

柱坐标中弱引力场的活塞问题*

胡文瑞 唐泽眉

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文讨论弱引力场的恒星大气中的活塞问题。特别在柱坐标系中分析了气体动力学过程，外加重力和坐标曲率两者对流场的影响都进行了详细的讨论。

在弱重力的情形下，逃逸速度与气体速度或声速的比为小量。将此比值取为小参数，所有量可展开为此小参数的级数。在柱坐标中，零阶关系给出膨胀流，其中速度和声速减小；一阶关系给出外加重力的影响，使激波强度减弱，使气体内能消耗。在活塞附近，内能的消耗克服外加重力并加速气流；而在激波附近，内能和动能减少，以克服重力。

§ 1 引 言

具有外加重力场的气体动力学在许多天体物理问题中是重要的，因为恒星重力场控制着恒星大气的结构和动力学。比如，近年来引起人们广泛兴趣的日冕瞬变现象，就是太阳大气中的一类不定常动力学过程，必须考虑太阳重力场的影响。局部的稠密等离子体或者磁通量管的运动可以驱动日冕瞬变⁽¹⁻⁴⁾，这就相当于外加重力场时气体动力学的活塞问题。

前文中曾讨论直角坐标系中，弱引力场的活塞问题⁽⁵⁾。一般而言，除去引力场的影响外，还有管道截面变化的影响。因此，本文中我们将讨论柱坐标系中的一维活塞问题。这个结果对于理解恒星或行星大气中的不定常气体动力学过程将是重要的。

* 1983年3月16日收到。

下一节中,我们将给出曲线坐标系中弱引力场近似的方程组,以及摄动展开的方法。第3节中,简单讨论激波间断条件。柱坐标系中的基态解和扰动解分别第4节和第5节中讨论,最后一节将比较直角坐标系和柱坐标系中活塞问题的异同。

§2 摄动展开

对于一维气体动力学过程,可选择如图1所示的坐标系。在恒星大气中的局部运动,将 x 取在恒星半径的方向,原点在恒星的中心,这时,一维气体动力学方程可表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{N}{x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{G\mu}{x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^r} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^r} \right) = 0. \quad (3)$$

其中 ρ, p, v 为局部区域中气体的密度,压力和速度, r 是多方指数, G 为引力常数, μ 是恒星质量。上式中 N 为表示坐标系的参数, $N=0$ 时对应于直角坐标系, $N=1$ 为柱坐标系, $N=2$ 为球坐标系。若不计引力项,方程(1)-(3)退化为纯气体动力学方程组。由此方程组可组建两个具有速度量纲的量,即气体动力学中常用的

$$\xi = \frac{x}{t} \quad (4)$$

和由引力引进的

$$v_g = \sqrt{\frac{G\mu}{x}}. \quad (5)$$

故方程组(1)-(3)中的变量应表示为 ξ 和 v_g 的函数,而不仅是 ξ 的函数。

引用下列无量纲量

$$\tilde{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{v_*}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{x_*/v_*}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_*}, \quad (6)$$

其中下标 $*$ 表示典型值,例如 x_* 为恒星半径;上标 \sim 表示无量纲值,为了简单,在下边的讨论中将省略此符号;声速 $a = \sqrt{r p / \rho}$ 。

对于弱引力场的情形,引力项相对于方程(2)中的其他力为小量,引进无量纲小参数

$$\epsilon = \frac{G\mu}{x_* v_*^2} \ll 1, \quad (7)$$

对于等熵流动, 无量纲方程组(1)–(3)变为

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{r-1}{2} a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{Nv}{x} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{r-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{x^2}. \quad (9)$$

坐标系的影响包含在(8)式左端最后一项中, 而弱引力场包含在(9)式右端。

根据摄动理论, 将速度和声速展开为

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots, \quad (10)$$

$$a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \dots,$$

这样, 基本方程组(8)和(9)的零阶关系为

$$\frac{\partial a^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} + \frac{r-1}{2} a^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{Nv^{(0)}}{x} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{r-1} a^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

零阶关系的解可由黎曼流给出, 即

$$a^{(0)} = a^{(0)}(\xi), \quad v^{(0)} = v^{(0)}(\xi), \quad (13)$$

其中的 ξ 为无量纲量。这样, (11)和(12)式化为

$$(v^{(0)} - \xi) \frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{2}{r-1} a^{(0)} \frac{da^{(0)}}{d\xi} = 0, \quad (14)$$

$$(v^{(0)} - \xi) \frac{da^{(0)}}{d\xi} + \frac{r-1}{2} a^{(0)} \left(\frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{Nv^{(0)}}{\xi} \right) = 0. \quad (15)$$

在平面活塞问题中, 匀速运动的活塞前面的流场是均匀的⁽⁵⁾:

$$v^{(0)} = \text{常数}, \quad a^{(0)} = \text{常数}, \quad (16)$$

并有激波将均匀流与宁静背景分开。

类似地, 一阶方程可写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + \frac{r-1}{2} a^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{Nv^{(1)}}{x} \right) \\ & + v^{(1)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} + \frac{r-1}{2} a^{(1)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{Nv^{(0)}}{x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2a^{(0)}}{r-1} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + \frac{2a^{(1)}}{r-1} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} \\ & = -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad (18)$$

与以上类似, 可得到更高阶的方程。利用零阶关系(13), 方程组(17)和(18)可简化为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)}(\xi) \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + \frac{r-1}{2} a^{(0)}(\xi) \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{Nv^{(1)}}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{t} \left[v^{(1)} \frac{da^{(0)}}{d\xi} + \frac{r-1}{2} a^{(1)} \left(\frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{Nv^{(0)}}{\xi} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)}(\xi) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{2a^{(0)}(\xi)}{r-1} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{t} \left(v^{(1)} \frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{2a^{(1)}}{r-1} \frac{da^{(0)}}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

这个方法表明, 零阶方程(11)和(12)是非线性的, 而所有的高阶方程组皆线性的。

量纲分析得到, 一阶解应是 ξ 和 t 的函数, 我们讨论下列形式的解:

$$v^{(1)}(\xi, t) = t^m f(\xi), \quad a^{(1)}(\xi, t) = t^n g(\xi).$$

由(19)和(20)可定出

$$m = -1, \quad n = -1.$$

因此得到

$$v^{(1)}(\xi, t) = \frac{f(\xi)}{t}, \quad a^{(1)}(\xi, t) = \frac{g(\xi)}{t}. \quad (21)$$

利用上式可将方程组(19)和(20)化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(f, g) &\equiv [v^{(0)}(\xi) - \xi] g'(\xi) + \frac{r-1}{2} a^{(0)}(\xi) f'(\xi) + \\ &+ \left[\frac{r-1}{2} \left(\frac{dv^{(0)}}{d\xi} + \frac{Nv^{(0)}}{\xi} \right) - 1 \right] g(\xi) + \\ &+ \left(\frac{r-1}{2} \frac{Na^{(0)}}{\xi} + \frac{da^{(0)}}{d\xi} \right) f(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(f, g) &\equiv \frac{2}{r-1} a^{(0)}(\xi) g'(\xi) + [v^{(0)}(\xi) - \xi] f'(\xi) \\ &+ \frac{2}{r-1} \frac{da^{(0)}}{d\xi} g(\xi) + \left(\frac{dv^{(0)}}{d\xi} - 1 \right) f(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

一旦给定 $a^{(0)}(\xi)$ 和 $v^{(0)}(\xi)$, 就可求解方程(22)和(23)。对于平面问题 ($N=0$), 基态可得到分析解^[5]。但在柱坐标系中 ($N=1$), 不易得到基态的分析解, 本文中 will 具体讨论这种情况, 如图1所示。

对于每一阶方程组, 应给出两个边界条件, 我们曾在前文^[5]中具体分析。对于匀速的运动活塞, 其轨迹为 $\xi=1$, 则速度边界条件为

$$v(x, t)|_{\xi=1} = 1. \quad (24)$$

或者利用(10)和(11), 它给出

$$v^{(0)}(1) = 1, \quad (25)$$

$$f(1) = 0. \quad (26)$$

另一边界条件为激波阵面 $\xi = \xi_s$ 处的跳跃关系:

$$v = \frac{2}{r+1} \frac{1}{\theta} (\theta^2 - a_0^2) \quad (27)$$

$$p = p_0 + \frac{2}{r+1} (\theta^2 - a_0^2) \quad (28)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \left(\frac{a_0}{\theta}\right)^2}. \quad (29)$$

其中 θ 为激波传播速度, 类似地, 其零阶和一阶关系分别为

$$v_s^{(0)} = \frac{2}{r+1} \frac{1}{\theta^{(0)}} (\theta^{(0)2} - a_0^2), \quad (30)$$

$$p_s^{(0)} = p_0 + \frac{2\rho_0}{r+1} (\theta^{(0)2} - a_0^2), \quad (31)$$

$$\rho_s^{(0)} = \frac{\rho_0}{\frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \left(\frac{a_0}{\theta^{(0)}}\right)^2}; \quad (32)$$

和

$$v_s^{(1)} = \frac{1}{r+1} \frac{1}{\theta^{(0)}} (\theta^{(0)2} + a_0^2) \frac{\theta^{(1)}}{\theta^{(0)}}, \quad (33)$$

$$p_s^{(1)} = \frac{4\rho_0}{r+1} \theta^{(0)} \theta^{(1)}, \quad (34)$$

$$\rho_s^{(1)} = \frac{\frac{4\rho_0}{r+1} \left(\frac{a_0}{\theta^{(0)}}\right)}{\left[\frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \left(\frac{a_0}{\theta^{(0)}}\right)^2\right]^2} \frac{\theta^{(1)}}{\theta^{(0)}} \quad (35)$$

其中下标 s 和 0 分别对应于激波阵面后边和前边的值。

声速关系可表示为

$$a^{(0)} = \sqrt{\frac{r p^{(0)}}{\rho^{(0)}}}, \quad (36)$$

$$a^{(1)} = \frac{a^{(0)}}{2} \left(\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right), \quad (37)$$

利用(28)和(29), 我们有

$$a_s^{(0)} = \frac{1}{(r+1)^2} \left(2\theta^{(0)2} + \frac{r-1}{r} a_0 \right) \left[(r-1) + 2 \left(\frac{a_0}{\theta^{(0)}} \right)^2 \right], \quad (38)$$

$$a_s^{(1)} = \frac{\alpha_s^{(0)}}{2} \left[\frac{4\rho_0 \theta^{(0)2}}{(r+1)\rho_0 + 2\rho_0(\theta^{(0)2} - \alpha_0^2)} - \frac{4\alpha_0^2}{(r-1)\theta^{(0)2} + 2\alpha_0^2} \right] \theta^{(0)}. \quad (39)$$

而条件(30)和(31)要求

$$\frac{\theta^{(1)}}{\theta^{(0)}} = \frac{\theta^{(0)2} - \alpha_0^2}{\theta^{(0)2} + \alpha_0^2} \frac{v_s^{(1)}}{v_s^{(0)}}. \quad (40)$$

由(21), 关系式(38)和(39)给出激波阵面上函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 之间的联系

$$f(\xi_s) = \alpha g(\xi_s). \quad (41)$$

其中

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha_s^{(0)}}{v_s^{(0)}} \left\{ \frac{2r}{r+1} \left(\frac{\theta^{(0)}}{\alpha^{(0)}} \right)^2 \left[\frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \left(\frac{\alpha_0^2}{\theta^{(0)}} \right)^2 \right] - \frac{\left(\frac{\alpha_0^2}{\theta^{(0)}} \right)^2}{\frac{r-1}{2} + \left(\frac{\alpha_0^2}{\theta^{(0)}} \right)^2} \right\} \frac{\theta^{(0)2} - \alpha_0^2}{\theta^{(0)2} + \alpha_0^2}. \quad (42)$$

这样, 边条件(26)和(41)可用来求解一阶方程组(19)和(20).

对于高阶方程, 也可以类似地导出一个活塞边条件和一个激波边条件.

§ 3 基态解

用叠代的方法, 对边条件(25)和(38)求解基态方程(14)和(15). 在激波前气体处于静止, 速度为零 $v_0 = 0$. 给定激波前的声速后, 就可以求解, 讨论三种情况, 即

$$\frac{\alpha_0}{\theta^{(0)}} = 0.25, \quad 0.5, \quad 0.75, \quad (43)$$

这些解表示在图2、3和4中.

在平面活塞问题中, 活塞与激波间的速度和声速皆为常数⁽⁵⁾. 但在柱坐标的问题中, 它们随 ξ 的增加而减小, 图2-4中, 声速几乎是常数, 它的值比平面活塞的值小. 但是, 零阶速度明显地减少. 另一方面, 柱问题中的压缩流动区域比平面活塞问题的要窄. 零阶流场的典型值可列如下:

$$1. \quad \frac{\theta^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 1.204, \quad \frac{\alpha_s^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 0.689, \quad (44)$$

$$2. \quad \frac{\theta^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 1.324, \quad \frac{\alpha_s^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 0.915, \quad (45)$$

$$3. \quad \frac{\theta^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 1.634, \quad \frac{\alpha_s^{(0)}}{v_p^{(0)}} = 1.338. \quad (46)$$

其中下标 p 和 s 分别表示活塞和激波阵面的值, 而(44)-(46)的结果相应于由(43)所给定的情况。

利用这些数据, 由(42)就确定了系数 α , 它们分别是

$$\alpha = 1.5534, \quad 2.1019, \quad 2.7409 \quad (47)$$

这样, 我们就可求解一阶方程。

§ 4 扰动状态

一阶方程(22)和(23), 以及边界条件(26)和(41)是线性的。我们将柱问题化为下列两个基本解

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(f_1, g_1) = 0, \\ \mathcal{L}_2(f_1, g_1) = \frac{1}{\xi^2}, \\ f_1(1) = 0, \quad g_1(1) = 0, \end{cases} \quad (48)$$

和

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(f_2, g_2) = 0, \\ \mathcal{L}_2(f_2, g_2) = 0, \\ f_2(1) = 0, \quad g_2(1) = 0. \end{cases} \quad (49)$$

这样, 活塞问题的解是这两个基本解的线性组合:

$$\begin{cases} f(\xi) = f_1(\xi) + cf_2(\xi), \\ g(\xi) = g_1(\xi) + cg_2(\xi), \end{cases} \quad (50)$$

其中常数 c 由(41)式确定:

$$c = \frac{f_1(\xi_s) - \alpha g_1(\xi_s)}{\alpha g_2(\xi_s) - f_2(\xi_s)}. \quad (51)$$

利用这种方法, 每个基本解(48)或(49)的两个边界条件都给在活塞上, 因此便于求解。

在图5-7中, 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的剖面分别用实线和虚线表示。这些图清楚地给出引力场对流场的影响。激波强度为 $\theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)}$ 。若 $\theta^{(1)}$ 为正, 则激波强度将增强; 反之亦然。根据关系式(40), $\theta^{(1)}$ 与 $v_s^{(1)}$ 同号, 所以也与 $f(\xi_s)$ 同号。对图5-7所给出的情况, 都有 $f(\xi_s) < 0$ 。因此, 在柱面活塞问题中, 引力场使激波强度减弱。这个结果可以和平面活塞的情况比较。平面活塞问题中, 外加引力使激波强度改变微弱, 如图8所示, $f(\xi_s) \approx 0$ 。另外一方面, 函数 $g(\xi)$ 单调地从活塞 $\xi = 1$ 处的正值减小到激波 $\xi = \xi_s$ 处的负值。与平面活塞的情况类似, 这个结果意味着活塞与激波之间的气体内能被消耗了。函数 $f(\xi)$ 在活塞处为零, 然后略微增加到最大值, 再下降到激波处的负值。所以, 气体先加速而后减速。在活塞附近, 气体的动能增加; 在激波附近, 气

体动能减小。综合这些结果, 气体耗散内能以克服重力场并在活塞附近使气体加速; 而在激波附近, 内能和动能都耗散以克服外加重力。

§ 5 讨 论

本文中我们特别分析了柱坐标中的活塞问题, 可以将本文的结果与平面活塞问题的结果(5)相比较。如图 8 所示。本文的激波较小。在 (43) 所给出的三个例子中, 平面活塞问题的激波速度分别是 1.422, 1.778 和 3.048; 而柱面活塞问题的速度分别是 1.204, 1.324 和 1.634。这表明, 当流动截面相对地膨胀时, 气流的速度、激波速度和激波强度都比平面活塞问题的值要小。在不同的坐标系中, 零阶关系的差别就决定了一阶关系的差别。从能量的观点看, 在直角坐标和柱坐标系中能量守恒的趋势是相似的, 即在活塞附近耗散内能以克服重力和加速流体, 在激波附近内能和动能减少、以克服外加重力场。但是, 在平面问题中, 活塞附近气体的加速和动能增加要比柱面问题的大; 而激波速度在平面问题中变化不大; 但柱面问题中有明显减少。进一步讨论球面活塞问题将是很有意思的。

再讨论柱坐标系中边界条件对活塞问题的影响。典型边值也可以给为

$$v|_{\xi=1} = v_p(\text{常数}), \quad a|_{\xi=1} = a_p(\text{常数}). \quad (52)$$

它相当于零阶条件

$$v^{(0)}(1) = 1, \quad a^{(0)}(1) = a_p, \quad (53)$$

和一阶条件

$$f(1) = 0, \quad g(1) = 0. \quad (54)$$

零阶解与 § 3 中讨论的相同, 但一阶解不同。图 9-11 给出对于边界条件 (54) 而言的方程解, 它表明, 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 都随 ξ 的增加而单调减少, 并且对 (43) 所讨论的三个例子都是负的。动能和内能一样, 都耗散以克服重力; 外加重力场还使激波减弱。应该指出, 由于 $f(\xi_0)$ 和 $g(\xi_0)$ 的取值固定了, 给出两个活塞边条件 (54) 以后, 激波阵面上的跳跃关系不易满足。讨论不包括激波条件和应用到无限空间中的相似解, 它不仅容易引进奇点, 而且会给出动力学过程的不同物理图象。

外加重力场对恒星和行星大气的动力学过程有重要的影响。需要逐步地进行研究。本文分析了此基本过程, 给出了外加重力场的影响, 与此同时, 还分析了坐标曲率对流场的影响。进一步讨论强重力场, 以及二维流动的影响将是很有用的。

参 考 文 献

- (1) 胡文瑞, XXIV *Plenary Committee on Space Research, Ottawa*, P.39, 1982.
 (2) 胡文瑞, *Astrophysics and Space Science*, 92, (1983) 373.
 (3) 胡文瑞, *Astrophysics and Space Science*, 92 (1983) 395.
 (4) 胡文瑞, *天文学报*, 24 (1983) 401.
 (5) 胡文瑞, *应用数学与力学*, 1983.

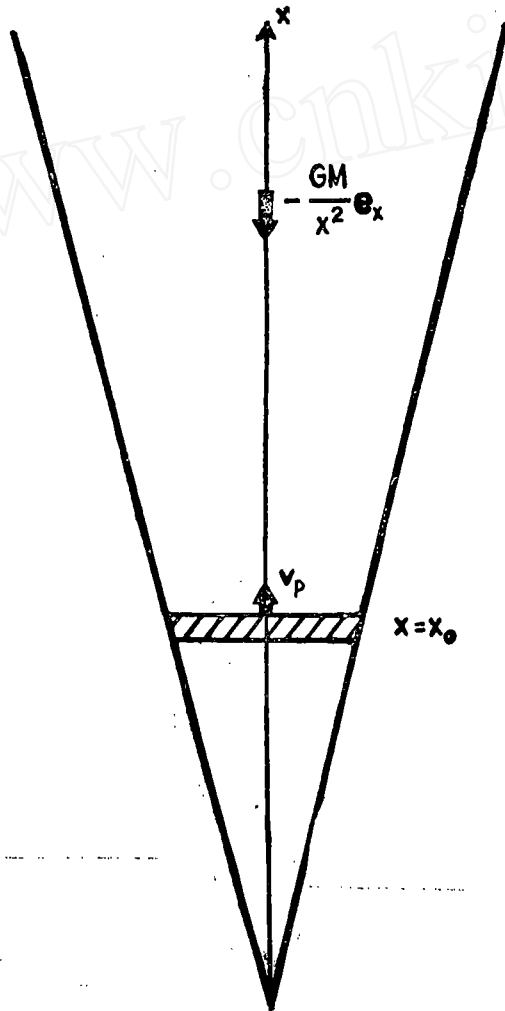


图 1 柱坐标系中一维活塞问题的位形

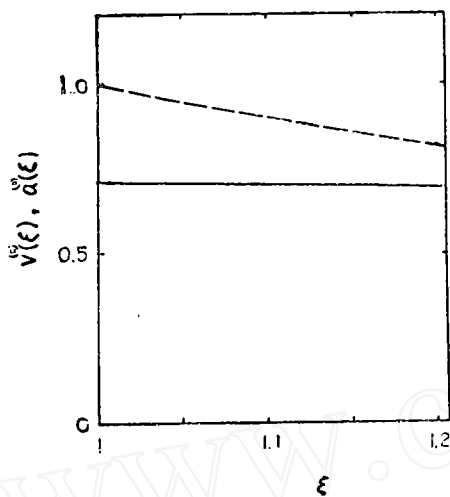


图2 基态速度和声速分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)}=0.25$

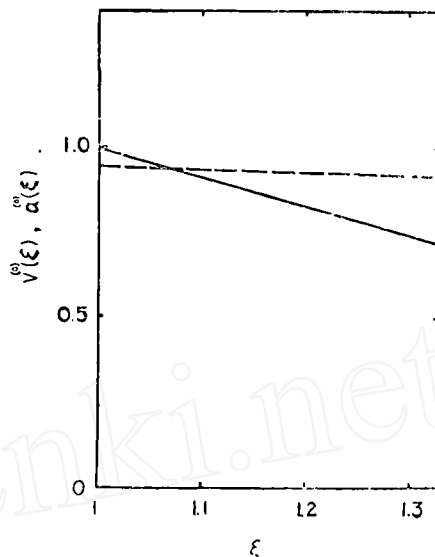


图3 基态速度和声速分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)}=0.5$

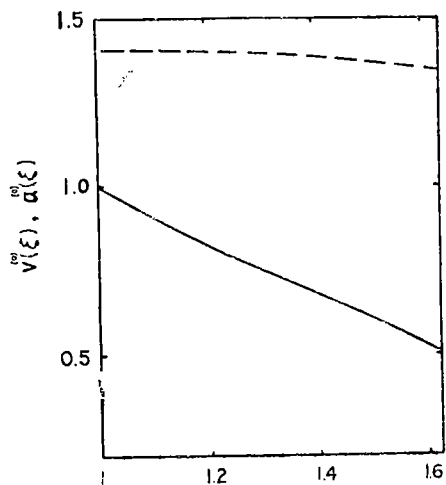


图4 基态速度和声速分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)}=0.75$

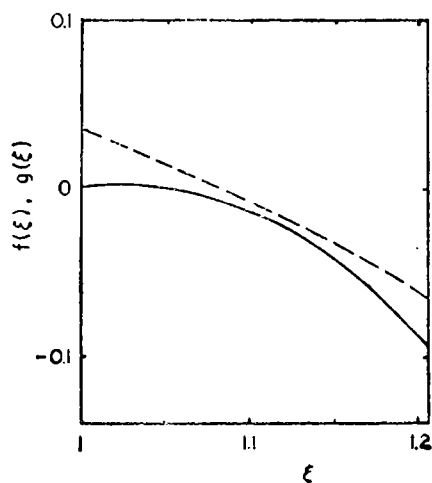


图5 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)}=0.25$

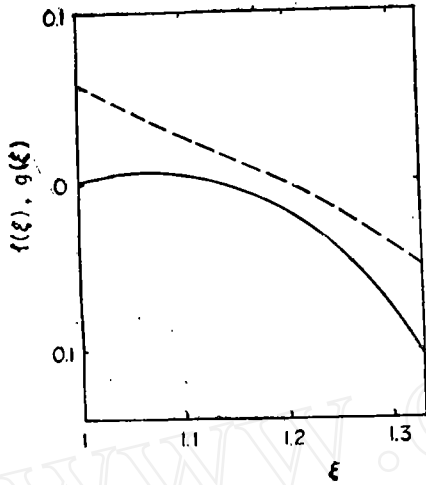


图6 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/\theta(0) = 0.5$

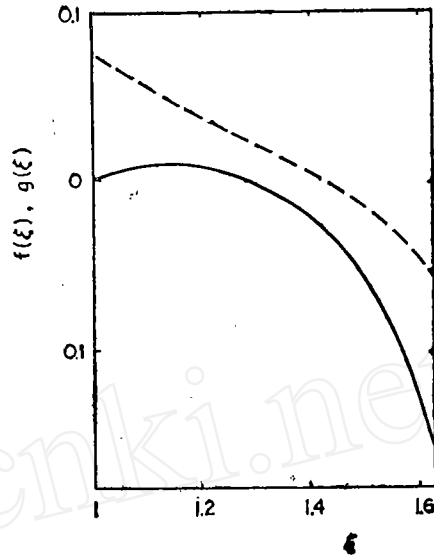


图7 函数 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 的分布, 其中 $a_0/\theta(0) = 0.75$

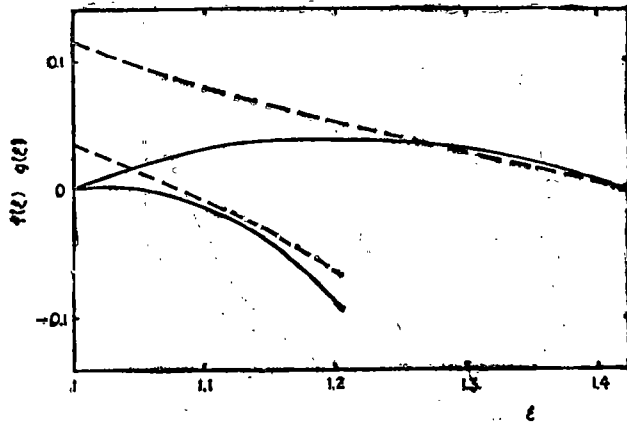


图8 平面活塞问题与柱面活塞问题的比较, 其中 $a_0/\theta(0) = 0.25$

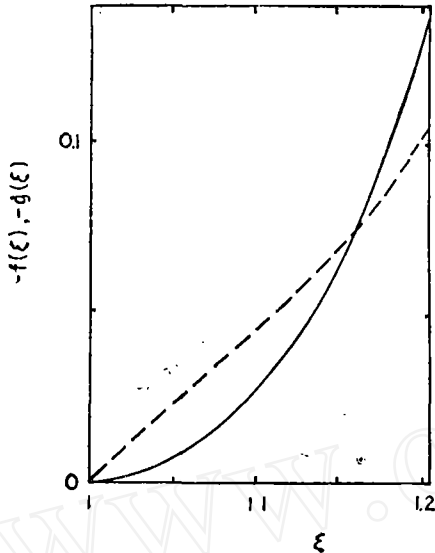


图9 满足边条件(54)时函数 f 和 g 的分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)} = 0.25$

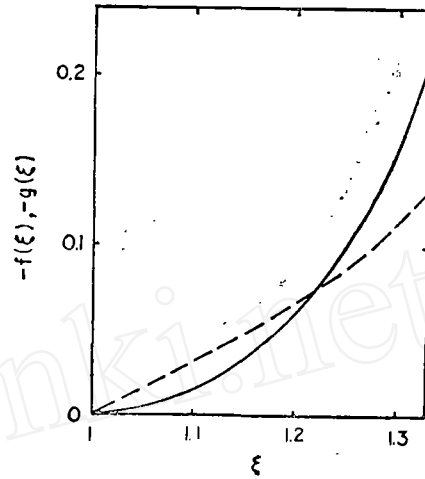


图10 满足边条件(54)时函数 f 和 g 的分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)} = 0.5$

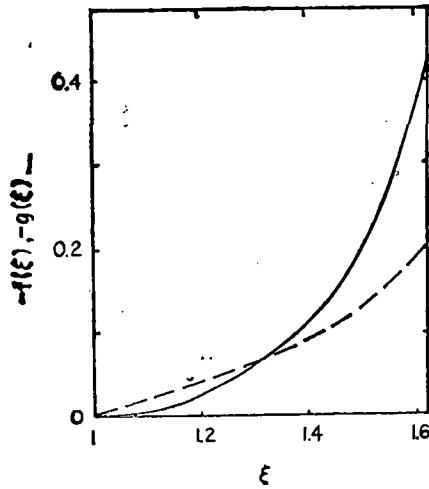


图11 满足边条件(54)时函数 f 和 g 的分布, 其中 $a_0/\theta^{(0)} = 0.75$

11