中 国 科 学

1984 年 1 月 A 辑 第 1 期

低速物体水波的"朴实"渐近展开

陈 嗣 熊*

(中国科学院力学研究所，北京)

摘 要

本文指出了"朴实"渐近展开式并不完全满足物体表面的边界条件，由此得到了一个物体表面的非齐次边界条件．它正是附加波动项所需满足的，也是波动项出现的原因．本文还指出了"朴实"渐近展开式中的零级近似，在物体表面与未扰自由表面的交点处有弱奇异性，但在以后的几级近似项中奇异性逐渐变强．

一、引 言

低速运动物体的水波问题近年来受到越来越多的重视．1969 年 Salvesen[1] 在讨论二维沉体的高阶近似中，发现了当前进速度趋于零时，展开式并不一致有效．这一问题引起了 Ogilvie[2] 的注意，他把流场分成由不同的长度尺度刻划的二部分，第一部分就是"朴实"渐近展开的零级近似，它就是二重体(未扰动自由表面以下的实际物体部分加上它的对未扰动自由表面的镜像）的位势流，这部分流体流动可以用与物体尺度相比较的尺度来描述；第二部分描写波运动，我们可以用与波长相比较的尺度来描写这部分运动．由此他求得了一个非齐次线性自由表面条件，并得到了二维沉体情形的形式解．Dagan 与 Tulin[3] 作出了类似于文献［2］的讨论，但他们指出基本流动，即流场的第一部分，应包含"朴实"渐近展开式中的前二项，而不应仅包含第一项二重体的位势流．Baba 与 Takekuma[4] 把文献[2]的方法推广到三维浮体低速流的情形，他们得到了类似于二维情形的非齐次线性自由表面条件，并由此获得了三维问题解的解析表达式与波阻公式，Baba[5], Baba 与 Hara[6], Newman[7], Maruo[8,9] 等用文献[2]的方法进一步讨论了三维浮体低速物体水波的问题．在所有这些讨论中，他们都用"朴实"渐近展开式中的零级近似作为基本流动，获得了非齐次线性自由表面条件，然后以此作为出发点．Keller[10] 首先提出用射线理论处理低速物体的水波问题．Inui 与 Kajitani[11] 采用了类似的方法．1979 年 Keller[12] 进一步用射线理论的渐近展开式，更严格的导出了色散关系与波振幅沿射线的变化公式．但是，他指出，基本流动应包含"朴实"渐近展开式中更多的项，以使波动势函数满足齐次线性的自由表面边界条件．对于文献［4，5］中采用的非齐次线性自由表面条件，他指出，方程的左边是快变的波动函数，而右边是只与位势流解有关的缓变函数，一般无法使它们相等．Keller 对文献［4，5］的解，进行了渐近分析，指出了这些解的问题．但是，由于 Keller 所导出的波动势函数满足 Laplace 方程，齐次线性的自由表面条件与齐次的物体表面边界条

本文于 1983 年 2 月 1 日收到．

* 本工作是作者 1980—1981 年期间，在美国密西根大学造船系访问期间完成的．

件，因此，在波势函数的解中包含有任意的常数因子．他引进了激励系数，但是，只有对非常简单的情形，例如：薄船，他才求得了这一系数．由文献[12]的讨论，我们想到，既然“朴实”渐近展开式能满足除了辐射条件外的所有的方程与边界条件，那么，为何尚需引入满足齐次方程与齐次边界条件的波动势函数？到底是什么条件引起波动？这就促使了我们对“朴实”渐近展开式进行进一步的深入研究．结果，我们发现了“朴实”渐近展开式并不能完全满足物体表面的边界条件，由此，我们得到了一个物体表面的非齐次边界条件，它正是附加波动势函数所需满足的条件，它也是波动项需要出现的原因．我们指出，“朴实”渐近展开式中的零级近似在物体表面与未扰自由表面的交点处有弱奇异性，但在以后的几级近似项中，奇异性逐渐变强．这也是波动项需引入的另一原因．这里我们仅讨论壁面与未扰自由表面垂直的二维情形．关于如何确定波动势函数的问题，我们将在另一文中专门讨论．

二、问题的公式表达

我们设不可压缩无粘性的流体缓慢流过一二维浮体，物体表面由方程

$$r = R(\theta) \tag{1}$$

给出，这里 $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$，$\theta$ 为由 x 轴按逆时针方向量度的极角，x 轴沿未扰自由表面，流体流动速度 U 与 x 轴的正方向一致，y 轴为过物体内部一点垂直向上．

设物体的特征尺度为 L，所有的长度用 L 来无量纲化．我们希望求得以小参数

$$\epsilon = F^2 = U^2/gL \tag{2}$$

表示的渐近解，这里 F 是 Froude 数，g 为重力加速度．设速度势为 $UL\phi(x, y)$，这里 ϕ 也是无量纲量，则 $\phi(x, y)$ 满足 Laplace 方程，

[L]　$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{在流体区域中，} \tag{3}$$

物体上边界条件，

[B]　$$\frac{\partial\phi}{\partial N} = 0 \quad \text{在物体表面上，} \tag{4}$$

$\boldsymbol{N}$ 为外法线单位矢量，

动力自由表面条件，

[H]　$$H(x) = \frac{1}{2}\{1 - \phi_x^2 - \phi_y^2\}_{y=\epsilon H(x)}, \tag{5}$$

这里设自由表面方程为 $y = \epsilon H(x)$，由联合自由表面运动学条件与条件 [H] 所得的自由表面条件，

[F]　$$\phi_y + \varepsilon\{\phi_x^2\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy}\} = 0, \quad \text{在} \quad y = \varepsilon H(x) \ \text{上，} \tag{6}$$

与辐射条件，

[R]　$$|\phi - x| \to 0 \quad \text{当} \quad x \to -\infty \quad \text{或} \quad y \to -\infty. \tag{7}$$

假定 $\phi(x, y)$ 与 $H(x)$ 可以展开为 ϵ 的级数

$$\phi(x, y) = \bar{\Phi}(x, y, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \phi_n(x, y), \tag{8}$$

$$H(x) = \bar{H}(x, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta_n(x), \tag{9}$$

展开式(8)(9)称为"朴实"渐近展开．把这些展开式简单地代人(3)—(7)式，可得以下的方程

[L]　$$\phi_{n_{xx}} + \phi_{n_{yy}} = 0 \quad \text{在物体外},\ y < 0; \tag{10}$$

[B]　$$\frac{\partial \phi_n}{\partial N} = 0 \qquad \text{在物体表面}; \tag{11}$$

[H]　$$\eta_0(x) = \frac{1}{2}\{1 - \phi_{0_x}^2\}; \tag{12.a}$$

$$\eta_1(x) = -\phi_{0_x}\phi_{1_x}; \tag{12.b}$$

$$\eta_2(x) = -\phi_{0_x}\phi_{2_x} - \frac{1}{2}\{\phi_{1_x}^2 + \phi_{1_y}^2\} - \frac{1}{2}\{1 - \phi_{0_x}^2\}$$
$$\cdot [\phi_{0_x}\phi_{1_{xy}} + \phi_{1_y}\phi_{0_{yy}}] - \frac{1}{8}\{1 - \phi_{0_x}^2\}^2 \cdot \{\phi_{0_x}\phi_{0_{xyy}} + \phi_{0_{yy}}^2\}, \tag{12.c}$$

这里(12.a)—(12.c)式都在 $y = 0$ 上成立，

[F]　$$\phi_{0_y} = 0, \tag{13.a}$$

$$\phi_{1_y} = \frac{1}{2}\phi_{0_{xx}}\{1 - 3\phi_{0_x}^2\} = \frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{0_x}) \equiv p_1'(x), \tag{13.b}$$

$$\phi_{2_y} = \frac{1}{2}\phi_{1_{xx}}\{1 - 3\phi_{0_x}^2\} - 3\phi_{0_x}\phi_{1_x}\phi_{0_{xx}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\eta_0\phi_{1_x} + \eta_1\phi_{0_x}) \equiv p_2'(x). \tag{13.c}$$

这里(13.a)—(13.c)式也都在 $y = 0$ 上成立，$p_1(x) = \eta_0\phi_{0_x}$，$p_2(x) = \eta_0\phi_{1_x} + \eta_1\phi_{0_x}$；

[R]　$$\left.\begin{array}{ll} |\phi_0 - x| \to 0 & \\ |\phi_n| \to 0, & n \geqslant 1 \end{array}\right\} \text{当 } x \to -\infty \text{ 或 } y \to -\infty. \tag{14}$$

当然(12)与(13)式尚可延伸到 n 的更大的值．

展开式中的第一项，即零级近似 $\phi_0(x, y)$，我们称它为"二重体"问题，它相当于流体对二重体的绕流．由式(10)—(14)，我们很易验证，没有一个 $\phi_n(x, y)$ 将显示波动性质．因此，展开式(8)并不是原始问题(3)—(7)式的精确解．我们希望获得物体后面的波动解．但是，由于展开式(8)将作为基本流动，它将对波动部分解起重要作用．原则上，问题(10)—(14)可以逐次被解出．事实上，对于 ϕ_0 问题，我们可以用标准数值方法求解．设

$$\phi_j(x, y) = Re\{f_j(z)\}, \tag{15}$$

这里 $f_j(z)$ 是复变量 $z = x + iy$ 的解析函数．

令

$$f_j(z) = g_j(z) + h_j(z), \quad j > 0, \tag{16}$$

这里

$$h_j(j) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{F}} \frac{p_j(s)}{s - z}\, ds, \tag{17}$$

这里 $\mathscr{F}$ 是物体外面的未扰自由表面．由 Cauchy 型积分的性质，将有

$$h_j'(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{F}} \frac{p_j'(s)}{s - z}\, ds \underset{y \uparrow 0}{\longrightarrow} -ip_j'(x) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{F}} \frac{p_j'(s)}{s - x}\, ds, \tag{18}$$

(18)式中最后的积分是主值积分．把(15)—(18)式代人(13.b)与(13 c)式，将有

$$\operatorname{Im}\{g_j'(x-i0)\}=0. \tag{19}$$

由此，在 $y=0$，$g_j(z)$ 满足与 $f_0(z)$ 相同的条件；而在物体表面上，$g_j(z)$ 使 $g_j(z)+h_j(z)$ 满足式(11)，因此，用于解 $f_0(z)$ 的数值方法也可用来解所有的 $g_j(j)$. 下面我们将给出确定 $h_j(z)$ 的另一更简捷的方法.

三、关于 ϕ_0 问题

由(5)式，可知道物体后缘的驻点位置为 $H(x)=\frac{1}{2}$ 或 $y=\varepsilon/2$. 由(13.a)式，可以令

$$\phi_0(x,y)=\phi_0(x,-y), \tag{20}$$

从而把 $\phi_0(x,y)$ 开拓到上半平面. 我们现在的目的是在物体表面的 $y>0$ 部分上，算出 $\frac{\partial\phi_0}{\partial N}$. 假定 $R(\theta)$ 在 $|\theta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2R_0}$ 的范围内，至少有三阶连续导数，这里 $R_0=R(0)$，且物体表面在 $\theta=0$ 处是垂直的，也即 $\left(\frac{dR}{d\theta}\right)_{\theta=0}=0$. 对于二重体的表面方程，我们可以用下式来描述

$$r=R_1(\theta)=\begin{cases}R(\theta) & \text{当}\quad -\pi<\theta<0,\\ R(-\theta) & \text{当}\quad 0<\theta<\pi.\end{cases} \tag{21}$$

在 $\theta=0$ 邻域，$R(\theta)$ 与 $R_1(\theta)$ 可展开为：

$$R(\theta)=R(0)+\frac{1}{2!}\theta^2R''(0)+\frac{1}{3!}\theta^3K+\cdots, \tag{22}$$

$$R_1(\theta)=R(0)+\frac{1}{2!}\theta^2R''(0)-\frac{1}{3!}|\theta|^3K+\cdots. \tag{23}$$

这里

$$K=\left(\frac{d^3R}{d\theta^3}\right)_{\theta=0}. \tag{24}$$

由(11)式可知，在 $\theta\leqslant0$ 时，$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)}=0$；当 $\theta>0$ 时，$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)}$ 的值，用极坐标 (r,θ)，有

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)}=\frac{R(\theta)\phi_{0_r}-[R'(\theta)/R(\theta)]\phi_{0_\theta}}{\{[R(\theta)]^2+[R'(\theta)]^2\}^{1/2}}. \tag{25}$$

现在用 $(R_1(\theta),\theta)$ 上 ϕ_{0_r} 的值来表示 $\phi_{0_r}(R(\theta),\theta)$. 例如，

$$\phi_{0_r}(R(\theta),\theta)=\phi_{0_r}(R_1(\theta),\theta)+[R(\theta)-R_1(\theta)]\phi_{0_{rr}}(R_1(\theta),\theta)+\cdots. \tag{26}$$

由(22)与(23)式，有

$$R(\theta)-R_1(\theta)=\frac{1}{3}K\theta^3+\cdots\quad\theta>0. \tag{27}$$

由于 ϕ_0 是二重体位势流的解. 因此，ϕ_0 满足 $\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R_1(\theta)}=0$. 利用它与式(26)(27)，由(25)，可得

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)}=-\frac{K}{[R_1(\theta)]^2}\cdot\left[\theta^2\phi_{0_\theta}(R_1(\theta),\theta)+\frac{1}{3}\theta^3\phi_{0_{\theta\theta}}\right]+O(\theta^4). \tag{28}$$

这里我们利用了由 Laplace 方程得到的关系式 $(\phi_{0_r})_{r=R_1(\theta)}+R_1(\theta)(\phi_{0_{rr}})_{r=R_1(\theta)}=-\frac{1}{R_1(\theta)}\times$ $(\phi_{0_{\theta\theta}})_{r=R_1(\theta)}$ 与 ϕ_{0_θ} 的类似于 (26) 式的展开式. 由展开式

$$R_1(\theta)=R_1(0)+O(\theta^2),$$

$$\begin{aligned}\phi_{0_\theta}(R_1(\theta),\theta)&=\phi_{0_\theta}(R_1(0),0)+\theta\{R_1'(0)\phi_{0_{r\theta}}+\phi_{0_{\theta\theta}}\}+O(\theta^3)\\&=\theta\phi_{0_{\theta\theta}}(R_1(0),0)+O(\theta^3).\end{aligned}$$

这里在最后的等式中,我们利用了 $\phi_{0_\theta}(R_1(0),0)=0$ 与 $R_1'(0)=0$, (28) 式可简化为:

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)}=-\frac{4K}{3[R_1(0)]^2}\theta^3\phi_{0_{\theta\theta}}(R_1(0),0)+O(\theta^4). \tag{29}$$

因此,对于 $\theta>0$, (29) 式应由波势函数来抵销. 如果 $K=0$, 但 $\left(\frac{d^5R}{d\theta^5}\right)_{\theta=0}\neq 0$, 则 (29) 式中的首项将为 $O(\varepsilon^5)$.

四、"朴实"渐近展开的奇异性

一般,"朴实"渐近展开式的第一项 $\phi_0(x,y)$ 在 $x=R(0)$, $y=0$ 点有弱奇异性. 下面我们来讨论这一问题.

对于 ϕ_0, 物体表面的边界条件 (11) 式可写成以下形式:

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial N}\right)_{r=R_1(\theta)}=\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}f_0'(z)\cdot\frac{R_1(\theta)-iR_1'(\theta)}{\sqrt{R_1^2+R_1'^2}}\right\}=0. \tag{30}$$

这里 $\phi_0=\mathrm{Re}\{f_0(z)\}$. 由于 ϕ_0 表示二重体位势流的速度势,因此,边界条件 (30) 式在二重体表面曲线 $r=R_1(\theta)$ 上成立. 我们的目的是指出,为了满足条件 (30), 一般 $f_0(z)$ 在 $(R(0),0)$ 点将不能解析. 把 (30) 式中出现的量在 $\theta=0$ 附近展开. 对于 $R_1(\theta)$, 我们有展开式 (23), 并由此可得 $R_1'(\theta)$ 的展开式

$$e^{\theta i}=1+\theta i-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{6}\theta^3 i+\cdots.$$

对于曲线 $r=R_1(\theta)$, 有曲率公式

$$C(\theta)=\frac{[R_1(\theta)]^2-R_1(\theta)R_1''(\theta)+2[R_1'(\theta)]^2}{\{[R_1(\theta)]^2+[R_1'(\theta)]^2\}^{3/2}}.$$

在 $\theta=0$, 有

$$C(0)=\frac{R_1(0)-R_1''(0)}{[R_1(0)]^2}. \tag{31}$$

设 $x_0=R_1(0)$, 为方便计,代替 θ 我们用 y 作为自变量. 这里

$$y=R_1(\theta)\sin\theta=x_0\theta+\left[\frac{R_1''(0)}{2}-\frac{x_0}{6}\right]\theta^3+\cdots. \tag{32}$$

因此,

$$\begin{aligned}e^{\theta i}\frac{R_1(\theta)-iR_1'(\theta)}{\sqrt{[R_1(\theta)]^2+[R_1'(\theta)]^2}}&=1+iC(0)y+\frac{1}{2}y^2\\&\quad\times\left\{\frac{2R_1''(0)}{x_0^3}-\frac{[R_1''(0)]^2}{x_0^4}-\frac{1}{x_0^2}\pm\frac{iK}{x_0^3}\right\}+\cdots.\end{aligned} \tag{33}$$

对于 x，有类似于 (32) 式的表达式：

$$x - x_0 = R_1(\theta)\cos\theta - x_0 = -\frac{1}{2}\theta^2 x_0^3 C(0) \mp \frac{1}{6}K\theta^3 + \cdots. \tag{34}$$

设 $\zeta = z - x_0$，假定

$$f_0(z) = A_2\zeta^2 + A_3\zeta^3 + A_4\zeta^4 + \cdots + (\ln\zeta)(B_4\zeta^4 + \cdots), \tag{35}$$

则

$$f_0'(z) = 2A_2\zeta + 3A_3\zeta^2 + 4A_4\zeta^3 + \cdots + 4B_4\zeta^3\ln\zeta + \cdots. \tag{36}$$

把 (36)，(33) 式代入 (30) 式，并用 (32) 与 (34) 式，令 y 的每次幂的系数等于零，最后可得

$$A_2 = \frac{1}{2}\phi_{0_{xx}}(x_0, 0); \quad A_3 = -C(0)A_2; \quad B_4 = \frac{2K}{3\pi x_0^3}A_2 \tag{37}$$

或

$$f_0(z) = \frac{1}{2}\phi_{0_{xx}}(x_0, 0)\left\{\zeta^2 - C(0)\zeta^3 + \cdots + \frac{2K}{3\pi x_0^3}\zeta^4\ln\zeta + \cdots\right\}. \tag{38}$$

由 (38) 式，可知 $f_0(z)$ 的四阶导数在 $(x_0, 0)$ 点将变为无穷大．我们找到了二重体流动势的首项奇异项．关于 $\phi_1(x, y)$ 和 $\phi_2(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 点的奇异性，我们将分别在下面二节中指出．

五、关于 ϕ_1 问题

由 (15) 与 (16) 式，$\phi_1(x, y)$ 也可用复变函数来表示

$$\phi_1(x, y) = \mathrm{Re}\{f_1(z)\} = \mathrm{Re}\{g_1(z)\} + \mathrm{Re}\{h_1(z)\}.$$

令

$$\gamma_1(x, y) = \mathrm{Re}\{g_1(z)\}, \tag{39}$$

$$\psi_1(x, y) = \mathrm{Re}\{h_1(z)\}, \tag{40}$$

代替 $h_1(z)$ 的表达式 (17)，现在令

$$h_1(z) = -\frac{i}{2}f_0'(z)\{1 - [f_0'(z)]^2\}. \tag{41}$$

我们来考察

$$h_1'(z) = \psi_{1_x} - i\psi_{1_y} = -\frac{i}{2}f_0''(z)\{1 - 3[f_0'(z)]^2\}. \tag{42}$$

把 (42) 式分解成实部与虚部，并利用 $\phi_{0_y}(x,0) = 0$，可得

$$\mathrm{Re}\{h_1'(x - i0)\} = \psi_{1_x}(x, 0) = 0; \tag{43}$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\{h_1'(x - i0)\} = \psi_{1_y}(x, 0) &= \frac{1}{2}\phi_{0_{xx}}(x, 0)\{1 - 3[\phi_{0_x}(x, 0)]^2\} \\ &= \phi_{1_y}(x, 0).\end{aligned} \tag{44}$$

最后一个等式由 (13.b) 式得到．由此可见，(41) 式已考虑了非齐次自由表面条件(13.b)．同时，(41) 式又有 (43) 式所给出的有用性质．因此，复势的另一部分 $g_1(z)$ 应满足齐次自由表面条件

$$-\mathrm{Im}\{g_1'(x - i0)\} = \gamma_{1_y}(x, 0) = 0. \tag{45}$$

函数 $\gamma_1(x, y)$ 由 (45) 式和 $\gamma_1(x, y) + \psi_1(x, y)$ 满足 $\phi_1(x, y)$ 的物体表面边界条件 (11) 所确定．对照 (43) 式与 (45) 式，我们发现 $\psi_1(x, y)$ 是 y 的奇函数（除了一个附加常数外），而

$\gamma_1(x, y)$ 是 y 的偶函数．就是由于这一事实，使得在 $y>0$ 物体表面的边界条件不能被满足．事实上，$\gamma_1(x, y)$ 必须满足 (45) 式与

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial N} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial N} \quad \text{在物体表面}, -\pi < \theta < 0, \tag{46}$$

这样 $\gamma_1(x, y)$ 就完全被确定了．在 $y>0$ 中的 $\gamma_1(x, y)$ 将完全由 $y<0$ 的 $\gamma_1(x, y)$ 所确定．由 (43) 与 (45) 式，直接可得

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial N} = +\frac{\partial \phi_1}{\partial N} \quad \text{在物体表面}, \quad 0 < \theta < \pi, \tag{47}$$

因此，在 $y>0$ 区域 γ_1 不能抵销 ϕ_1 的影响．事实上，使它加倍．也即

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial N} = 2\frac{\partial \gamma_1}{\partial N} = 2\frac{\partial \phi_1}{\partial N} \quad \text{在物体表面}, \quad \theta > 0, \tag{48}$$

由于 $\phi_1(x,y)$ 已完全由(41) 式所确定．因此，由(48)式，可以求得在物体表面上 $y>0$ 的 $\frac{\partial \phi_1}{\partial N}$ 的值．这一物体表面上的法向速度分量将最终由波动势函数来抵销．现我们来求出这一法向速度分量．

类似于 (30) 式，在 $r=R(\theta)$ 上的法向速度分量可表示为:

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)} = \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta} h_1'(z) \cdot \frac{R(\theta) - iR'(\theta)}{\sqrt{R^2 + R'^2}}\right\}. \tag{49}$$

我们希望对小的 θ 值，求出 (49) 式右边的值．由 (42) 式，并把其中的函数在 $y=0$ 展开，忽略高阶小量，可得

$$h_1'(z) \simeq -\frac{i}{2}\{\phi_{0_{xx}}(x_0, 0) + iy\phi_{0_{xxx}}(x_0, 0)\}. \tag{50}$$

有展开式

$$e^{i\theta} \simeq 1 + i\theta \simeq 1 + i\frac{y}{x_0}; \tag{51}$$

$$R(\theta) - iR'(\theta) \simeq x_0 - i\theta R''(0) \simeq x_0 - \frac{iyR''(0)}{x_0}; \tag{52}$$

$$(R^2 + R'^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{x_0}. \tag{53}$$

把 (50)—(53) 式代入 (49) 式，可得

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)} \simeq -\frac{1}{2}y\{\phi_{0_{xxx}}(x_0, 0) + C(0)\phi_{0_{xx}}(x_0, 0)\}. \tag{54}$$

由 (38) 式，可得

$$f_0'''(x_0 + i0) = -3C(0)\phi_{0_{xx}}(x_0, 0). \tag{55}$$

由于 $f_0'''(x_0 + i0) = (\phi_{0_{xxx}} - i\phi_{0_{xxy}})_{x=x_0, y=0}$，由 (13.a)式 $\phi_{0_{xxy}}(x_0, 0) = 0$，因此，由 (55) 式，得

$$\phi_{0_{xxx}}(x_0, 0) = -3C(0)\phi_{0_{xx}}(x_0, 0). \tag{56}$$

把 (54)，(56) 式代入 (48) 式，最后得

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)} = 2yC(0)\phi_{0_{xx}}(x_0,\ 0), \quad \theta > 0. \tag{57}$$

由于湿润物体表面的上限在 $y = \varepsilon/2$，因此，(57) 式中的量是 $O(\varepsilon)$. 但在完整解的渐近展开 (8) 式中，ϕ_1 尚需乘以 ε. 因此，由于用"朴实"渐近展开在物体边界上引起的误差是 $O(\varepsilon^2)$. 这里由式 (29)，ϕ_0 引起的误差为 $O(\varepsilon^3)$，为高阶小量.

势 $\phi_1(x, y)$ 像 $\phi_0(x, y)$ 一样，在 $(x_0, 0)$ 点是不解析的. 因为 $f_0(z)$ 在 $(x_0, 0)$ 点是正比于 $\zeta^4\ln(\zeta)$，由 (41) 式，我们看到，$h_1(z)$ 在 $(x_0, 0)$ 点的首项奇异项是正比于 $\zeta^3\ln\zeta$，它仍属于很弱的奇异性. 由于 (49) 式对于 $y > 0$ 或 $y < 0$ 都成立，因此，(54) 式也对 $y > 0$ 或 $y < 0$ 都成立. 由 (46) (47) 与 (54) 式，在物体表面上 $\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial N}$ 正比于 $|y|$. 由此可以推测在 $(x_0, 0)$ 点 $g_1(z)$ 必定有正比于 $\zeta^2\ln\zeta$ 的首项奇异项.

六、关于 ϕ_2 问题

我们可以用讨论 ϕ_1 问题的方法，来讨论 ϕ_2 问题. 设

$$\phi_2(x, y) = \mathrm{Re}\{f_2(z)\} = \mathrm{Re}\{g_2(z)\} + \mathrm{Re}\{h_2(z)\},$$

假定

$$h_2(z) = -\frac{i}{2} g_1'(z)\{1 - 3[f_0'(z)]^2\}, \tag{58}$$

有

$$\mathrm{Re}\{h_2'(z)\} = \phi_{2_x}(x, 0) = 0, \tag{59}$$

$$-\mathrm{Im}\{h_2'(z)\} = \phi_{2_y}(x, 0) = \frac{1}{2}\gamma_{1_{xx}}\{1 - 3\phi_{0_x}^2\} - 3\phi_{0_x}\phi_{0_{xx}}\gamma_{1_x}. \tag{60}$$

这里

$$\phi_2(x, y) = \mathrm{Re}\{h_2(z)\}; \quad \gamma_2(x, y) = \mathrm{Re}\{g_2(z)\}.$$

(60)式的右边正好等于 (13.c) 式的右边，这里我们利用了 (43) 式. 因此，必须要求有

$$-\mathrm{Im}\{g_2'(z)\} = \gamma_{2_y}(x, 0) = 0. \tag{61}$$

现在可用从 (46) 式到 (54) 式的完全相同的步骤，求得 $\phi_2(x, y)$ 在物体表面的法向速度. 这里给出最后结果

$$\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial N}\right)_{r=R(\theta)} = \Big\{-C(0) + |y|\left[\frac{2C^2(0)}{\pi} - \frac{3K}{2x_0}\right] + \frac{4C^2(0)}{\pi}|y|\ln|y|\Big\}\phi_{0_{xx}}(x_0, 0), \quad \theta > 0. \tag{62}$$

容易看出，$g_2(z)$ 在 $(x_0, 0)$ 点有包含 ζ, $\zeta^2(\ln\zeta)^2$ 与 $\zeta^2\ln\zeta$ 的首项. 因此，"朴实"渐近展开式中的项变得有更强的奇异性.

我们看到 (62) 式中的首项为 $O(1)$，但 ϕ_2 在完整的"朴实"渐近展开 (8) 式中，应乘以 ε^2. 因此，(62) 式引起的误差亦为 $O(\varepsilon^2)$，它与 (57) 式引起的误差是同量级.

本工作是作者在 1980—1981 年访问美国密西根大学造船系期间，在 T. F. Ogilvie 教授的指导与资助下完成的，谈镐生教授也给予了很大的鼓励，这里向他们表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Salvesen, N., *J. Fluid Mech.*, **38** (1969), 415—432.
[2] Ogilvie, T. F., Report, No. 002, Dept. Naval Arch. & Marine Engng, University of Michigan, 1968.
[3] Dagan, G., et al., *J. Fluid Mech.*, **51** (1972), 529—543.
[4] Baba, E., et al., *J. Soc. Naval Arch. Japan*, **137** (1975).
[5] ——————, *Mitsubishi Tech. Bull.*, 1976, No. 109, 1—20.:
[6] ——————, *Nagasaki Tech. Inst. Mitsubishi. Heavy Industry*, 1978.
[7] Newman, J. N., *Internat. Sem. Wave Resistance, Tokyo*, 1976, 31—43.
[8] Maruo, H., *Bull Faculty Engng Yokohama Nat. Univ.*, **26** (1977), 59—75.
[9] ——————, *ibid.*, **29** (1980), 39—51.
[10] Keller, J. B., *Proc. 10th Symp. Naval Hydro.*, *Office Naval Res.* Dept. Navy, 1974, 543—545.
[11] Inui, T., et al., *Schiffstechnik*, **24** (1977), 178—213.
[12] Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, **92** (1979), 465—488.