

Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及 应力强度因子计算

柳春图 李英治
(中国科学院力学研究所)

提要 本文采用考虑横向剪应变的 Reissner 理论, 给出了含裂纹平板在弯曲情况下裂纹尖端应力应变场的一般解. 作为算例, 应用此展开式对于在对称和反对称情况下约有限尺寸板进行了应力强度因子计算并给出相应的曲线.

一、引言

板壳是工程结构中常见的一种结构形式, 研究带裂纹平板的弯曲是实际工程结构中的一个基本问题. 在早期的文献中主要按经典板论进行分析, 近年来有较多的研究者从 Reissner 理论^[1]出发进行研究. 文献[2, 3]得到了 Reissner 型板的奇异性; 文献[4]得到了对称 I 型问题的裂纹尖端应力应变场的展开式; 文献[5]为了寻求裂纹尖端附近的一般解, 给出了 I、II、III 型展开式的一般求解方法和前几项的表达式; 文献[6]用渐近分析方法得到上述问题应力强度因子的零阶渐近解. 文献[7, 8, 9]用有限元法求解了有限尺寸板的对称 I 型问题, 文献[10, 11]用积分变换方法, 求解了无限大板在纯扭和纯剪时的应力强度因子. 对于基于 Reissner 理论的有限尺寸板复合型问题的计算, 笔者至今还没有看到, 但通常受弯情况下的板大都是有限尺寸和复合型的. 因此, 研究裂纹尖端附近的应力应变场, 即包括 I、II、IV 型的一般解, 是一个重要课题, 它为研究有限尺寸板复合型问题提供理论基础.

二、含裂纹板在弯曲情况下基本方程

考虑一块含有半无限穿透裂纹的受弯平板, 取裂纹尖端为坐标原点, 其 x 、 y 轴如图 1 示.

我们采用 Reissner 理论^[1,2], 以三个广义位移 ϕ_x 、 ϕ_y 、 w 表示的基本方程为:

$$D \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$D \left(\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + p = 0 \quad (2.3)$$

本文于 1983 年 10 月 4 日收到, 曾在 1983 年北京国际断裂力学学术会议上宣读.

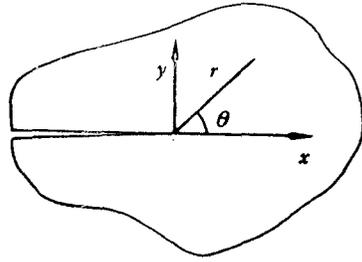


图 1

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为抗弯刚度; $C = \frac{5}{6} Gh$ 为抗剪刚度; ψ_x, ψ_y 是变形前垂直中面的直线段在变形后的转角. 其中 ψ_x 是 xz 平面内的转角, 以从 x 轴转向 z 轴的方向为正; ψ_y 是 yz 平面内的转角, 以从 y 轴转向 z 轴的方向为正. w 为挠度, p 为单位荷载.

按照文献[12]的做法, 设

$$\psi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.4)$$

将(2.4)代入式(2.1)、(2.2)中有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [D\nabla^2 F + C(w-F)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} [D\nabla^2 F + C(w-F)] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

此为柯西黎曼方程, 由此得到

$$\frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf + i[D\nabla^2 F + C(w-F)] = C\Phi(x+iy) \quad (2.6)$$

式中 $\Phi(x+iy)$ 为一解析函数, 在[12]中取 $\Phi(x+iy) = 0$, 这对于无奇点时是适用的, 而裂纹尖端是奇点, 所以一般说来 $\Phi(x+iy) \neq 0$.

将(2.6)式的实部与虚部分开, 得到:

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 4k^2 \operatorname{Re} \Phi \quad (2.7)$$

$$w = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \operatorname{Im} \Phi \quad (2.8)$$

式中
$$4k^2 = \frac{2C}{D(1-\nu)} = \frac{10}{h^2} \quad (2.9)$$

将式(2.4)、(2.8)代入式(2.3)中得到

$$D\nabla^2 \nabla^2 F = p \quad (2.10)$$

则基本方程(2.7)–(2.10)等价于(2.1)–(2.3). 对于有裂纹平板, 问题归结为求解关于 F, f 的两个方程和满足边界条件.

方程(2.7)、(2.8)的解可以表达为特解与相应齐次方程通解之和. 此时特解可选择为:

$$f_1 = -\operatorname{Re} \Phi, \quad F_1 = 0 \quad (2.11)$$

与式(2.7)相应的齐次方程为:

$$\nabla^2 f - 4k^2 f = 0 \quad (2.7')$$

$\Phi(x + iy)$ 为解析函数, 可展为级数

$$\begin{aligned}\Phi(x + iy) &= \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1})z^{\lambda-1} \\ &= \sum_{\lambda} (\beta_{\lambda-1} + i\alpha_{\lambda-1})r^{\lambda-1}[\cos(\lambda-1)\theta + i\sin(\lambda-1)\theta]\end{aligned}\quad (2.12)$$

则特解可以写为:

$$\begin{aligned}f_1 &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1}[\alpha_{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\theta - \beta_{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\theta] \\ F_1 &= 0\end{aligned}\quad (2.11')$$

在极坐标系下, 以三个广义位移 ϕ_r, ϕ_θ, w 表示的应力应变关系为:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} + \nu \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right) \quad (2.14)$$

$$M_{r,\theta} = -\frac{D}{2} (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right) \quad (2.15)$$

$$Q_r = C \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \phi_r \right) \quad (2.16)$$

$$Q_\theta = C \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \phi_\theta \right) \quad (2.17)$$

若引入应力函数 F, f , 设

$$\begin{aligned}\phi_r &= \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \phi_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r}\end{aligned}\quad (2.18)$$

则基本方程形式上与(2.7)~(2.10)相同, 此时 ∇^2 定义为:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.19)$$

应力应变关系为:

$$M_r = -D \left[\nu \nabla^2 F + (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.20)$$

$$M_\theta = -D \left[\nabla^2 F - (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$M_{r,\theta} = -D(1-\nu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \left(2k^2 f_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right] \quad (2.22)$$

$$Q_r = -C \left(\frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 F + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) \quad (2.23)$$

$$Q_\theta = C \left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F \right) \quad (2.24)$$

$$\text{式中 } f = f_0 - \text{Re } \Phi = f_0 + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta - \beta_{\lambda-1} \cos(\lambda-1)\theta] \quad (2.25)$$

f_0 是方程(2.7')的通解.

根据 Reissner 型板奇异性分析^[2,3], 应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 以及 $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ 应具有 $O(r^{-\frac{1}{2}})$ 阶奇异性. 这就要求 F, f 具有 $O(r^{\frac{3}{2}})$ 阶, 而 ϕ_x, ϕ_y 和 w 应具有 $O(r^{\frac{1}{2}})$. 这就是采用三广义位移理论时裂纹尖端奇异性条件.

三、位移函数的特征展开

当 $p = 0$, 将 F 写为以下形式:

$$F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} F(\theta) \quad (3.1)$$

将(3.1)式代入(2.10)式, 得到 $F(\theta)$ 的解答. 于是:

$$F(r, \theta) = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta + L_{\lambda} \sin(\lambda - 1)\theta + M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta + N_{\lambda} \sin(\lambda + 1)\theta] \quad (3.2)$$

从式(2.8)、(2.12)得:

$$\begin{aligned} w &= F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta + \beta_{\lambda-1} \sin(\lambda - 1)\theta] \\ &= \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta + L_{\lambda} \sin(\lambda - 1)\theta + M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta \\ &\quad + N_{\lambda} \sin(\lambda + 1)\theta] + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[\left(\alpha_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda K_{\lambda} \right) \cos(\lambda - 1)\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda L_{\lambda} \right) \sin(\lambda - 1)\theta \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

由(3.3)式可见, 当 $\lambda - 1 < \frac{1}{2}$ (即 $\lambda < \frac{3}{2}$) 时, 若令

$$\alpha_{\lambda-1} = \frac{D}{C} 4\lambda K_{\lambda}, \quad \beta_{\lambda-1} = \frac{D}{C} 4\lambda L_{\lambda} \quad (3.3')$$

则可以保证 w 是 $O(r^{\frac{1}{2}})$ 阶的. 而当 $\lambda - 1 \geq \frac{1}{2}$ (即 $\lambda \geq \frac{3}{2}$) 时, 若引入新的独立变量 $\tilde{\alpha}_{\lambda-1}, \tilde{\beta}_{\lambda-1}$, 则 w 可以写为以下形式:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} [K_{\lambda} \cos(\lambda - 1)\theta + L_{\lambda} \sin(\lambda - 1)\theta \\ &\quad + M_{\lambda} \cos(\lambda + 1)\theta + N_{\lambda} \sin(\lambda + 1)\theta] + \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\tilde{\alpha}_{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta \\ &\quad + \tilde{\beta}_{\lambda-1} \sin(\lambda - 1)\theta] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{式中} \quad \tilde{\alpha}_{\lambda-1} = \alpha_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda K_{\lambda}, \quad \tilde{\beta}_{\lambda-1} = \beta_{\lambda-1} - \frac{D}{C} 4\lambda L_{\lambda} \quad (3.5)$$

并且仅当 $\lambda - 1 \geq \frac{1}{2}$ 时, $\tilde{\alpha}_{\lambda-1} \neq 0, \tilde{\beta}_{\lambda-1} \neq 0$.

函数 f_0 是亥姆霍兹方程(2.7')的通解, 它可用修正贝塞尔函数表示:

$$\begin{aligned}
f_0 &= (A_0 + B_0\theta)I_{0(2kr)} \\
&+ \sum_{(\lambda \text{ 为非整数})} \{ [A_\lambda I_{\lambda(2kr)} + A_{-\lambda} I_{-\lambda(2kr)}] \sin \lambda\theta + [B_\lambda I_{\lambda(2kr)} \\
&+ B_{-\lambda} I_{-\lambda(2kr)}] \cos \lambda\theta \} + \sum_{(\lambda \text{ 为整数})} \{ [A'_\lambda I_{\lambda(2kr)} + A'_{-\lambda} K_{\lambda(2kr)}] \sin \lambda\theta \\
&+ [B'_\lambda I_{\lambda(2kr)} + B'_{-\lambda} K_{\lambda(2kr)}] \cos \lambda\theta \} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

式中 $A_0, A_\lambda, A_{-\lambda}, B_0, B_\lambda, B_{-\lambda}$ 以及 $A'_\lambda, A'_{-\lambda}, B'_\lambda, B'_{-\lambda}$ 均为独立未知数. $I_{0(2kr)}, I_{\lambda(2kr)}$ 分别为零阶修正贝塞尔函数和第一类修正贝塞尔函数; $I_{-\lambda(2kr)}$ 和 $K_{\lambda(2kr)}$ 分别为 λ 为非整数时和 λ 为整数时的第二类修正贝塞尔函数.

根据 $\theta = \pm\pi$ 时边界条件的对称性, 必须令 $B_0 = 0$; 为保证应变能有限, 第二类修正贝塞尔函数 $K_{\lambda(2kr)}$ 亦必须舍去. 当 λ 为非整数时, 第二类修正贝塞尔函数 $I_{-\lambda(2kr)}$ 可由第一类修正贝塞尔函数 $I_{\lambda(2kr)}$ 代入 $-\lambda$ 而得. 因此, 当 λ 可取为正数、零和负数时, (2.7') 的通解仅可用第一类修正贝塞尔函数 $I_{\lambda(2kr)}$ 表示.

现将第一类修正贝塞尔函数 $I_{\lambda(2kr)}$ 展开为级数.

对于对称问题:

$$f_\lambda = \sin \lambda\theta I_{\lambda(2kr)} = \sin \lambda\theta \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda+2m}}{m! \varphi(\lambda, m)} \quad (3.7)$$

对于反对称问题:

$$\tilde{f}_\lambda = \cos \lambda\theta I_{\lambda(2kr)} = \cos \lambda\theta \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda+2m}}{m! \varphi(\lambda, m)} \quad (3.8)$$

式中

$$\varphi(\lambda, m) = \frac{\Gamma(\lambda + m + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)} \quad (3.9)$$

$$\text{即: } \varphi(\lambda, m) = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + m) & (\text{当 } m \geq 1) \\ 1 & (\text{当 } m = 0) \end{cases}$$

式(3.7)、(3.8)的线性组合自然也是(2.7')的解. 为确定系数的方便, 我们采用下列形式的线性组合作为(2.7')的通解:

$$f_0 = \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,2,\dots} (A_{\lambda-1+2n} f_{\lambda-1+2n} + B_{\lambda-1+2n} \tilde{f}_{\lambda-1+2n}) \quad (3.10)$$

实际上, 对于某一确定的 λ 值, f_0 最多只有两个独立未知数 $A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}$, 其余的 $A_{\lambda-1+2n}, B_{\lambda-1+2n}$ 可以按照某种关系, 递推求出.

将式(2.11)、(3.10)代入式(2.25)中, f 可表示为:

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[A_{\lambda-1+2n} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \right. \\
&+ B_{\lambda-1+2n} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \left. \right] \\
&+ \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [\alpha_{\lambda-1} \sin(\lambda - 1)\theta - \beta_{\lambda-1} \cos(\lambda - 1)\theta] \quad (3.11)
\end{aligned}$$

边界条件是:

$$\text{当 } \theta = \pm\pi \text{ 时, } M_\theta = M_{r\theta} = Q_\theta = 0 \quad (3.12)$$

根据式(2.21)、(2.22)、(2.24), 边界条件写为:

$$\nabla^2 F - (1-\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \left(2k^2 f_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{D}{C} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 F = 0 \quad (3.15)$$

将式(3.2)、(3.11)代入式(3.13)–(3.15)中, 得到以展开式系数为未知数的线性方程组。为使该方程组得到满足, 可令:

$$\lambda = \pm \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

根据应变能有界条件, λ 只取正数。现分别根据 λ 为半整数和 λ 为整数两种情况, 确定展开式中系数关系。

1. 当 λ 为半整数

在裂纹面边界上 $\theta = \pm \pi$, 当 λ 为半整数时有 $\cos \lambda \pi = 0$, 欲使边界条件(3.13)–(3.15)得到满足, 只须令含 $\sin \lambda \pi$ 的各项系数为零。由此得到相应于(3.13)–(3.15)式的三个式子:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} 4\lambda r^{\lambda-1} L_{\lambda} - (1-\nu) \sum_{\lambda} \lambda(\lambda+1) r^{\lambda-1} (L_{\lambda} + N_{\lambda}) \\ & - (1-\nu) \left\{ - \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} (\lambda-1+2n) B_{\lambda-1+2n} \sum_{m=0,1,\dots} \right. \\ & \times \frac{(\lambda-2+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \\ & \left. + \sum_{\lambda} (\lambda-1)(\lambda-2) r^{\lambda-3} \beta_{\lambda-1} \right\} = 0 \quad (3.13') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{\lambda} \lambda r^{\lambda-1} [(\lambda-1)K_{\lambda} + (\lambda+1)M_{\lambda}] + 2k^2 \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} A_{\lambda-1+2n} \\ & \times \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} - \left\{ \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} A_{\lambda-1+2n} \right. \\ & \times \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m)(\lambda-2+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-3+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \\ & \left. + \sum_{\lambda} (\lambda-1)(\lambda-2) r^{\lambda-3} \alpha_{\lambda-1} \right\} = 0 \quad (3.14') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} A_{\lambda-1+2n} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{(\lambda-1+2n+2m) k^{2m} r^{\lambda-2+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \\ & + \frac{D}{C} \sum_{\lambda} 4\lambda(\lambda-1) r^{\lambda-2} K_{\lambda} = 0 \quad (3.15') \end{aligned}$$

(1) 对称问题

在对称问题中, 展开式系数为 K_{λ} , M_{λ} , $A_{\lambda-1}$, 此时式(3.13')不包含上述三个未知数, 因此这三个未知数由式(3.14')、(3.15')确定, 它将保留一个独立未知数。

从(3.15')式得到以下关系:

$$\text{比较 } r^{\lambda-2} \text{ 阶系数: } A_{\lambda-1} = -\frac{D}{c} 4\lambda K_{\lambda} \quad (3.17)$$

令其余各阶系数为零,即

$$\sum_{j=0,1,\dots}^m \frac{A_{\lambda-1+2j} k^{2(m-j)}}{(m-j)! \varphi(\lambda-1+2j, m-j)} = 0$$

由此得 $A_{\lambda-1+2n}$ 的递推式:

$$\begin{aligned} A_{\lambda-1+2n} &= \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} A_{\lambda-1} \\ &= -\frac{4D\lambda}{c} \cdot \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} K_{\lambda} \end{aligned} \quad (3.18)$$

从(3.14')得以下关系:

$$\text{比较 } r^{\lambda-3} \text{ 阶系数: } A_{\lambda-1} = -\alpha_{\lambda-1} \quad (3.19)$$

式中 $\alpha_{\lambda-1}$ 是解析函数 $\Phi_{(x+iy)}$ 中的系数,若取

$$\alpha_{\lambda-1} = \frac{D}{c} 4\lambda K_{\lambda} \quad (3.20)$$

则当式(3.17),(3.18)被满足时,在式(3.14')中除 $r^{\lambda-1}$ 阶之外,其余各阶系数均为零. 由 $r^{\lambda-1}$ 阶给出以下关系:

$$-\lambda[(\lambda-1)K_{\lambda} + (\lambda+1)M_{\lambda}] + 2k^2 A_{\lambda-1} = 0$$

将 $k^2 = \frac{C}{2D(1-\nu)}$ 以及 $A_{\lambda-1} = -\frac{D}{c} 4\lambda K_{\lambda}$ 代入上式,得:

$$M_{\lambda} = -\frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} K_{\lambda} \quad (3.21)$$

(2) 反对称问题:

对于反对称问题,展开式系数为 L_{λ} , N_{λ} 和 $B_{\lambda-1}$, 此时式(3.14')、(3.15')不包含这三个系数,因此这三个系数将由式(3.13')确定,将保留两个独立未知数.

从(3.13')式得以下关系:

$$\text{比较 } r^{\lambda-3} \text{ 阶系数: } B_{\lambda-1} = \beta_{\lambda-1} \quad (3.22)$$

由于没有类似(3.17)式的关系存在,解析函数 $\Phi(x+iy)$ 中的系数 $\beta_{\lambda-1}$ 将是一个独立未知数. 从(3.5)式, $\beta_{\lambda-1}$ 可以表示为:

$$\beta_{\lambda-1} = \tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{D}{c} 4\lambda L_{\lambda} \quad (3.23)$$

仅当 $\lambda-1 \geq \frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_{\lambda-1} \neq 0$

若令

$$\sum_{j=0,1,\dots}^m (\lambda-1+2j) \frac{k^{2(m-j)} B_{\lambda-1+2j}}{(m-j)! \varphi(\lambda-1+2j, m-j)} = 0$$

以及

$$4\lambda L_{\lambda} - (1-\nu)\lambda(\lambda+1)(L_{\lambda} + N_{\lambda}) = 0$$

则方程(3.13')中 r 的各阶系数均为零, 于是式(3.13')便可获得满足. 由此得递推式:

$$\begin{aligned} B_{\lambda-1+2n} &= \frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} B_{\lambda-1} \\ &= \frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{D}{c} 4\lambda L_\lambda \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

以及
$$N_\lambda = \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} L_\lambda \quad (3.25)$$

2. 当 λ 为整数时

用同样的方法, 可以确定 λ 为整数时展开式系数之间的关系. 以下仅给出结果, 过程从略.

(1) 对称问题

$$A_{\lambda-1} = -\alpha_{\lambda-1} \quad (3.26)$$

$$\alpha_{\lambda-1} = \tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D}{c} \lambda K_\lambda \quad \left(\text{仅当 } \lambda-1 \geq \frac{1}{2}, \tilde{\alpha}_{\lambda-1} \neq c \right) \quad (3.27)$$

$$A_{\lambda-1+2n} = -\frac{(\lambda-1)(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n+1)} \left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D}{c} \lambda K_\lambda \right) \quad (3.28)$$

$$M_\lambda = \frac{4 - (\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} K_\lambda \quad (3.29)$$

(2) 反对称问题

$$B_{\lambda-1} = \frac{D}{c} 4\lambda L_\lambda \quad (3.30)$$

$$\beta_{\lambda-1} = \frac{D}{c} 4\lambda L_\lambda \quad (3.31)$$

$$B_{\lambda-1+2n} = \frac{4D\lambda}{c} \cdot \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} L_\lambda \quad (3.32)$$

$$N_\lambda = -\frac{4 + (\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} L_\lambda \quad (3.33)$$

在确定了展开式系数之间关系之后, 我们便求得既满足基本方程又满足裂纹面边界的一类解答. 但应该指出, 这并不是一个定解问题, 所获得的裂纹尖端应力应变场的函数表达式并不是唯一的^[4], 其独立未知数亦须由外边界条件加以确定. 由弹性力学的唯一性定理, 保证了最终解答的唯一性.

四、位移函数表达式和裂纹尖端应力应变场

将上节给出的展开式系数关系式(3.17)–(3.33)代入函数 F , f 的表达式(3.2)、(3.11)中, 便得到函数 F , f 精确到任意阶的表达式.

1. 当 λ 为半整数

$$\begin{aligned} j_0 &= \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[-\frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \sin(\lambda-1)\theta + \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\lambda-1)\theta \right] + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\frac{4D\lambda}{c} K_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \right) \left[\cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta \right] \Big\} \\
& + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[-\frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \sin(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \right. \\
& \times \left. \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \right) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\frac{4D\lambda}{c} K_\lambda [\sin(\lambda-1)\theta - \sin(\lambda+1)\theta] \right. \\
& + \left. \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \right) \left[\cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \cos(\lambda+1)\theta \right] \right\} \\
& + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[-\frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \sin(\lambda-1+2n)\theta \right. \\
& + \left. \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left(\tilde{\beta}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \right) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \left\{ K_\lambda \left[\cos(\lambda-1)\theta - \frac{4+(\lambda-1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \cos(\lambda+1)\theta \right] \right. \\
& + \left. L_\lambda \left[\sin(\lambda-1)\theta + \frac{4-(\lambda+1)(1-\nu)}{(\lambda+1)(1-\nu)} \sin(\lambda+1)\theta \right] \right\} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

2. 当 λ 为整数

$$\begin{aligned}
f_0 = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} \left[-\left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \right) \sin(\lambda-1)\theta + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \cos(\lambda-1)\theta \right] \\
& + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \right) \left[\sin(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta \right] \right. \\
& + \left. \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda [\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta] \right\} \\
& + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[-\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \right) \sin(\lambda-1+2n)\theta \right. \\
& + \left. \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = & \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{k^2}{\lambda} \left\{ -\left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \right) \left[\sin(\lambda-1)\theta \right. \right. \\
& - \left. \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sin(\lambda+1)\theta \right] + \frac{4D\lambda}{c} L_\lambda [\cos(\lambda-1)\theta - \cos(\lambda+1)\theta] \Big\} \\
& + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[-\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left(\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D\lambda}{c} K_\lambda \right) \sin(\lambda-1+2n)\theta \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{4D\lambda}{c} L_1 \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta \Big] \\ \times \frac{(-k^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{k^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \quad (4.5)$$

$$F = \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \left\{ K_{\lambda} \left[\cos(\lambda - 1)\theta + \frac{4 - (\lambda + 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \cos(\lambda + 1)\theta \right] \right. \\ \left. + L_{\lambda} \left[\sin(\lambda - 1)\theta - \frac{4 + (\lambda - 1)(1 - \nu)}{(\lambda + 1)(1 - \nu)} \sin(\lambda + 1)\theta \right] \right\} \quad (4.6)$$

将(4.1)~(4.6)式代入式(2.8), (2.18)~(2.24)中, 得到广义位移 ϕ_r, ϕ_{θ}, w 以及广义应力 $M_r, M_{\theta}, M_{r\theta}, Q_r, Q_{\theta}$ 的级数表达式。

五、计算实例

当获得裂纹尖端应力应变场表达式之后, 可将平面断裂问题分析中现有的一套计算方法推广到 Reissner 型板弯曲断裂分析中。文献[4, 8]仅就对称情况, 分别采用边界配置法和杂交法给出算例。本文用高阶奇异元, 对在对称和反对称情况下的有限尺寸板进行应力强度因子计算。

我们在裂纹尖端采用高阶奇异元, 其余区域采用 20 节点参数厚板单元^[13], 高阶奇异元截取裂纹尖端应力应变场展开式的前若干项作位移模式^[9]。

例 1 有限尺寸板受均匀弯矩作用

本文重复了文献[9]的工作。所不同的是奇异元位移模式阶数更高。计算表明两者仅相差 1~2%。这说明对于对称 I 型问题, 当 ϕ_x, ϕ_y 和 w 的位移模式取至 $O(r^{\frac{5}{2}})$ 阶时, 已获得良好结果。计算简图如图 2, 结果如图 3 所示。

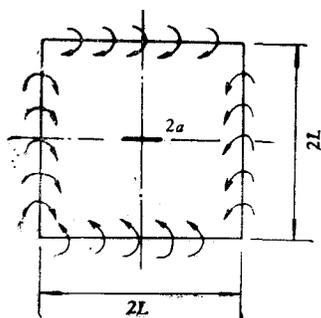


图 2

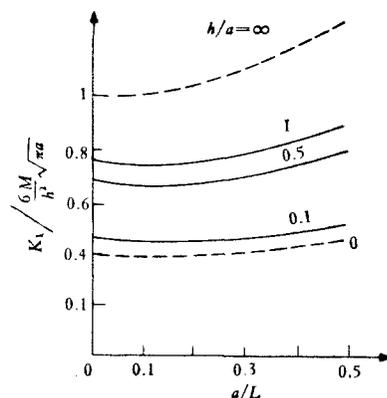


图 3

例 2 有限尺寸板受均匀扭矩

文献[10][11]曾用积分变换解过无限大板受均匀扭矩问题。但对于有限尺寸板, 至今还没有看到这个问题的解答。

当荷重为反对称时, 由于横向剪切变形的影响, 表征反对称弯曲的应力强度因子 K_{II}

和表征面外剪切变形的应力强度因子 K_{III} 同时存在。

计算简图与计算结果见图 4, 图 5. 从图 5 曲线外推 $a/L = 0$ 时结果, 这相当于无限大板的情况, 并与文献[11]的计算结果相符。

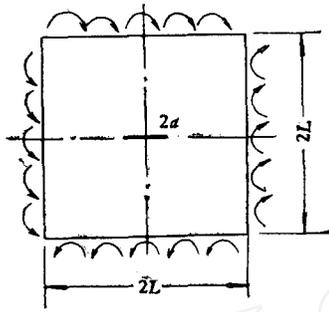


图 4

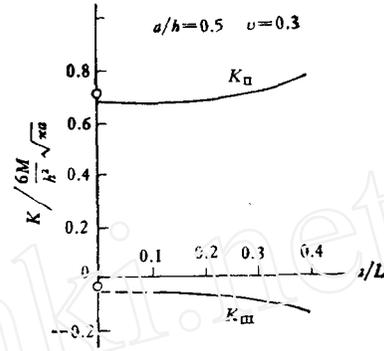


图 5

六、结 论

1. 与平面断裂问题的 Williams 展开式类似, 本文给出 Reissner 型板裂纹尖端应力应变场包括 I、II、III 型的一般解, 并可以达到任意阶的精度。

2. 本文指出, 在引入位移函数后的三广义位移平板理论基本方程^[12]仅适用于无裂纹板分析。在弯曲断裂问题中, 必须以本文给出的 (2.7)–(2.10) 式为研究出发点。

3. 本文探讨有限尺寸板受均匀扭矩作用时应力强度因子 K_{II} , K_{III} 随宽度比 a/L 的变化。随着 a/L 增大, 应力强度因子 K_{II} , K_{III} 亦同时增大。

4. 对于对称 I 型情况, ψ_x , ψ_y , w 的位移模式取至 $O(r^{\frac{5}{2}})$ 阶时可获良好结果, 对于复合型问题, 位移模式阶数可取得更高一些, 例如 $O(r^{\frac{7}{2}})$ 。

5. 奇异元最佳尺寸与位移模式阶数选择有密切关系。在本例中, 对于对称情况, 奇异元尺寸取 $0.1-0.4[a, h]_{\min}$, 对于反对称情况, 奇异元尺寸取 $0.04-0.06[a, h]_{\min}$. 其中 $[a, h]_{\min}$ 表示裂纹半长 a 与厚度 h 中的最小值。

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., On bending of elastic plates, *Quart. Appl. Math.*, 5 (1947), 55–68.
- [2] Knowles, J. K. and Wang, N. M., On the bending of an elastic plate containing a crack, *J. Math. and phys.* 39 (1960), 223–236.
- [3] Hartranft, R. J. and Sih, G. C., Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks, *J. Math. and phys.*, 47 (1968), 276–291.
- [4] Murthy, M. V. V., Raju, K. N. and Viswanath, S., On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory, "Fracture Mechanics in Engineering Application", ed. by Sih, G. C. and Valluri, S. Y. (1979), 763–766. or *Int. J. Fract.*, 17 (1981), 537–552.
- [5] 柳春图, Reissner 型中厚板在弯曲问题中裂纹尖端附近应力应变场, 第三届全国断裂力学会议论文摘要汇编(1981), 固体力学学报, 3(1983).
- [6] 余寿文, 杨卫, 考虑横向剪切变形时含裂纹平板的近渐分析, 固体力学学报 3 (1982).

- [7] Barsoum, R. S., A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 10 (1976), 551—564.
- [8] Rhee, H. C., Atluri, S. N., Hybrid stress finite element analysis of bending of a plate with a through flaw, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, 2 (1982), 259—261.
- [9] 李英治, 柳春图, *Reissner* 型板弯曲断裂问题分析, *力学学报* 4 (1983).
- [10] Wang, N. M., *J. Math. phys.* 47, 4 (1968), 371—390.
- [11] Delale, F. and Erdogan, F., The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading, *J. Appl. Mech.*, 46, 3 (1979).
- [12] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社 (1981).
- [13] Pryor, C. W. and Barker, R. M., Finite element bending analysis of Reissner plates, *J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE* 96, No. EM6 (1970), 967—983.
- [14] Liu Chun-tu, Li Ying-zhi, The Stress-Strain Fields at Crack tip and Stress intensity factors in Reissner's plate, ICF Symposium (1983), Beijing.

STRESS STRAIN FIELDS AT CRACK TIP AND STRESS INTENSITY FACTORS IN REISSNER'S PLATE

Liu Chuntu Li Yingzhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

By using Reissner's theory, a general solution for stress strain fields at crack tip including mode I, mode II and mode III is obtained. The expansions can serve as a basis for numerical calculations of SIF in bending cracked plates, by boundary collocation, variational method and asymptotic method.

In this paper by using the higher order finite element method, the stress intensity factors in finite size plates for symmetric and anti-symmetric cases are calculated. The solutions indicate that for the symmetric case, the size of special element should be taken as $0.1-0.4 [a, h]_{\min}$ where $[a, h]_{\min}$ is the smaller one between crack semilength "a" and thickness "h"; for anti-symmetric cases, it should be taken as $0.04-0.06 [a, h]_{\min}$.