

ADI方法求解Navier-Stokes方程 的一个改进格式*

陆 张 宁

(中国科学院力学研究所)
1983年12月3日收到

摘 要

ADI方法常被用来计算不可压缩Navier-Stokes方程^[1]。在处理涡度方程的非线性项和涡度在壁面上的条件时,通常采用滞后的方法对涡度方程和流函数方程分别求解。然而,非线性项的滞后破坏了ADI方法的完全二阶精度;涡度方程和流函数方程分别求解减弱了两个方程的耦合性;涡度壁面条件的滞后则破坏了方法的完全隐式。本文在应用ADI方法求解涡度方程和流函数方程时应用了一种交替线性化的技术,对涡度方程和流函数方程耦合求解,内点和边界点上的涡度和流函数值同时求出。因此,ADI方法保持了完全的二阶精度,避免了上面所提到的问题。作者应用这一方法计算了雷诺数 R_0 等于1, 10, 100, 500, 1000时的二维方腔流动(空间步长 $h=1/20$)。计算结果表明:这一方法保持了通常ADI方法的优点,可以应用大的时间步长。最后补充计算了雷诺数 $R_0=2000$ 的二维方腔流动。

一、引 言

用ADI方法来求解二维不可压缩涡度方程和流函数方程的人很多,但ADI方法的应用方式却不尽相同。应用得比较多的有ADI-ADI方法^[2]和ADI-SOR方法。我们定义涡度为

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

其中 u 和 v 分别是 x 和 y 方向的速度。规范后的涡度方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

* 本文曾在第二届流体力学数值方法讨论会上宣读过,当时题为“二维涡量流函数 Navier-Stokes 方程交替线性化隐式格式”。现经修改后刊登于此。

式中, R_e 为雷诺数。定义流函数

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v,$$

得到流函数方程为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta. \quad (2)$$

ADI-ADI方法和ADI-SOR方法的计算过程可以用图 1 说明:

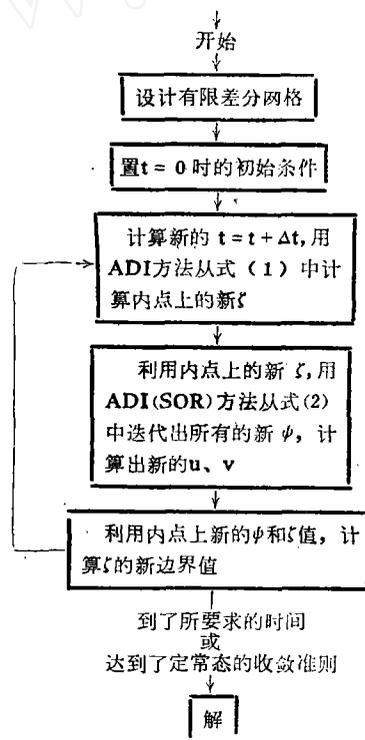


图 1

从图 1 可以看到, 无论是 ADI-ADI 方法还是 ADI-SOR 方法, 在涡度的计算循环中都要“嵌套”着 ψ 的迭代, 这一迭代占去了大部分计算时间。另外还有一种方法是把方程 (1) 和 (2) 联立, 应用 ADI 方法求解。但是要求解一个非线性方程组, 计算量则比较大。

二、改进的 ADI 方法

用记号 $\delta\zeta/\delta x$ 和 $\delta^2\zeta/\delta x^2$ 表示在 i 点的 $\partial\zeta/\partial x$ 和 $\partial^2\zeta/\partial x^2$ 的空间中心差分逼近。涡度方程推进 Δt , 应用 ADI 方法可分两步完成:

$$\frac{\zeta^{n+1/2} - \zeta^n}{\Delta t/2} + u \frac{\delta \zeta^{n+1/2}}{\delta x} + v \frac{\delta \zeta^n}{\delta y} = \frac{1}{R_0} \frac{\delta^2 \zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2}, \quad (3a)$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2}}{\Delta t/2} + u \frac{\delta \zeta^{n+1/2}}{\delta x} + v \frac{\delta \zeta^{n+1}}{\delta y} = \frac{1}{R_0} \frac{\delta^2 \zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\delta^2 \zeta^{n+1}}{\delta y^2}, \quad (3b)$$

或 x, y 互换。

一般来说, 在方程 (3a) 中 u, v 应取为 $u^{n+1/2}, v^n$; 在方程 (3b) 中为 $u^{n+1/2}, v^{n+1}$ 。因 u 和 v 由 ψ 确定, 而 ψ 又由椭圆型方程 $\nabla^2 \psi = -\zeta$ 确定, 这就要求在 $(n+1/2)$ 和 $(n+1)$ 联立隐式求解 ζ 和 ψ , 而这是非常困难的。和这一程序相反, 在方程 (3a) 中把 u, v 取为 $u^n, v^{n+1/2}$; 在方程 (3b) 中为 $u^{n+1}, v^{n+1/2}$ 。方程 (3a) 和 (3b) 成为线性方程。因为 $u = \partial \psi / \partial y, \partial \psi / \partial x = -v$, 所以 $u^n = \partial \psi^n / \partial y, v^{n+1/2} = -\partial \psi^{n+1/2} / \partial x, u^{n+1} = \partial \psi^{n+1} / \partial y$ 。这个过程也将要求在 $(n+1/2)$ 和 $(n+1)$ 联立隐式求解 ζ 和 ψ 。但是方程组是线性的, 并且系数矩阵只不过是一个块三对角的。

ADI方法用来计算椭圆型方程 $\nabla^2 \psi = -\zeta$ 时, 需要引进一项 $c \partial \psi / \partial t$, c 为一常数。方程变为

$$c \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla^2 \psi = -\zeta.$$

其中, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ 使用中心差分, 用ADI方法可分两步完成:

$$\begin{aligned} & \psi_{i+1,j}^{n+1/2} + (-2 + p_1) \psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2} + \Delta x^2 \zeta_{i,j}^{n+1/2} \\ &= (2\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + p_1 \psi_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \psi_{i,j+1}^{n+1} + (-2 + p_2) \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1} \\ &= -\Delta y^2 \zeta_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}) + p_2 \psi_{i,j}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\text{式中, } p_1 = \frac{2c \Delta x^2}{\Delta t}, \quad p_2 = \frac{2c \Delta y^2}{\Delta t}.$$

在计算时, 先联立求解方程 (3a) 和 (4a) 得到 $\zeta^{n+1/2}, \psi^{n+1/2}$, 然后把 $\zeta^{n+1/2}, \psi^{n+1/2}$ 代入方程 (4b) 求出 ψ^{n+1} , 把 ψ^{n+1} 代入 (3b) 求出 ζ^{n+1} 。

三、差分方程组

为方便起见, 空间的差分步长取常数值 h 。定义

$$\vec{q}_{ij}^k = (\psi_{ij}^k, \zeta_{ij}^k)^T, \quad k = n, n + \frac{1}{2}, n + 1.$$

方程 (3a) 两边乘 h^2 , 然后同方程 (4a) 写成一个向量方程为

$$B_i \vec{q}_{i-1,j}^{n+1/2} + A_i \vec{q}_{i,j}^{n+1/2} + C_i \vec{q}_{i+1,j}^{n+1/2} = \vec{r}_i,$$

其中 j 给定, $i = 2, \dots, N-1$,

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} \frac{\delta \zeta^n}{\delta y} & -\frac{h}{2} \frac{\delta \psi^n}{\delta y} - \frac{1}{R} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} -2 + p_1 & h^2 \\ 0 & \frac{2h^2}{\Delta t} + \frac{2}{R} \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{h}{2} \frac{\delta \zeta^n}{\delta y} & \frac{h}{2} \frac{\delta \psi^n}{\delta y} - \frac{1}{R} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_i = \begin{pmatrix} (2 + p_1)\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n \\ \frac{2h^2}{\Delta t} \zeta_{i,j}^n + \frac{h^2}{R} \frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2} \end{pmatrix}.$$

这说明要求解一个块三对角的方程组得到 $\vec{q}_{i,j}^{n+1/2}$, 就要把第一个分量 $\psi_{i,j}^{n+1/2}$ 代入方程 (4b)。由于 $\Delta x = \Delta y = h$, $p_2 = p_1$, 故方程 (4b) 成为

$$\begin{aligned} & \psi_{i,j+1}^{n+1/2} + (-2 + p_1)\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i,j-1}^{n+1/2} \\ & = -h^2 \zeta_{i,j}^{n+1/2} + (2 + p_1)\psi_{i,j}^{n+1/2} - \psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \psi_{i-1,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

计算这一方程组得到 $\psi_{i,j}^{n+1}$ 。将方程 (3b) 整理成为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2h^2}{\Delta t} + \frac{2}{R}\right)\zeta_{i,j}^{n+1} + \left(-\frac{h}{2} \frac{\delta \psi^{n+1/2}}{\delta x} - \frac{1}{R}\right)\zeta_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{h}{2} \frac{\delta \psi^{n+1/2}}{\delta x} - \frac{1}{R}\right)\zeta_{i,j-1}^{n+1} \\ & = \frac{h^2}{R} \frac{\delta^2 \zeta^{n+1/2}}{\delta x^2} - \frac{\delta \zeta^{n+1/2}}{\delta x} \frac{\delta \psi^{n+1}}{\delta y} \cdot h^2 + \frac{2h^2}{\Delta t} \zeta_{i,j}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

代入 $\psi_{i,j}^{n+1}$, 就能计算出 $\zeta_{i,j}^{n+1}$ 。因此, $\vec{q}_{i,j}^{n+1}$ 即可得到。

四、计算实例 (二维方腔流动)

本章采用第三章的方法, 计算二维方腔流动这一典型问题作为方法的检验。它具有三面固壁和一个以常速度向左移动的上壁。

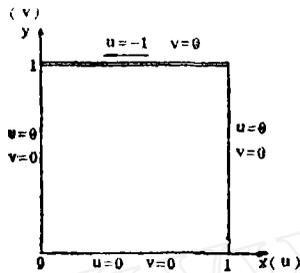


图2 二维方腔流动

I 边界条件

除了上边界以外, 其他三边都可提出不可滑移条件

$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_w = 0$, n 为壁面法向。另外, 所有边界都有条件 $\psi_w = 0$ 。在三个没有移动的壁面上利用 Woods 方法得涡度边界条件^[1]

$$\zeta_w = -\frac{3}{h^2} \psi_{w-1} - \frac{1}{2} \zeta_{w-1}.$$

在有滑移的上边界流函数有条件 $\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_w = -1$ 。涡度的 Woods 方法修正为

$$\zeta_w = -\frac{3}{h^2} (\psi_{w-1} - h) - \frac{1}{2} \zeta_{w-1},$$

式中, h 是空间步长。

把左右边界涡量条件用向量表示为:

(i) 左边界

$$A_1 \vec{q}_{1,j}^k + C_1 \vec{q}_{2,j}^k = \vec{r}_1, \quad j \text{ 固定}, \quad (5a)$$

$$\text{其中 } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/h^2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{r}_1 = (0, 0)^T.$$

(ii) 右边界

$$A \vec{q}_{N-1,j}^k + A_N \vec{q}_{N,j}^k = \vec{r}_N, \quad j \text{ 给定}, \quad (5b)$$

$$\text{其中 } A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{N-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/h^2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{r}_N = (0, 0)^T.$$

II 计算结果

取空间步长为1/20。定义

$$\|\vec{q}_{ij}^k\| = [(\psi_{ij}^k)^2 + (\zeta_{ij}^k)^2]^{1/2},$$

$$DMXA = \max_{1 \leq i, j \leq N} \left(\frac{\|\vec{q}_{ij}^{n+1} - \vec{q}_{ij}^n\|^2}{1 + \|\vec{q}_{ij}^{n+1}\|^2} \right).$$

如果 $DMXA \leq 10^{-6}$ ，认为已得到定常态解。图 3 简单地说明了计算过程。

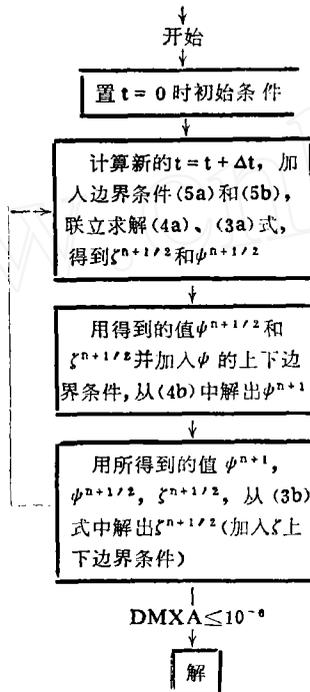


图 3

分别取 $R_0 = 1, 10, 100, 500, 1000, 2000$ 进行计算。计算结果表明：雷诺数 $R_0 = 2000$ 时，方法仍然是稳定的。在整个计算过程中， Δt 的选取比较自由，最小的 $\Delta t = 0.5$ ，而 p_1 值的选取对收敛速度有很大的影响。如果 p_1 值选得好，就能大大加快收敛速度。在对系数矩阵的分析中可以看出， p_1 值取为负数较为合理。这一点也可以从椭圆型方程 $\nabla^2 \psi = -\zeta$ 抛物型化中得知。

下面给出一些计算结果和Gupta在 $h = 1/20$ 条件下所得到的数值^[3]。其中，CDC表示对流项取中心差非守恒型，CDD表示取中心差分守恒型，UDC表示取迎风差分非守恒型，UDD表示迎风差分守恒型。

表 1 主涡中心流函数值 ψ_0

| R | h = 1/20 | Gupta的结果, h = 1/20 | | | |
|------|----------|--------------------|--------|--------|--------|
| | | CDC | UDC | CDD | UDD |
| 1 | 0.0994 | 0.0995 | 0.0995 | 0.0995 | 0.0994 |
| 10 | 0.0980 | 0.0993 | 0.0998 | 0.0994 | 0.0984 |
| 100 | 0.0975 | 0.0909 | 0.1001 | 0.1015 | 0.0918 |
| 500 | 0.0652 | 0.0647 | 0.0775 | 0.1024 | 0.0729 |
| 1000 | 0.0453 | 0.0336 | 0.0599 | 0.0972 | 0.0626 |
| 2000 | 0.0355 | | | | |

| R | h = 1/20 | Gupta的结果, h = 1/20 | | | |
|------|----------|--------------------|--------|--------|--------|
| | | CDC | UDC | CDD | UDD |
| 1 | 3.0135 | 3.0154 | 3.0162 | 3.0154 | 3.0109 |
| 10 | 3.0363 | 3.0010 | 3.0094 | 3.0040 | 2.9591 |
| 100 | 3.3188 | 3.3636 | 3.1250 | 3.0544 | 2.7880 |
| 500 | 1.8028 | 1.9048 | 2.6757 | 2.0504 | 1.5876 |
| 1000 | 1.1838 | 40.6211 | 2.6299 | 1.7451 | 1.2649 |
| 2000 | 1.6827 | | | | |

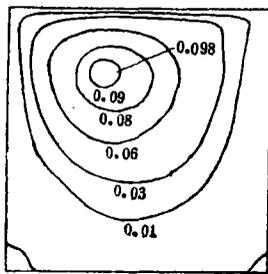


图 4 在 $R_e = 100$, $\Delta t = 1.0$, $N = 152$ 时的流函数图

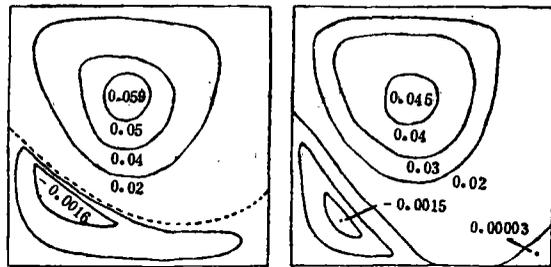


图 5 在 $R_e = 1000$, $\Delta t = 0.5$ 时的流函数图
($R_e = 1000$ 时在左上角有很小范围的振荡)

图 4 给出雷诺数 $R_e = 100$ 时的流函数图, 其中 N 表示迭代到收敛时的迭代次数。图 5 给出雷诺数 $R_e = 1000$ 的流函数图。图 5 (a) 的迭代次数 $N = 61$, 这时还没有达到定常态; 从图中可以看出有两个主涡。图 5 (b) 已经达到定常态, $N = 431$; 从图中可以看到两个主涡变成了一个主涡。

五、结 束 语

此方法把涡度 ζ 和流函数 ψ 看作一个向量 \vec{q} 的两个分量进行 ADI 迭代求解, 避免了在每个时间层上求解椭圆型方程 $\nabla^2 \psi = -\zeta$, 从而大大减少了计算时间。从表面上看, 此方法在非线性项的处理上违反了通常的 ADI 方法, 但是如果把速度的流函数表达式 $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$ 代入涡度方程 (1) 中, 把涡度方程中的 ψ 也看作是主项, 不管是线性项还是非线性项都按照 ADI 方法的基本思想展开, 就可得到与此方法相同的结果。把方程 (3a) 和 (3b) 相加, 两边除 2 得

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\psi^n}{\delta y} + \frac{\delta\psi^{n+1}}{\delta y} \right) \frac{\delta\zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\zeta^n}{\delta y} + \frac{\delta\zeta^{n+1}}{\delta y} \right) \frac{\delta\psi^{n+\frac{1}{2}}}{\delta x} \\ &= \frac{1}{R_e} \frac{\delta^2 \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\delta x^2} + \frac{1}{2R_e} \left(\frac{\delta^2 \zeta^n}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \zeta^{n+1}}{\delta y^2} \right). \end{aligned}$$

此式相当于把涡度方程(1)中的涡度和流函数对 t , x , y 三个变量的导数都用中心差分展开, 因此具有完全的二阶精度。

参 考 文 献

- [1] P.J.罗奇著, 钟锡昌、刘学宗译: 计算流体力学, 118—164页。
[2] W.ROGER BRILEY, "A Numerical Study of Laminar Separation Bubble Using the Navier-Stokes Equations", *J. Fluid Mech*, 47, part.4 (1971), 713—736.
[3] Gupta, M.M., *J. Comp. Phys*, 43, 2 (1981), 260—267.

A IMPROVED ADI SCHEME FOR SOLVING NAVIER-STOKES EQUATIONS

LU ZHANG-NING

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

ADI method is often used to calculate incompressible Navier-Stokes equations^[1]. In the ordinary ADI method, the nonlinear convective terms and noslip condition are delayed and streamfunction-vorticity Navier-Stokes equations are uncoupled. So it can't keep complete two-order accuracy and complete implicit. In this paper, a "alternating linearize" technique for the nonlinear terms is presented, so streamfunction-vorticity Navier-Stokes equations can be coupled and boundary points and inner points are simultaneously solving. This method seems to keep complete two-order accuracy. It is utilized to calculate the "two-dimensional cavity" flow problem at Reynolds number 1, 10, 100, 500, 1000 and 2000. The result shows that the improved ADI scheme has the advantage of unimproved one.