, 即

$$\begin{aligned} \text{记} \quad & \{\Delta \bar{U}\}^{(i)} = \{\bar{U}\}^{(i)} - \{\bar{U}\}^{(i-1)} \\ \text{收敛时要求} \quad & \sqrt{\{\Delta \bar{U}\}^{(i)T} \{\Delta \bar{U}\}^{(i)}} < 0.0001 \end{aligned} \quad (33)$$

我们也曾以这样的标准进行了计算对比。结果发现以 (33) 式为收敛标准所得的计算结果与本文的结果相差甚小, 而计算所花时间则增加了好几倍。对 $N=0.9$ 及 0.2 两种材料, 按本文的收敛标准只须分别作 3 次及 9 次迭代, 但按 (33) 式的标准则须分别作 5 次及 57 次迭代。

五、计算结果及讨论

1. 主塑性区形状随强化指数 N 的变化如图 3。由图可见, 材料的强化指数 N 强烈地影响着塑性区形状。材料强化越弱, 则塑性区的 \bar{y} 方向尺寸越小, \bar{x} 方向尺寸越大。与此相反, I 型平面应变的主塑性区形状及尺寸受材料强化程度的影响很小^[7]。

计算中未发现二次塑性区。而平面应变稳恒裂纹扩展问题与此相反, 在裂纹面两岸二次塑性区的高度近似为裂尖前主塑性区高度的 15%^[11]。

2. 理想塑性材料中裂尖附近应力的角分布如图 4。与 [7] 的结果相比, σ_y 及 τ_{xy} 的分布与平面应变扩展裂纹的情况类似。但不同的是, 在 θ 接近 160° 时, σ_x 值逐渐变负, 而平面应变情况 σ_x 恒为正。(注: 图 4 中的曲线 τ_{xy}/σ_0 应为 $\sqrt{2}\tau_{xy}/\sigma_0$)。

3. 对理想塑性材料, 其无量纲应变等值线如图 5 至图 7 所示。由图可见, 裂尖附近应变分量 $\bar{\varepsilon}_y$ 及 $\bar{\varepsilon}_z$ 比 $\bar{\varepsilon}_x$ 大得多。由于在裂纹尖端附近塑性变形远远大于弹性变形, 由扩展而形成的裂纹面附近的应变主要为残余塑性应变。因而在 $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_z$ 等值线中, 裂尖后面的部分几乎与裂纹面平行。

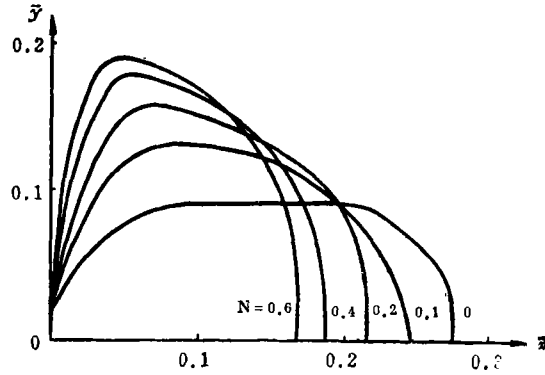


图 3 主塑性区形状随强化指数 N 的变化

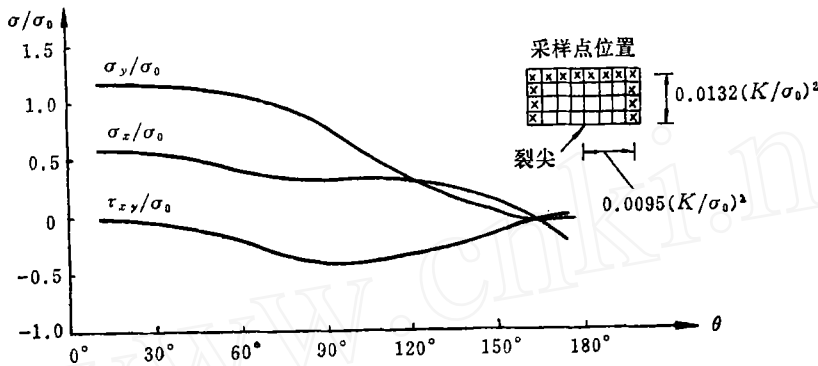


图 4 理想塑性材料中裂尖附近应力的角分布

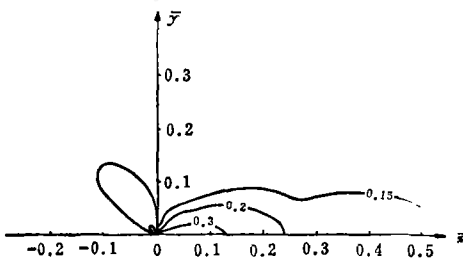


图 5 理想塑性材料中, 应变 $\bar{\epsilon}_x$ 等值线

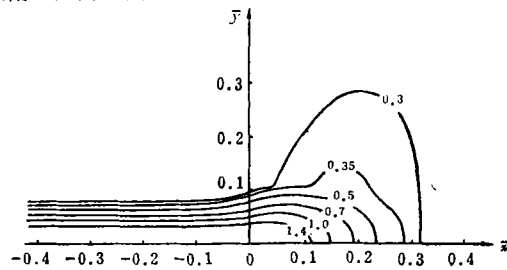


图 6 理想塑性材料中, 应变 $\bar{\epsilon}_y$ 等值线

4. 对理想塑性材料, 在 $\theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 两个方向上的裂尖附近应变 $\bar{\epsilon}_y$ 的分布如图 8 所示。在半对数坐标平面上它们接近一条直线。这似乎预示着: 与平面应变扩展裂纹修正的 Prandtl 场^[1-3] 不同, 在 I 型平面应力扩展裂纹的裂尖前方可能不存在均匀应力区, 而是具有应变奇异性的扇形区。

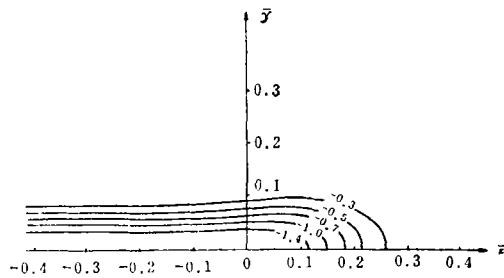
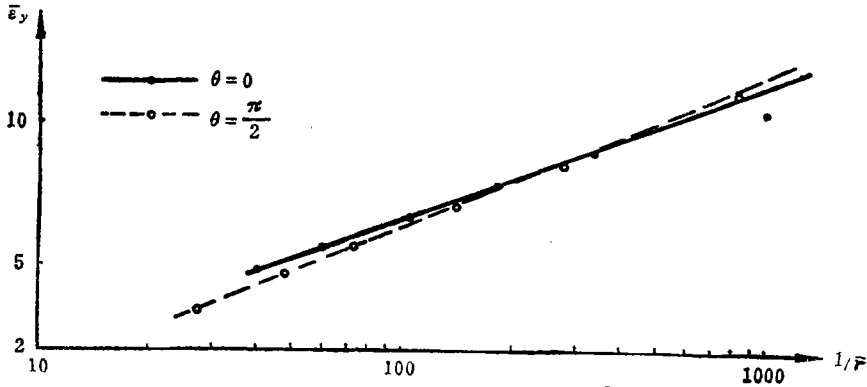
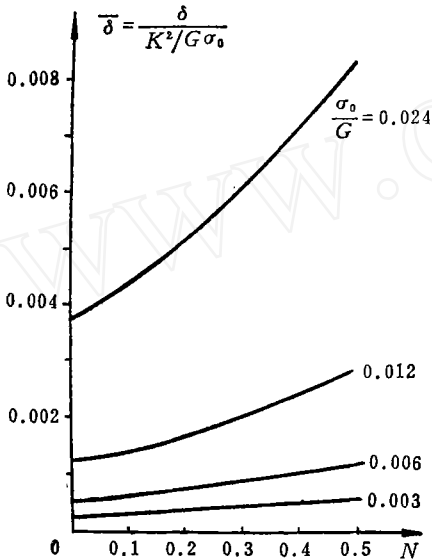
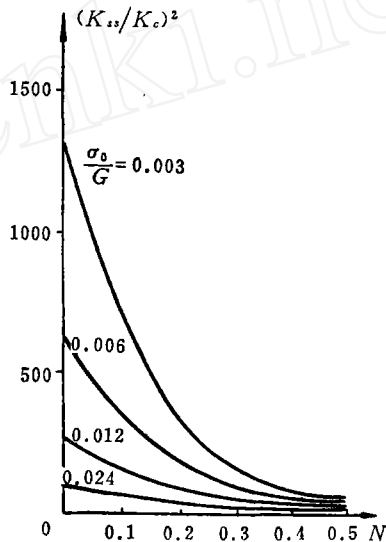


图 7 理想塑性材料中, 应变 $\bar{\epsilon}_z$ 等值线

图 8 理想塑性材料中裂尖附近应变 $\bar{\epsilon}_y$ 分布

5. 在得到了裂纹面上结点的位移之后,在裂尖附近裂纹面两岸取了 19 个结点作曲线拟合。利用所得的拟合曲线确定了 Rice 所建议的 45° COD 值^[12], 结果如图 9 示。

图 9 COD 值随材料常数 σ_0/G 及强化指数 N 的变化图 10 K_{ss}/K_c 值随材料常数 σ_0/G 及强化指数 N 的变化

Shih^[13] 按 HRR 奇异性确定了静止裂纹的 45° COD 值。对稳恒扩展裂纹及静止裂纹采用统一的临界开口位移断裂准则后, 确定了稳恒扩展时的应力强度因子 K_{ss} 与起裂时的应力强度因子 K_c 的比值, 如图 10 所示。由图可见, 材料常数 σ_0/G 及强化指数 N 对 K_{ss}/K_c 值有着相当强烈的影响, 尤其是在 $N=0$ 附近。

六、结 论

1. 材料的强化特性对塑性区形状有着相当强烈的影响。
2. 理想塑性材料中的 I 型平面应力扩展裂尖场与 Prandtl 场有较大差别。
3. 材料的强化指数 N 越低, 屈服应变 σ_0/G 越小, K_{ss}/K_c 值就越高, 从起裂到失稳的稳定扩展阶段就越长。

参 考 文 献 与 资 料

- [1] L. I. Slepyan, *Izv. Akad. Nauk SSSR, MTT*, No.11(1976), 144.
- [2] 高玉臣, *力学学报*, No.1,(1980), 48.
- [3] J.R.Rice, W.J.Drugin and T.L.Sham, *ASTM STP-700*, 1980.
- [4] Gao Yuchen, Zhang Xiaoti and Hwang Kehchih, *International Journal of Fracture*, 21,(1983), 301—317.
- [5] 高玉臣, 高晓堤, 黄克智, *力学学报*, No.5, (1981), 482.
- [6] Gao Yuchen and Hwang Kehchih, *Advances in Fracture Research*, Vol.2, ICF5, Cannes, France, 1981, 669-682.
- [7] R. H. Dean and J. W. Hutchinson, *ASTM STP-700*, 1980.
- [8] 陈传森, *湘潭大学学报*, No.1, (1978).
- [9] J.R.Rice and D. M. Tracey, *Computational Fracture Mechanics*, in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 1973, 585.
- [10] A.S.Douglas, L.B. Freund and D. M. Parks, *Advances in Fracture Research*, Vol. 5, ICF5, Cannes, France, 1981, 2233-2240.
- [11] D. M. Parks, P. S. Lam and R. M. McMeeking, *Advances in Fracture Research*, Vol. 5, ICF5, Cannes, France, 1981, 2607-2614.
- [12] D. M. Tracey, *Trans. ASME, J. Engng Materials and Technol.* No. 98, (1976), 146.
- [13] C. F. Shih, *J. Mech. phys. Solids*, Vol. 29, No.4, (1981), 305.

Mode-I Plane Stress Quasi-Static Steady Crack Growth

Luo Xuefu, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University

Zhang Xiaoti, Institute of Mechanics, Academy of Sciences, Beijing

Hwang Kezhi, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University

Abstract

Based upon the J_2 -flow theory, a finite element analysis of quasi-static, mode-I steady crack growth in plane stress under small scale yielding conditions was carried out for isotropic power law hardening and nonhardening materials. In contrast to the plane strain case, the results show significant dependence of the geometry of plastic zone upon the hardening exponent N . For elastic-perfectly plastic material ($N=0$), the strains at x -axis directly ahead of crack ($\theta=0$) exhibit logarithmic singularity. No secondary plastic zone was found. With a COD-based fracture criterion, the ratios of stress intensity factors K_{ss}/K_c vary strongly with the material constant σ_0/G and the hardening exponent N .

Key words: mode-I plane stress, crack growth.