

# 在混合硬化材料中 I 型裂纹定常 扩展时的尖端场

张 晓 堤

(中国科学院力学研究所)

张 润 甫

(大连海军学院)

黄 克 智

(清华大学)

**提要** 本文采用 Кадашевич 和 Новожилов<sup>[2]</sup> 的混合线性硬化材料塑性本构关系,求得了平面应变与平面应力状态下 I 型定常扩展裂纹尖端附近场的渐近解. Amazigo 和 Hutchinson<sup>[1]</sup> 的结果相当于本文解当混合硬化参数  $\beta = 1$  且略去二次塑性区的情况. 本文的数值计算结果表明,混合硬化参数  $\beta$  对尖端场的应力应变分布有着显著的影响.

在断裂力学中裂纹尖端场的研究与断裂准则的研究是密切联系着的. 对于静止裂纹情况,线弹性断裂力学中以应力强度因子为幅度的  $K$ -场引出了  $K$ -准则,弹塑性断裂力学中的以  $J$  积分为幅度的  $J$ -场引出了  $J$ -准则. 对于扩展裂纹情况,目前已有的理想塑性材料尖端场的解正在导致裂纹扩展的新的准则. 对于线性硬化材料, Amazigo 和 Hutchinson<sup>[1]</sup> 曾得到 III 型与 I 型定常扩展裂纹尖端场的解. 但这个解没有考虑二次塑性区的存在. 此外,这个解中假定材料的硬化是各向同性的. 而实际材料却是具有鲍氏效应的混合硬化(或称各向异性硬化). 本文中我们采用 Кадашевич 和 Новожилов<sup>[2]</sup> 的混合硬化材料塑性本构关系,研究了尖端场的分区结构与区域间交界线处的连接条件,得到了线性硬化材料平面应变与平面应力状态下 I 型定常扩展裂纹尖端场. 数值结果表明二次塑性区不可忽略,而且材料的混合硬化参数  $\beta$  对尖端场有显著的影响. 本文中平面应变的结果曾在[3]中做过简要介绍.

## 一、本构关系

在 Кадашевич 和 Новожилов<sup>[2]</sup> 提出的各向异性硬化模型中引入了残余微应力张量  $\alpha_{ij}$ , 它代表屈服面中心在应力空间中不断变化的位置.

$$\alpha_{ij} = 2g\epsilon_{ij}^p \quad (1.1)$$

本文于 1983 年 12 月 9 日收到,曾在 1983 年北京国际断裂力学学术会议上宣读.

其中  $g = g(\sigma_\alpha)$  是与应力状态及变形历史无关的材料单一曲线，而  $\sigma_\alpha = \left(\frac{3}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ij}\right)^{1/2}$ 。此处及以后对重复的拉丁下标  $i, j, k$  从 1 到 3 取和。文献[2]还假设塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  与主动应力偏量  $\dot{\sigma}_{ij}^*$  之间满足下述关系：

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2h} \frac{\dot{\sigma}_c^\circ}{\sigma_c^\circ} \dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^e \tag{1.2}$$

其中  $h = h(\sigma_c^\circ)$  是另一条材料的单一曲线，这里

$$\sigma_c^\circ = \left(\frac{3}{2} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^*\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

而

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \dot{\delta}_{ij} \tag{1.4}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \alpha_{ij} \tag{1.5}$$

$\dot{\sigma}_{ij}$  和  $\sigma_c^\circ$  分别称为主动应力及等效主动应力。如采用记号

$$\lambda = \frac{1}{2h} \frac{\dot{\sigma}_c^\circ}{\sigma_c^\circ} \tag{1.6}$$

则(1.2)式又可写为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \dot{\sigma}_{ij}^* \tag{1.7}$$

当材料单向拉伸进入屈服后，我们定义

$$\left(\dot{\sigma}_{11} - \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{11}\right) / \dot{\sigma}_{11} = \beta \tag{1.8}$$

并且假定  $\beta$  是常数。利用图 1 给出的线性硬化材料的单向拉伸曲线可以确定

$$g = E'_t(1 - \beta)/3, \quad h = E'_t \beta/3 \tag{1.9}$$

其中  $E'_t = E\alpha/(1 - \alpha)$ ,  $\alpha = E_t/E$ 。(1.9)表明， $g = g(\sigma_\alpha)$  和  $h = h(\sigma_c^\circ)$  这两条材料曲线对于线性硬化材料变成了两个材料常数。由(1.9)两式消去  $E'_t$  得到

$$1 + g/h = 1/\beta \tag{1.10}$$

$\beta$  的两个极端值 1 和 0 分别代表各向同性硬化和理想鲍氏效应。

## 二、基本方程及其变换

对(1.3)式求时间导数有

$$\dot{\sigma}_c^\circ = \frac{3}{2} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^* / \sigma_c^\circ \tag{2.1}$$

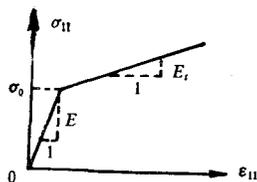


图 1 线性硬化材料单向拉伸应力-应变曲线

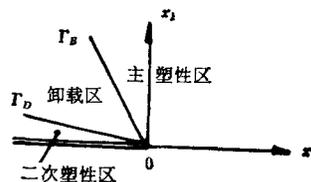


图 2 坐标系及裂纹尖端的分区

由(1.5)和(1.1)的时间导数有

$$\dot{\sigma}_{ij}^{\circ} = \dot{\sigma}_{ij} - 2g\dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ} \quad (2.2)$$

将(2.2)代入(2.1)并利用(1.2)和(1.10)可得到

$$\dot{\sigma}_c^{\circ} = \frac{3}{2} \beta \dot{\sigma}_{ij}^{\circ*} \dot{\sigma}_{ij} / \sigma_c^{\circ} \quad (2.3)$$

令  $x_1, x_2$  为原点置于裂纹尖端并随其移动的笛卡尔坐标 (图 2), 裂纹沿  $x_1$  方向扩展. 用  $\sigma$  和  $\varepsilon$  分别表示应力张量和应变张量,  $\mathcal{L}$  和  $\dot{\varepsilon}$  分别表示应力率张量  $\dot{\sigma}$  和应变率张量  $\dot{\varepsilon}$ , 则  $\mathcal{L}$  的极坐标分量可借助于应力率函数  $\dot{\psi}$  表示为:

$$\mathcal{L}_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\psi}}{\partial \theta^2}, \quad \mathcal{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \dot{\psi}}{\partial r^2}, \quad \mathcal{L}_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right) \quad (2.4)$$

$\mathcal{L}$  的分量则可借助于速度矢量  $\mathbf{V}$  的分量  $v_1, v_2$  表示为:

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \mathcal{E}_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \mathcal{E}_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.5)$$

参照 Amazigo 和 Hutchinson<sup>[1]</sup> 关于各向同性硬化的结果, 假设应力率函数及各有关量的主奇异项为以下形式:

$$\dot{\psi} = A_0 r^{s+1} f_0(\theta) \quad (2.6)$$

$$\{\mathcal{L}_{ij}, \dot{\sigma}_c^{\circ}\} = A_0 r^{s-1} \{l_{ij}(\theta), \dot{\sigma}_c^{\circ}(\theta)\} \quad (2.7)$$

$$\{\sigma_{ij}, \sigma_c^{\circ}, \dot{\sigma}_{ij}^{\circ*}\} = A_0 r^s \{\Sigma_{ij}(\theta), \Sigma^{\circ}(\theta), S_{ij}(\theta)\} \quad (2.8)$$

$$\{v_1, v_2\} = A_0 r^s \{g_0(\theta), h_0(\theta)\} \quad (2.9)$$

$$\{u_1, u_2\} = A_0 r^{s+1} \{G_0(\theta), H_0(\theta)\} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{E}_{ij} = A_0 r^{s-1} \phi_{ij}(\theta) \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{ij} = A_0 r^s E_{ij}(\theta) \quad (2.12)$$

(2.10)式中的  $u_1, u_2$  为位移矢量  $\mathbf{v}$  的分量. 出现于式(2.6)至(2.12)右侧的  $A_0$  是幅度因子,  $s$  是奇异性指数,  $0 > s > -1/2$ .  $s$  及式右所有  $\theta$  的函数都是待定的, 而  $A_0$  则无法在局部解中给出, 它将留在全场解时确定.

以下推导的公式除特别指出者外对于平面应变与平面应力均适用, 只需注意当  $k$  或  $l$  之一且只有一个等于 3 时,

$$\Sigma_{kl}(\theta) = \tau_{kl}(\theta) = S_{kl}(\theta) = E_{kl}(\theta) = \phi_{kl}(\theta) \equiv 0,$$

此外, 对平面应力  $\Sigma_{33}(\theta) = \tau_{33}(\theta) \equiv 0$ , 而对于平面应变  $E_{33}(\theta) = \phi_{33}(\theta) \equiv 0$ .

由(1.3)和(2.3)并利用(2.8)和(2.7)有

$$\Sigma^{\circ}(\theta) = \left\{ \frac{3}{2} S_{ij}(\theta) S_{ij}(\theta) \right\}^{1/2} \quad (2.13)$$

$$\dot{\sigma}_c^{\circ}(\theta) = \frac{3}{2} \beta S_{ij}(\theta) \tau_{ij}(\theta) / \Sigma^{\circ}(\theta) \quad (2.14)$$

利用(2.6)和(2.7)由(2.4)可得  $\tau_{rr}(\theta)$ 、 $\tau_{\theta\theta}(\theta)$  和  $\tau_{r\theta}(\theta)$ , 然后由坐标转换得到

$$\left. \begin{aligned} t_{11}(\theta) &= (s+1)(\cos^2\theta + s \cdot \sin^2\theta)f_0(\theta) \\ &\quad + 2s \cdot \sin\theta \cos\theta f'_0(\theta) + \cos^2\theta f''_0(\theta) \\ t_{22}(\theta) &= (s+1)(\sin^2\theta + s \cdot \cos^2\theta)f_0(\theta) \\ &\quad - 2s \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta f'_0(\theta) + \sin^2\theta f''_0(\theta) \\ t_{12}(\theta) &= (s+1)(1-s)\sin\theta \cdot \cos\theta f_0(\theta) \\ &\quad - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)s \cdot f'_0(\theta) + \sin\theta \cdot \cos\theta f''_0(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

利用(2.9)和(2.11),由(2.5)得

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11}(\theta) &= s \cdot \cos\theta g_0(\theta) - \sin\theta g'_0(\theta) \\ \phi_{22}(\theta) &= s \cdot \sin\theta h_0(\theta) + \cos\theta h'_0(\theta) \\ \phi_{12}(\theta) &= \frac{1}{2} \{ [g'_0(\theta) + s \cdot h_0(\theta)] \cos\theta + [s \cdot g_0(\theta) - h'_0(\theta)] \sin\theta \} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

在(2.15)、(2.16)中及以后,  $\prime = \frac{d}{d\theta}$ ,  $\prime\prime = \frac{d^2}{d\theta^2}$

将裂纹长度的增量作为时间参数  $t$ , 在定常状态下对任何标量或张量场  $(\ )$  有

$$(\ ) \cdot = \frac{d}{dt} (\ ) = -\frac{\partial}{\partial x_1} (\ ) \quad (2.17)$$

对于应力张量  $\sigma$ 、应变张量  $\underline{\epsilon}$  以及位移矢量  $\underline{U}$ , (2.17) 分别给出:

$$\sin\theta \Sigma'_{ij}(\theta) = s \cdot \cos\theta \Sigma_{ij}(\theta) + t_{ij}(\theta) \quad (2.18)$$

$$\sin\theta E'_{ij}(\theta) = s \cdot \cos\theta E_{ij}(\theta) + \phi_{ij}(\theta) \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta G'_0(\theta) &= (s+1) \cos\theta G_0(\theta) + g_0(\theta) \\ \sin\theta H'_0(\theta) &= (s+1) \cos\theta H_0(\theta) + h_0(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

(2.18)、(2.19)各为四个方程。这八个方程中有三个在将(2.15)和(2.16)代入它们后可积分为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{12}(\theta) &= (s+1) \sin\theta \cdot f_0(\theta) + \cos\theta f'_0(\theta) \\ \Sigma_{22}(\theta) &= -(s+1) \cos\theta f_0(\theta) + \sin\theta f'_0(\theta) \\ E_{11}(\theta) &= -g_0(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

还有三个方程,即

$$\Sigma'_{11}(\theta) = \{s \cdot \cos\theta \cdot \Sigma_{11}(\theta) + t_{11}(\theta)\} / \sin\theta \quad (2.22)$$

$$E'_{12}(\theta) = \{s \cdot \cos\theta \cdot E_{12}(\theta) + \phi_{12}(\theta)\} / \sin\theta \quad (2.23)$$

$$E'_{22}(\theta) = \{s \cdot \cos\theta \cdot E_{22}(\theta) + \phi_{22}(\theta)\} / \sin\theta \quad (2.24)$$

有待用数值方法求解。

塑性变形的不可压缩性要求满足

$$E_{kk}(\theta) = \frac{1-2\nu}{E} \Sigma_{kk}(\theta) \quad (2.25)$$

或

$$\phi_{kk}(\theta) = \frac{1-2\nu}{E} t_{kk}(\theta) \quad (2.25)'$$

其中  $\nu$  为泊松比。以上两式即所谓体积变形律。(2.18)和(2.19)中还各有一个方程,即

$$\Sigma'_{33}(\theta) = \{s \cdot \cos\theta \cdot \Sigma_{33}(\theta) + t_{33}(\theta)\} / \sin\theta \quad (2.26)$$

$$E'_{33}(\theta) = \{s \cdot \cos\theta \cdot E_{33}(\theta) + \phi_{33}(\theta)\} / \sin\theta \quad (2.27)$$

在平面应力状态下,显然(2.26)恒满足.此外,可证明(2.27)相对(2.25)和(2.18)、(2.19)中其它各式不是独立的;对于平面应变状态(2.27)恒满足,同时可证明(2.24)对于(2.25)和(2.18)、(2.19)中其余各式不是独立的.

利用(2.7)、(2.8)、(2.11)和虎克定律由(1.2)式给出

$$\phi_{\lambda\omega}(\theta) = \frac{1+\nu}{E} \epsilon_{\lambda\omega}(\theta) - \frac{\nu}{E} \epsilon_{kk}(\theta) \delta_{\lambda\omega} + \frac{\mu}{2h} \epsilon^{\circ}(\theta) S_{\lambda\omega}(\theta) / \Sigma^{\circ}(\theta) \quad (2.28)$$

此处及以后  $\mu$  取 1 或 0 分别对应塑性加载和弹性响应,对重复的希腊下标  $\lambda, \omega, \pi$  从 1 到 2 取和.注意到(1.5)和(1.1),用角分布函数表示(1.4)有:

$$S_{ij}(\theta) = \left(1 + 2g \frac{1+\nu}{E}\right) \Sigma_{ij}(\theta) - \left(\frac{1}{3} + 2g \frac{\nu}{E}\right) \Sigma_{kk}(\theta) \delta_{ij} - 2g E_{ij}(\theta) \quad (2.29)$$

(2.22)、(2.23)、(2.24) 和 (2.28) 为平面应力问题的六个支配方程,六个基本未知函数是  $f_0(\theta)$ 、 $g_0(\theta)$ 、 $h_0(\theta)$ 、 $\Sigma_{11}(\theta)$ 、 $E_{22}(\theta)$  和  $E_{12}(\theta)$ .由体积变形律(2.25)确定而外应变,

$$E_{33}(\theta) = g_0(\theta) - E_{22}(\theta) + \frac{1-2\nu}{E} \Sigma_{\pi\pi}(\theta) \quad (2.30)$$

平面应变问题的支配方程为(2.22)(2.23)、(2.26) 和 (2.28),六个基本未知函数是  $f_0(\theta)$ 、 $g_0(\theta)$ 、 $h_0(\theta)$ 、 $\Sigma_{11}(\theta)$ 、 $\Sigma_{33}(\theta)$  和  $E_{12}(\theta)$ . $E_{22}(\theta)$  可由(2.25)式(其中令  $E_{33}(\theta) = 0$ )解出:

$$E_{22}(\theta) = g_0(\theta) + \frac{1-2\nu}{E} \Sigma_{kk}(\theta) \quad (2.31)$$

所有支配方程中的  $\epsilon_{\lambda\omega}(\theta)$ 、 $\phi_{\lambda\omega}(\theta)$  和  $S_{ij}(\theta)$  均通过(2.15)、(2.16)和(2.29)(利用(2.21)和(2.30)或(2.31))用基本未知函数表示.而平面应变时要用到的  $\epsilon_{33}(\theta)$  可由(2.25)'式(其中令  $\phi_{33}(\theta) = 0$ )和(2.28)式解出:

$$\epsilon_{33}(\theta) = \nu \epsilon_{\pi\pi}(\theta) - \mu \frac{E \epsilon^{\circ}(\theta)}{2h \Sigma^{\circ}(\theta)} S_{33}(\theta) \quad (2.32)$$

要得到位移角分布函数  $G_0(\theta)$  和  $H_0(\theta)$  则须将(2.20)式与六个支配方程一同进行数值积分.但是如果只关心裂纹两岸处的位移,则  $G_0(\pi)$  和  $H_0(\pi)$  的数值可由(2.20)式令  $\theta = \pi$  而得到:

$$\{G_0(\pi), H_0(\pi)\} = \frac{1}{s+1} \{g_0(\pi), h_0(\pi)\} \quad (2.33)$$

其中  $g_0(\pi)$  和  $h_0(\pi)$  由数值解给出.

### 三、边界条件和区域连接条件

由对称给出  $\theta = 0$  处的边界条件

$$f'_0(0) = g'_0(0) = h_0(0) = 0 \quad (3.1)$$

假设在裂纹两岸没有外加载荷,在  $\theta = \pi$  处应有

$$f_0(\pi) = f'_0(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

预计裂纹尖端的分区情况如图 2,  $\Gamma_B$  为卸载边界,  $\Gamma_D$  为二次加载边界.用  $[P]_r$  表示物理量  $P$  过区域交界线  $\Gamma$  之间断.硬化材料必须满足的基本连接条件为

$$[\sigma_{ij}]_r = [\varepsilon_{ij}]_r = 0 \quad (3.3)$$

由平衡和位移连续可导出连接条件

$$[f_0(\theta)]_r = [f'_0(\theta)]_r = [g_0(\theta)]_r = [h_0(\theta)]_r = 0 \quad (3.4)$$

二次加载边界  $\Gamma_D$  的位置由下式确定:

$$\sigma_c^\circ(x_2)|_{\Gamma_D} = \sigma_c^\circ(x_2)|_{\Gamma_B} \quad (3.5)$$

在卸载边界  $\Gamma_B$  除(3.3)、(3.4)外尚须满足附加的连接条件:

$$\dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(e)} = \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} = 0 \quad (3.6)$$

其中  $\Gamma_B(p)$  和  $\Gamma_B(e)$  分别表示取  $\Gamma_B$  的塑性区侧和弹性卸载侧的值。(3.6) 称为卸载边界定理。因篇幅所限, 以下仅给出该定理证明的梗概:

采用由区域交界线  $\Gamma$  的平行曲线族及其法线族构成的  $n-s$  正交曲线坐标 (在  $\Gamma$  上  $n=0$ ), 平衡和应力连续要求

$$[\dot{\varphi}]_r = \left[ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial n} \right]_r = [\mathcal{L}_{nn}]_r = [\mathcal{L}_{ns}]_r = 0 \quad (3.7)$$

位移和应变连续要求

$$[\mathcal{E}_{ss}]_r = 0 \text{ 或 } [\mathcal{E}'_{ss}]_r = -[\mathcal{E}^p_{ss}]_r \quad (3.8)$$

此外, 显然有

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{L}_{33}]_r &= 0 && \text{对平面应力} \\ [\mathcal{E}_{33}]_r &= 0 \text{ 或 } [\mathcal{E}'_{33}]_r = -[\mathcal{E}^p_{33}]_r && \text{对平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

根据塑性区和弹性卸载区的性质显然有

$$\left. \begin{aligned} \lambda|_{\Gamma_B(e)} &= 0 \\ \lambda|_{\Gamma_B(p)} &= \frac{1}{2h\sigma_c^\circ} \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\therefore [\lambda]_{\Gamma_B} = \lambda|_{\Gamma_B(e)} - \lambda|_{\Gamma_B(p)} = -\frac{1}{2h\sigma_c^\circ} \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \leq 0 \quad (3.11)$$

(1.7) 在  $\Gamma_B$  取间断为

$$[\dot{\varepsilon}^p_{ij}]_{\Gamma_B} = [\lambda]_{\Gamma_B} \dot{\sigma}^*_{ij} = -\frac{\dot{\sigma}^*_{ij}}{2h\sigma_c^\circ} \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \quad (3.12)$$

将(2.2)代入(2.1)后在  $\Gamma_B$  取间断并利用(3.12)得:

$$[\dot{\sigma}_c^\circ]_{\Gamma_B} = \frac{3}{2\sigma_c^\circ} \dot{\sigma}^*_{ij} [\dot{\sigma}_{ij}]_{\Gamma_B} + \frac{g}{h} \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \quad (3.13)$$

利用(3.7)、(3.8)、(3.9)和虎克定律以及(3.12), 经过一系列推导可将(3.13)化为如下形式:

$$[\dot{\sigma}_c^\circ]_{\Gamma_B} = F \cdot \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \text{ 或 } \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(e)} = (F+1)\dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \quad (3.14)$$

其中

$$F = \begin{cases} \frac{3E}{4h\sigma_c^{\circ 2}} (\dot{\sigma}^*_{ss})^2 + \frac{g}{h} & \text{(平面应力)} \\ \frac{3E}{4h\sigma_c^{\circ 2}} \left\{ \frac{1}{1+\nu} [(\dot{\sigma}^*_{ss})^2 + (\dot{\sigma}^*_{33})^2] \right. \\ \quad \left. + \frac{\nu}{1-\nu^2} (\dot{\sigma}^*_{ss} + \dot{\sigma}^*_{33})^2 \right\} + \frac{g}{h} & \text{(平面应变)} \end{cases} \quad (3.15)$$

显然  $F$  恒为正, 所以  $(F + 1) > 0$ . 又因为  $\dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(e)} \leq 0$ ,  $\dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} \geq 0$ , 故由(3.14)只可能导出结论:

$$\dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(e)} = \dot{\sigma}_c^\circ|_{\Gamma_B(p)} = 0$$

#### 四、弹性卸载区的解

由于裂纹的扩展, 一般在裂纹尖端场中将出现弹性卸载区. 将(2.6)代入卸载区的协调方程  $\nabla^4 \varphi = 0$ , 可得到  $f_0(\theta)$  的四阶微分方程及其包含四个待定常数  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  的通解:

$$f_0(\theta) = b_1 \sin((s-1)(\pi-\theta)) + b_2 \sin((s+1)(\pi-\theta)) \\ + b_3 \cos((s-1)(\pi-\theta)) + b_4 \cos((s+1)(\pi-\theta)) \quad (4.1)$$

在卸载区中, 应变率与应力率之间服从弹性关系:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu)\dot{\sigma}_{ij} - \nu\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \} \quad (4.2)$$

将(4.2)用角分布函数表示并利用(2.16), 得到卸载区的基本方程:

$$s \cdot \cos\theta \cdot g_0(\theta) - \sin\theta \cdot g_0'(\theta) = \{t_{11}(\theta) + \nu't_{22}(\theta)\}/E' \quad (4.3)$$

$$s \cdot \sin\theta \cdot h_0(\theta) + \cos\theta \cdot h_0'(\theta) = \{t_{22}(\theta) - \nu't_{11}(\theta)\}/E' \quad (4.4)$$

$$\cos\theta\{g_0'(\theta) + s \cdot h_0(\theta)\} + \sin\theta\{s \cdot g_0(\theta) - h_0'(\theta)\} = 2(1+\nu')t_{33}(\theta)/E' \quad (4.5)$$

其中

$$\nu' = \begin{cases} \nu & \text{平面应力} \\ \nu/(1-\nu) & \text{平面应变} \end{cases}, \quad E' = \begin{cases} E & \text{平面应力} \\ E/(1-\nu^2) & \text{平面应变} \end{cases}$$

由以上三式可解出:

$$g_0(\theta) = -\{s[b_1 \sin((s-1)(\pi-\theta) + \theta) \\ + b_3 \cos((s-1)(\pi-\theta) + \theta)] \\ + (s+1)[b_2 \sin((s+1)(\pi-\theta) + \theta) \\ + b_4 \cos((s+1)(\pi-\theta) + \theta)]\}(1+\nu')/E' \\ + \{b_1 \sin((s-1)(\pi-\theta) - \theta) \\ + b_3 \cos((s-1)(\pi-\theta) - \theta)\}(3-\nu')/E' \quad (4.6)$$

$$h_0(\theta) = \{b_1 \cos((s-1)(\pi-\theta) + \theta) \\ - b_3 \sin((s-1)(\pi-\theta) + \theta)\}s(1+\nu')/E' \\ + \{b_2 \cos((s+1)(\pi-\theta) + \theta) \\ - b_4 \sin((s+1)(\pi-\theta) + \theta)\}(s+1)(1+\nu')/E' \\ + \{b_1 \cos((s-1)(\pi-\theta) - \theta) \\ - b_3 \sin((s-1)(\pi-\theta) - \theta)\}(3-\nu')/E' \quad (4.7)$$

将连接条件(3.4)用于  $\Gamma_B$  可得到确定  $b_1, b_2, b_3$  和  $b_4$  的四元线性代数方程组. 各应力、应变角分布函数均可通过(4.1)、(4.6)和(4.7)表示为  $\theta$  的已知函数. 将(4.1)和(4.6)代入(2.21)则得到  $\Sigma_{12}(\theta)$ 、 $\Sigma_{22}(\theta)$  和  $E_{11}(\theta)$ . 对于平面应变情况, 将(2.32)(其中令  $\mu = 0$ )代入(2.26)积分并利用  $\Gamma_B$  处  $\Sigma_{33}(\theta)$  连续的条件得:

$$\Sigma_{33}(\theta) = -4\nu\{b_1 \sin((s-1)(\pi-\theta) - \theta)$$

$$\begin{aligned}
& + b_3 \cos((s-1)(\pi-\theta)-\theta) \} \\
& + \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p} \right)^s \{ \Sigma_{33}(\theta_p-0) + 4\nu [b_1 \sin((s-1)(\pi-\theta_p)-\theta_p) \\
& + b_3 \cos((s-1)(\pi-\theta_p)-\theta_p)] \} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

利用在卸载区塑性应变  $\varepsilon_{ij}^p$  仅为  $x_2$  的函数的性质以及卸载边界  $\Gamma_B$  处应力、应变连续的条件可得:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11}(\theta) &= -Eg_0(\theta) + \nu \Sigma_{22}(\theta) + \nu \Sigma_{33}(\theta) \\
&+ \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p} \right)^s \{ \Sigma_{11}(\theta_p-0) + Eg_0(\theta_p-0) \\
&- \nu \Sigma_{22}(\theta_p-0) - \nu \Sigma_{33}(\theta_p-0) \} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{22}(\theta) &= \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \Sigma_{22}(\theta) - \nu \Sigma_{kk}(\theta) \} \\
&+ \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p} \right)^s \left\{ E_{22}(\theta_p-0) - \frac{1}{E} [\Sigma_{22}(\theta_p-0) \right. \\
&\left. - \nu(\Sigma_{11}(\theta_p-0) + \Sigma_{33}(\theta_p-0))] \right\} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$E_{12}(\theta) = \frac{1+\nu}{E} \Sigma_{12}(\theta) + \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p} \right)^s \left\{ E_{12}(\theta_p-0) - \frac{1+\nu}{E} \Sigma_{12}(\theta_p-0) \right\} \quad (4.11)$$

对于平面应力情况,需令(4.9)和(4.10)中的  $\Sigma_{33}(\theta) = 0$ , 此外,还可得到

$$E_{33}(\theta) = -\frac{\nu}{E} \Sigma_{\pi\pi}(\theta) + \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p} \right)^s \left\{ E_{33}(\theta_p-0) + \frac{\nu}{E} \Sigma_{\pi\pi}(\theta_p-0) \right\} \quad (4.12)$$

至此,我们就求得了卸载区的封闭解。

将(3.3)和(3.4)用于  $\Gamma_D$ , 由弹性卸载区的解可给出  $f_0(\theta)$ 、 $f'_0(\theta)$ 、 $g_0(\theta)$ 、 $h_0(\theta)$  以及各应力、应变角分布函数在  $\theta = \pi - \theta_p + 0$  处的值作为在二次塑性区求数值解的边界条件。

## 五、数值结果

用数值方法求解在第二节中导出的支配方程是一个解常微分方程组的两点边值问题。边界条件由  $\theta = 0$  处的(3.1)和  $\theta = \pi$  处的(3.2)组成。本文采用了与[1]类似的方法求解。有人称这种方法为“Shooting method”。

在  $\theta = 0$  和  $\pi$  两处,支配方程(2.22)、(2.23)和(2.24)(或(2.26))等式右端分母为零,这就给数值解带来了新的问题。对  $\theta = 0$  处的困难仍采用与[1]相同的方法处理。由于本文考虑了二次塑性区,所以带来了上述  $\theta = \pi$  处的新困难。我们首先采用函数变换将在  $\theta = \pi$  处为奇异的基本未知函数  $\Sigma_{11}$ 、 $E_{12}$  和  $E_{22}$  (或  $\Sigma_{33}$ ) 变换为非奇异的函数,变换后的导函数奇异性减弱。对变换后的方程奇异性进行的分析表明,在  $\theta = \pi - \varepsilon$  处( $\varepsilon$  为一小量,例如  $10^{-6}$ ) 积分步长至少应比  $\varepsilon$  小一个量级才能保证积分结果的可靠性。为此,我们采用了控制精度的自动变步长四阶 Runge-Kutta 法进行积分。对本节将给出的某些典型算例曾采用三种不同量级的精度校核了结果的可靠性。

除各基本未知函数外,主塑性区角  $\theta_p$  和二次塑性区角  $\theta_c$  也是未知的,它们分别利

用条件(3.6)和(3.5)在数值解的过程中一同被定出。(3.5)和(3.6)以小于  $10^{-12}$  的误差被满足。

平面应变的某些数值结果列于表 1。图 3、4、5 分别给出当  $\alpha = 0.01, \beta = 1$  和 0.5

表 1 平面应变 ( $\nu = 1/3$ )

$\alpha$	$\beta = 1$			$\beta = 0.5$		
	$s$	$\theta_p$	$\theta_s$	$s$	$\theta_p$	$\theta_s$
0.5	-0.442 (-0.442) <sup>1)</sup>	1.717(1.717)	0	-0.393	2.327	0.0056
0.3	-0.373 (-0.373)	1.876(1.875)	0	-0.318	2.440	0.1165
0.1	-0.197 (-0.197)	2.153(2.174)	0.1115	-0.212	2.548	0.3230
0.05	-0.142 (-0.136)	2.279(2.393)	0.3331	-0.174	2.568	0.4017
0.01	-0.0797(-0.0887)	2.360(2.736)	0.6026	-0.134	2.590	0.4783

1) 圆括号中的值取自文献[1],是忽略二次塑性区的结果。

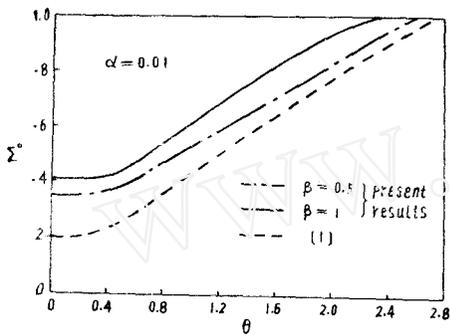


图 3 等效主动应力的角分布曲线(平面应变)

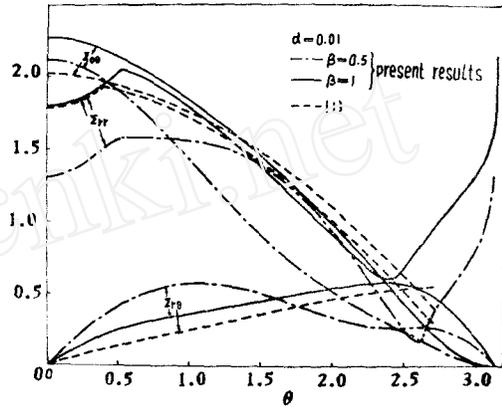


图 4 应力分量的角分布曲线(平面应变)

时等效主动应力、各应力分量和塑性应变率分量的角分布函数曲线。为了进行比较, Amazigo 和 Hutchison<sup>[1]</sup> 忽略二次塑性区的相应结果也同图给出。图 3 表明,对于低硬化材料(例如  $\alpha = 0.01$ ), 等效应力的角分布与[1]的结果差别显著。这意味着文[1]由于不考虑二次塑性区而低估了塑性应变。表 2、3 和 4 给出了平面应力的某些数值结果。图 6 给出了  $\beta$ - $\alpha$  平面上按有否二次塑性区所作的划分。它表明[1]忽略二次塑性区(相当图中  $\beta = 1$ ) 对于除  $\alpha$  很小的情况外是合理的。 $\alpha = 0.01$  的应力角分布曲线示于图 7 和

表 2 奇异性指数 \* (平面应力)

$\alpha \backslash \beta$	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
0.75	-0.468	-0.467	-0.462	-0.454	-0.445	-0.473
0.25	-0.335	-0.331	-0.317	-0.291	-0.293	-0.418
0.10	-0.237	-0.232	-0.217	-0.191	-0.229	-0.401
0.01	-0.0863	-0.0831	-0.0748	-0.0612	-0.182	-0.391

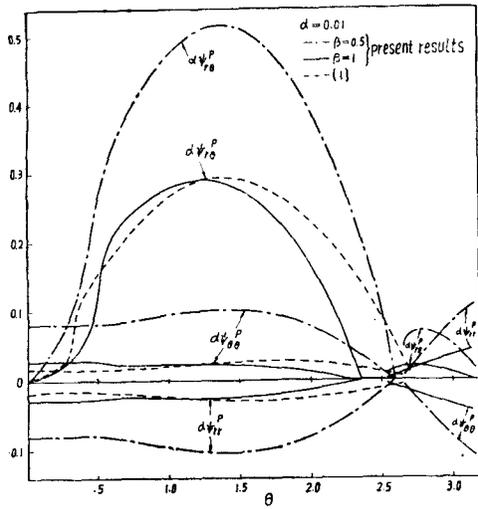


图 5 塑性应变率分量的角分布(平面应力)

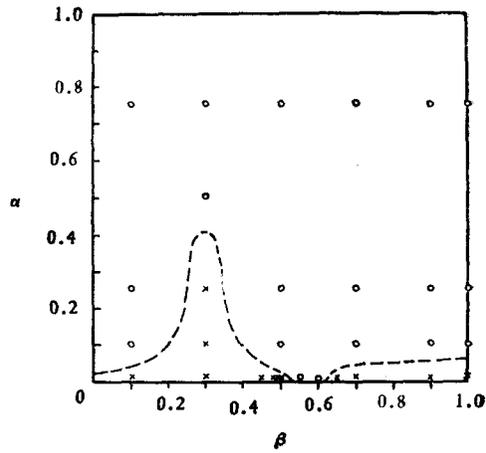


图 6  $\beta$ - $\alpha$  平面上的分区(平面应力)

×——有二次塑性区; ○——没有二次塑性区;  
 -----对这两种情况的分界线的估计

表 3 主塑性区角  $\theta_p$  (平面应力)

$\alpha \backslash \beta$	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
0.75	1.410	1.452	1.592	1.982	3.109	3.137
0.25	1.371	1.409	1.532	1.923	3.019	3.123
0.10	1.285	1.322	1.444	1.862	3.004	3.119
0.01	1.066	1.109	1.252	1.785	3.030	3.123

表 4 二次塑性区角  $\theta_s$  (平面应力)

$\alpha \backslash \beta$	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
0.75	0	0	0	0	0	0
0.25	0	0	0	0	$0.215 \times 10^{-2}$	0
0.10	0	0	0	0	$0.155 \times 10^{-1}$	0
0.01	$0.552 \times 10^{-5}$	$0.813 \times 10^{-5}$	$0.211 \times 10^{-6}$	$0.397 \times 10^{-2}$	$0.515 \times 10^{-1}$	$0.896 \times 10^{-3}$

图 8, 塑性应变率角分布曲线示于图 9. 各向同性硬化 ( $\beta = 1$ ) 的各曲线在所给标尺下与 [1] 的相应曲线难于区分. 图 10 给出了以  $\alpha$  为参数的  $H_0(\pi)-\beta$  曲线. 随  $\beta$  值的减小曲线迅速上升, 这表明裂纹尖端张开位移值强烈地受各向异性硬化的影响. 对于平面应力问题,  $\nu$  值只影响弹性应变而对  $s$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_s$  以及应力场和塑性应变场没有影响. 更详细的研究表明, 各向异性硬化参数  $\beta$  还可能影响扩展裂纹尖端场的构造. 例如, 对于平面应力  $\alpha = 0.01$  的情况, 在  $0.48 < \beta < 0.5$  的范围内, 尖端场中明显地存在着二次卸载区和三次塑性区.

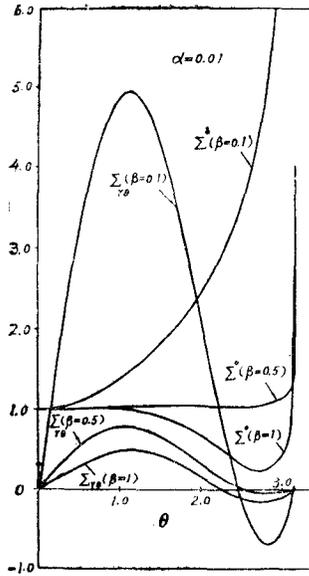


图 7 等效主动应力  $\sigma_{\theta}^{\circ}$  和剪切应力  $\sigma_{r,\theta}$  的角分布(平面应力)

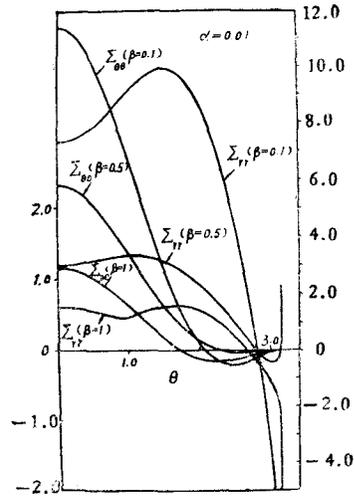


图 8 应力分量  $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{\theta\theta}$  的角分布(平面应力,右面的标尺对于  $\beta = 0.1$ )

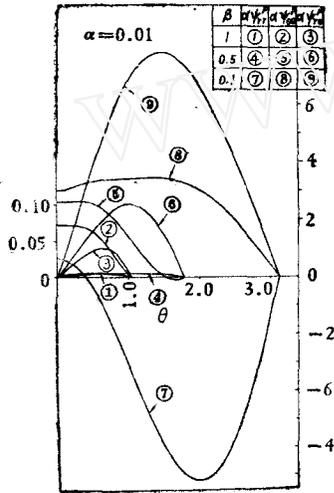


图 9 塑性应变率分量的角分布(平面应力,右标尺对于  $\beta = 0.1$ )

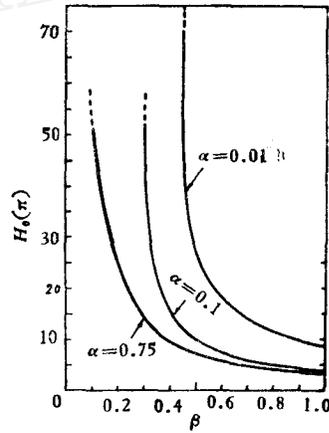


图 10 裂纹张开位移角分布函数值随各向异性硬化参数  $\beta$  的变化(平面应力)

## 六、结 论

(1) 二次塑性区的存在对于平面应变问题是不可忽略的。对于平面应力问题的大多数情况或不存在二次塑性区,或虽然存在二次塑性区但对扩展裂纹尖端场的影响很小。

(2) 各向异性硬化效应(即鲍氏效应)对扩展裂纹尖端场(平面应力与平面应变)的特性有着十分显著的影响。

## 参 考 文 献

- [1] Amazigo, J. C. and Hutchinson, J.W., *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 2(1977), 81—97.  
 [2] Кадашевич, Ю. И. и Новожилов, В. В., *Прикл. Мат. и Мех.* Т.22, В. 1 (1958), 78—89.  
 [3] Zhang Runfu, Zhang Xiaoti and Hwang Kehchih, *Proceedings of ICF International Symposium on Fracture Mechanics (Beijing) (1983)*, 283—290.

## NEAR-TIP FIELDS FOR MODE-I CRACK DURING STEADY GROWTH IN MATERIALS WITH MIXED HARDENING

Zhang Xiaoti<sup>1)</sup> Zhang Runfu<sup>2)</sup> Hwang Kehchih<sup>3)</sup>

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)<sup>1)</sup>

(*Naval Academy, Dalian*)<sup>2)</sup>

(*Tsinghua University, Beijing, China*)<sup>3)</sup>

### Abstract

Based on the constitutive law for mixed linear hardening suggested by Kadashevich and Novozhilov<sup>[2]</sup>, the asymptotic solution are obtained for the near-tip fields for mode-I crack during steady growth in plane-strain and in plane-stress state. A mixed hardening parameter  $\beta$  is introduced, with the extreme values  $\beta = 1$  for isotropic hardening and  $\beta = 0$  for kinematic hardening. Numerical results are obtained for various values of tangent modulus ratio  $\alpha = E_t/E$  and parameter  $\beta$ .

For plane-strain problem (with Poisson's ratio  $\nu = 1/3$ ), the order of singularity  $s$  and angles  $\theta_p$ ,  $\theta_s$  subtended by plastic zones are shown in Table 1. For  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 1, 0.5$ , the angular distribution curves of equivalent active stress, stress components and plastic strain-rate components are shown in Figs. 3—5. In the same figures are also shown the results of Amazigo and Hutchinson<sup>[1]</sup>, who neglected the secondary plastic zone. Comparison shows that for materials with low hardening (e. g.  $\alpha = 0.01$ ) the secondary plastic zone plays a significant role.

For plane-stress problem, values of  $s$ ,  $\theta_p$  and  $\theta_s$  are shown in Tables 2,3 and 4, respectively. Again for  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 1, 0.5, 0.1$ , the angular distribution curves of stresses are shown in Figs.7 and 8, and those of plastic strain-rates in Fig. 9.

All the numerical results show that the anisotropy of hardening is an unnegligible factor in the consideration of crack-tip fields.