

流函数Navier—Stokes方程的交替 方向部分隐式和完全隐式解法

徐 大 鹏

(中国科学院力学研究所)

1983年12月8日收到

摘 要

本文给出了数值求解以流函数表示的Navier—Stokes方程的交替方向部分隐式和交替方向完全隐式方法；作为算例，计算了低雷诺数的二维方腔流动问题，并与已知结果进行了比较。

一、引 言

数值求解以单一变量流函数表示的Navier—Stokes方程，不需要方程的耦合求解，而且边界条件简单、直接。因此，它日益为人们所重视。

迄今求解以流函数表示的Navier—Stokes方程的方法还不多，其中有代表性的有Roache (1975) 的BID方法和Keller (1983) 的直接解法。BID方法是将流函数Navier—Stokes方程的对流项作为源项，用直接法求解线性双调和方程。由于双调和方程的直接解法局限于较简单的边界情况，因此限制了BID方法的使用。Keller方法是将流函数Navier—Stokes方程差分离散，用主元消去法求解代数方程组，对非线性项采用牛顿迭代。这一方法需要较大的储存量和较多的机时。

本文试图给出比较节省储存量和机时的求解流函数Navier—Stokes方程的数值方法。在第二节我们将讨论基本方程和边界条件；在第三、四节分别给出交替方向部分隐式方法和交替方向完全隐式方法；在第五节给出作为算例的二维方腔流动问题的一些数值结果及与已知结果的比较。

二、基本方程及边界条件

定常、二维、不可压缩流的Navier—Stokes方程的无量纲形式为：

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1c)$$

式中 u 、 v 分别表示坐标 x 、 y 方向的速度分量， p 为压力， R 是雷诺数。若引入流函数：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.2)$$

并由(2.1a)和(2.1b)两式消去压力 p ，我们可以得到：

$$\begin{aligned} & a \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \\ & = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里 a 是常数。上式等号左边的第一项是人为加入的，此项当流场趋于定常态时趋于零，它对于我们考虑的定常流动的流场没有影响。

(2.3)式就是为数值求解经人为改变了的用单一变量流函数表示的Navier-Stokes方程。在适当的定解条件下，我们可以由该方程确定流函数 ψ ，用(2.2)式确定速度场，由下式计算压力分布：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (2.4)$$

方程(2.3)的定解条件包括初始条件和边界条件，在我们计算的算例中，即在二维方腔流动的情形下，其具体形式为(参照图1)：

$$\begin{aligned} & \psi = 0, \quad t = 0, \\ & \psi = \psi_x = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ & \psi = \psi_x = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.5) \\ & \psi = \psi_y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \\ & \psi = 0, \quad \psi_y = -1; \quad 0 \leq x \leq 1, \\ & \quad y = 1. \end{aligned}$$

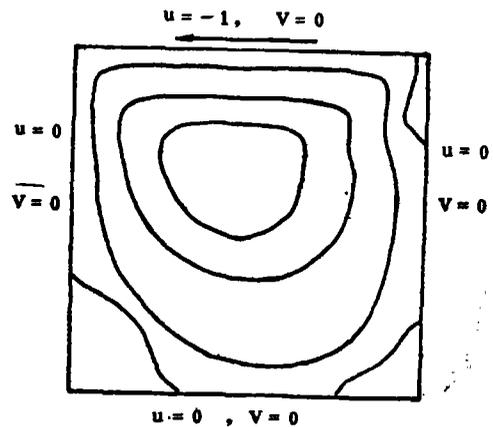


图1 二维方腔示意

三、交替方向部分隐式方法

由ADI的基本思想出发，我们将方程(2.3)在 x 、 y 两个方向上交替求解。把时间

步长 Δt 分为两个半时间步长。在第一个半时间步长, 在 x 方向用隐式, y 方向用显式, 即有:

$$\begin{aligned} & a \frac{2}{\Delta t} (\psi^* - \psi^n) + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x \partial y^2} \right) - \\ & - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi^n}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi^n}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 \psi^n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^n}{\partial y^4} \right). \end{aligned} \quad (3 \cdot 1a)$$

式中 n 表示 $t = n \cdot \Delta t$ 时的值, $*$ 表示 $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ 时的值。

在第二个半时间步长, y 方向用隐式, x 方向用显式:

$$\begin{aligned} & a \frac{2}{\Delta t} (\psi^{n+1} - \psi^*) + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x \partial y^2} \right) - \\ & - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi^{n+1}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi^{n+1}}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 \psi^{n+1}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^{n+1}}{\partial y^4} \right). \end{aligned} \quad (3 \cdot 1b)$$

式中 $n+1$ 表示 $t = (n+1) \cdot \Delta t$ 时的值。

对方程 (3·1a) 中的各项均采用二阶精度的中心差分公式差分离散后, 我们发现任一点流函数值 $\psi_{i,j}^*$ 与其周围的 10 个点的流函数值有关, 如图 2 所示。其中用“ \times ”表示

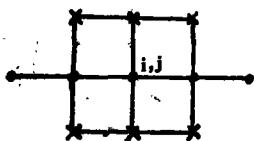


图 2

的 6 个点是由于方程中有交叉导数项而出现的。为了便于计算, 我们将这 6 个点的流函数值滞后一个时间步长。于是, 得到一个系数矩阵为五对角的代数方程组:

$$\begin{aligned} & A_{i,j} \psi_{i-2,j}^* + B_{i,j} \psi_{i-1,j}^* + C_{i,j} \psi_{i,j}^* + \\ & + D_{i,j} \psi_{i+1,j}^* + E_{i,j} \psi_{i+2,j}^* = R_{i,j}. \end{aligned} \quad (3 \cdot 2a)$$

式中系数见附录。同理, 对 (3·1b) 差分离散后得到:

$$\begin{aligned} & A'_{i,j} \psi_{i,j-2}^{n+1} + B'_{i,j} \psi_{i,j-1}^{n+1} + C'_{i,j} \psi_{i,j}^{n+1} + \\ & + D'_{i,j} \psi_{i,j+1}^{n+1} + E'_{i,j} \psi_{i,j+2}^{n+1} = R'_{i,j}. \end{aligned} \quad (3 \cdot 2b)$$

式中系数见附录。

在边界上,我们需要引入虚边界点(如图3所示)。以下固壁为例,由(2.5)式中的第四式得:

$$\begin{aligned} \psi_{i,0} &= 0, \\ \psi_{i,1} &= \psi_{i,-1}, \end{aligned}$$

代入式(3.2b)有:

$$(A'_{i,1} + C'_{i,1})\psi_{i,1}^{n+1} + D'_{i,1}\psi_{i,2}^{n+1} + E'_{i,1}\psi_{i,3}^{n+1} = R'_{i,1}.$$

将边界条件都类似地处理后,便可以应用带状LU分解方法依次求解(3.2a)和(3.2b)了。

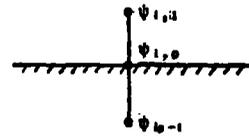


图 3

四、交替方向完全隐式方法

Douglas (1964) 曾给出过一种求解含交叉导数的二阶椭圆型方程的交替方向隐式方法。本节在其基础上加以推广,给出求解含交叉导数的四阶流函数Navier-Stokes方程的交替方向完全隐式方法。

采用二阶精度的中心差分公式离散方程(2.3)后,我们可以看出,任一点流函数值与其邻近的12个点的流函数值相联系,如图4所示。为了得到完全隐式,我们将时间步长 Δt 分裂成为四个四分之一步长。

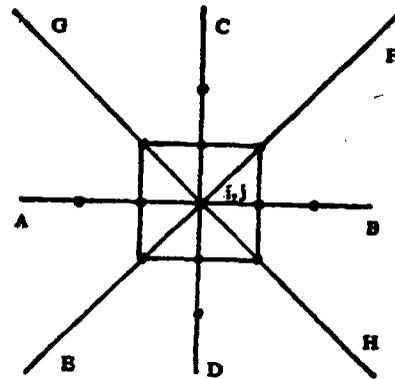


图 4

第一个四分之一步长,沿AB方向用隐式,其余方向用显式。在第二个四分之一步长,CD方向用隐式,其余方向用显式。第三个四分之一步长,沿EF方向用隐式,其余方向用显式。第四个四分之一步长,GH方向用隐式,其余方向用显式。其表达式为:

$$\begin{aligned} (I + A_k)\psi^{n + \frac{k}{4}} - I\psi^{n + \frac{k-1}{4}} &= g_k, \\ k &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

式中矩阵 A_k 的元素为:

$$\begin{aligned} A_1^{i,j} &= \frac{\Delta t}{4a} \left[\delta_y^1 \psi_{i,j}^n \delta_x^2 \psi_{i,j}^{n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{R} \delta_x^4 \psi_{i,j}^{n + \frac{1}{4}} + \delta_y^1 \psi_{i,j}^n \frac{1}{\Delta x \Delta y^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\psi_{i-1,j}^{n + \frac{1}{4}} - \psi_{i+1,j}^{n + \frac{1}{4}} \right) + \frac{4}{R \Delta x^2 \Delta y^2} \left(\psi_{i-1,j}^{n + \frac{1}{4}} + \psi_{i+1,j}^{n + \frac{1}{4}} \right) \right], \end{aligned}$$

$$A_2^{i,j} = \frac{\Delta t}{4a} \left[-\delta_x^1 \psi_{i,j}^n \delta_y^3 \psi_{i,j}^{n+\frac{\Delta t}{4}} - \frac{1}{R} \delta_y^4 \psi_{i,j}^{n+\frac{\Delta t}{4}} - \delta_x^1 \psi_{i,j}^n \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y} \times \right. \\ \left. \times \left(\psi_{i,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} - \psi_{i,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) + \frac{4}{R \Delta x^2 \Delta y^2} \left(\psi_{i,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} + \psi_{i,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) \right],$$

$$A_3^{i,j} = \frac{\Delta t}{4a} \left[\left(\psi_{i+1,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} - \psi_{i-1,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) \left(\frac{\delta_y^1 \psi_{i,j}^n}{2 \Delta x \Delta y^2} - \frac{\delta_x^1 \psi_{i,j}^n}{2 \Delta x^2 \Delta y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{R \Delta x^2 \Delta y^2} \left(\psi_{i+1,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} + 2\psi_{i,j}^{n+\frac{\Delta t}{4}} + \psi_{i-1,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) \right],$$

$$A_4^{i,j} = \frac{\Delta t}{4a} \left[\left(\psi_{i+1,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} - \psi_{i-1,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) \left(\frac{\delta_y^1 \psi_{i,j}^n}{2 \Delta x \Delta y^2} + \frac{\delta_x^1 \psi_{i,j}^n}{2 \Delta x^2 \Delta y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{R \Delta x^2 \Delta y^2} \left(\psi_{i+1,j-1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} + 2\psi_{i,j}^{n+\frac{\Delta t}{4}} + \psi_{i-1,j+1}^{n+\frac{\Delta t}{4}} \right) \right].$$

式中 δ_x^k 、 δ_y^k 分别表示x、y方向的K阶导数的中心差分算子。I为单位矩阵， g_k 为常向量。

当 $k=1, 2$ 时，式(4.1)为系数矩阵五对角的代数方程组，边界条件的处理及求解的方法已在前节中给出。当 $k=3, 4$ 时，式(4.1)为系数矩阵三对角的代数方程组，其边界条件为：

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(x, l) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(y, l), \quad (4.2)$$

式中当 $k=3$ 时， l 为EF方向， $k=4$ 时， l 为GH方向。用与前节相同的方法处理边界条件后，即可用追赶法求解三对角方程组了。

五、算例及结果讨论

我们用三、四节给出的交替方向部分隐式和交替方向完全隐式方法计算了低雷诺数下的方腔流动问题。计算中我们取空间步长 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{20}$ ，常数 a 取 -1 ，收敛条件为：

$$\left| \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n \right| < 10^{-4}.$$

为了比较，我们采用流函数—涡量方法（见Cebeci等（1981））也做了与上述条件相同的计算。表1给出了在不同雷诺数下，分别用三种方法计算得到的涡心流函数值的比较。表中用 ψ_{PI} 表示交替方向部分隐式方法， ψ_{CI} 表示交替方向完全隐式方法，用 $\psi-E$

表示流函数涡量方法。由表中的数值结果可见三者较接近。

表1 涡心 ψ 值比较

方法 Ψ R	Ψ_{PI}	Ψ_{CI}	$\Psi-\xi$
1	0.0990	0.1080	0.0995
10	0.0989	0.0998	0.0993
50	0.0979	0.0985	0.0987
100	0.0949	0.0977	0.0969

表2 CPU时间比较

方法 CPU R	Ψ_{PI}	$\Psi-\xi$
1	1	2.189
10	1.113	2.189
50	1.170	2.264
100	1.755	2.283

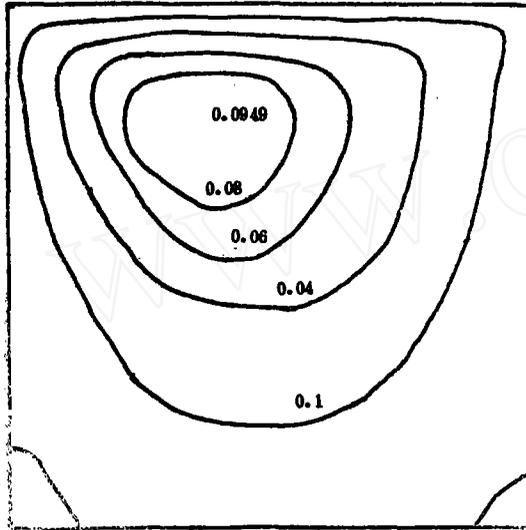


图5

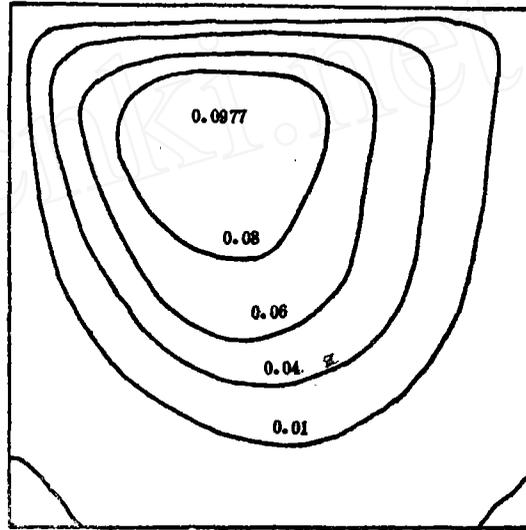


图6

在图5中,我们给出了雷诺数 $R = 100$ 时采用交替方向部分隐式方法所得到的流线图。图6是雷诺数 $R = 100$ 时,采用交替方向完全隐式方法所得到的流线图。

在表2中,我们给出了在相同计算条件下,用交替方向部分隐式方法和流函数一涡量方法计算二维方腔问题所需要的CPU时间比较。表中以雷诺数 $R = 1$,采用交替方向部分隐式方法所需要的CPU时间为一单位。计算表明,采用本文给出的交替方向部分隐式和交替方向完全隐式方法可以选取较大的时间步长,且收敛速度很快。

六、结 论

本文给出了求解以单一变量流函数表示的Navier-Stokes方程的交替方向部分隐式和交替方向完全隐式方法。计算表明该方法具有节省储存量,节省机时,无需方程的耦合求解,边界条件简单、直接等优点。

参 考 文 献

- [1] T.Cebeci, R.S.Hirsh, H. B.Keller & P.G. Williams, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 27.1, (1981), 13—44.
 [2] Douglas & Gunn, *Numerische Mathematik*, 6, (1964), 428—453.
 [3] R.Schreiber & H.B.Keller, *J.Comput.Phys*, 49.2, (1983), 310—333.
 [4] P.J.Roache, *Computers and Fluids*, 3.4, (1975), 305—320.

附 录

代数方程组 (3·2a), (3·2b) 的系数为:

$$A_{i,j} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2R\Delta x^2},$$

$$B_{i,j} = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t \cdot \Delta x}{2\Delta y^2} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n + \frac{2\Delta t}{R\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{R\Delta y^2},$$

$$C_{i,j} = -\frac{3\Delta t}{R\Delta x^2} - \frac{2\Delta t}{R\Delta y^2} + \Delta x^2 a,$$

$$D_{i,j} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t \cdot \Delta x}{2\Delta y^2} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n + \frac{2\Delta t}{R\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{R\Delta y^2},$$

$$E_{i,j} = \frac{\Delta t}{4\Delta x} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2R\Delta x^2},$$

$$\begin{aligned} R_{i,j} = & a\Delta x^2 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t \cdot \Delta x^2}{2\Delta y^2} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n \cdot \delta_x^1 (\psi_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} + \psi_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}}) + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta x^2}{2} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n \cdot \delta_y^1 \delta_x^2 \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t \Delta x^2}{2} \delta_y^3 \psi_{i,j}^n + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta x^2}{2R\Delta y^2} \delta_x^2 (\psi_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} + \psi_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t \cdot \Delta x^2}{2R} \delta_x^2 \delta_y^2 \psi_{i,j}^n + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta x^2}{2R} \delta_y^4 \psi_{i,j}^n; \end{aligned}$$

$$A'_{i,j} = \frac{\Delta t}{4\Delta y} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2R\Delta y^2},$$

$$B'_{i,j} = -\frac{\Delta t \cdot \Delta y}{2\Delta x^2} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{R\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{R\Delta y^2},$$

$$C'_{i,j} = -\frac{2\Delta t}{R\Delta x^2} - \frac{3\Delta t}{R\Delta y^2} + \Delta y^2 a,$$

$$D'_{i,j} = \frac{\Delta t \cdot \Delta y}{2\Delta x^2} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{R\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{R\Delta y^2},$$

$$E'_{i,j} = -\frac{\Delta t}{4\Delta y} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2R\Delta y^2},$$

$$\begin{aligned} R'_{i,j} = & a\Delta y^2 \psi_{i,j}^* - \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n \delta_x^3 \psi_{i,j}^* - \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2} \delta_y^1 \psi_{i,j}^n \delta_x^1 \delta_y^2 \psi_{i,j}^* + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2\Delta x^2} \delta_x^1 \psi_{i,j}^n \delta_y^1 (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2R} \delta_x^4 \psi_{i,j}^* + \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2R} \delta_x^2 \delta_y^2 \psi_{i,j}^* + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \Delta y^2}{2R\Delta x^2} \delta_y^2 (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n). \end{aligned}$$

ALTERNATING DIRECTION PARTIAL IMPLICIT AND COMPLETE IMPLICIT METHODS FOR SOLVING STREAMFUNCTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

XU DA-PENG

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Alternating direction partial implicit and alternating direction complete implicit methods for solving Navier-Stokes equations formulated by stream-function are presented. The two-dimensional cavity flow is calculated as a test problem and the results are discussed and compared.