

# 受压固、气两相介质一维膨胀运动

谈庆明 丁雁生 郑哲敏

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文讨论受压固、气两相介质向真空膨胀这一基本的非定常运动,用渐近法得到了早期和晚期自模拟解,在气体绝热指数为3的情形下用数值法得到了过渡期解。结果说明:三阶段的解互相衔接,连续过渡;质量及动量分布由稀到密的变化是急剧的;当自由面运动了大约50倍粒径后,运动基本上可以用晚期自模拟解描写。

## 一、引言

固、气两相系统受到爆炸、冲击或别的高压作用下,会引起急剧的膨胀运动。Glass<sup>[1]</sup>曾经用数值方法计算稀相固、气两相介质的非定常流动,但很少有人研究稠密相的情况。本文用坐标摄动法求得膨胀运动的早期渐近解和晚期渐近解,两者都具有自模拟的特征;用数值方法求得过渡期的运动解。当自由面的位移超过固相颗粒直径大约五十倍以后,数值解明显地逼近于自模拟的晚期渐近解。早期、过渡期和晚期三个阶段的解描述了膨胀运动的全过程。

## 二、问题的数学描述

讨论初始时刻处于高压状态的气固两相介质的一维平面膨胀运动。兹作下列假设:(1)两相介质由理想气体和刚性碎粒所组成;(2)起初介质处于静止受压状态,均匀分布于半无限空间 $x \leq 0$ 处,压力 $p$ 为 $p^0$ ,气相的体积分数 $\varepsilon$ 和密度 $\rho_g$ 各为 $\varepsilon^0$ 和 $\rho_g^0$ ,上标“0”表初态;固相的粒径和密度各为常值 $D_s$ 和 $\rho_s$ ;(3) $x > 0$ 的空间处于真空状态;(4)在 $t = 0$ 时刻,两相介质突然开始向真空膨胀;(5)参考绕流物体的阻力公式,作用于固相的单位体积稠密相的相间作用力 $f$ 可假设为

$$f = \frac{1 - \varepsilon}{D_s} c_f \rho_g |u_g - u_s| (u_g - u_s)$$

式中 $u_g$ 、 $u_s$ 各表气、固两相的速度, $c_f$ 为无量纲经验常数。

可以想见运动具有如下特征:一开始,从真空界面向介质内部发生一族中心稀疏波;在极早期,即当自由面的位移远小于粒径时,由于固相的惯性比气相大而起动慢,气相速度将大于固相,部分气相从固相所形成的构架内渗出而形成超前纯气相区;到了晚期,自由面的位移远大于粒径时,固相被加速而逐渐达到和气相相同的速度。

现取 $\frac{D_s}{c_f}$ 、 $\rho_g^0$ 、 $\sqrt{\frac{\gamma p^0}{\rho_g^0}}$ 作基本量。与推导变截面一维管流的基本方程类似,但要考虑

本文于1984年3月20日收到。

$\varepsilon$  既随空间变也随时间变的特点, 可导出下面六个无量纲的基本方程:

$$\text{气体质量守恒: } \rho_g \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_g + \varepsilon \left. \frac{d\rho_g}{dt} \right|_g + \varepsilon \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} = 0$$

$$\text{气体动量守恒: } \varepsilon \rho_g \left. \frac{du_g}{dt} \right|_g + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = -(1 - \varepsilon) \rho_g (u_g - u_s)^2$$

$$\text{气体能量守恒: } \varepsilon \rho_g \left. \frac{dc_g}{dt} \right|_g + p \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_g + \varepsilon p \frac{\partial u_g}{\partial x} = (1 - \varepsilon) \rho_g (u_g - u_s)^3$$

$$\text{气体状态方程: } p = (\gamma - 1) \rho_g c_g$$

$$\text{固体质量守恒: } \left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_s - (1 - \varepsilon) \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0$$

$$\text{固体动量守恒: } \rho_s \left. \frac{du_s}{dt} \right|_s + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_s (u_g - u_s)^2$$

方程中所有量均为无量纲量,  $p$ 、 $\rho$ 、 $c$  各表压力、密度、比内能,  $\gamma$  为多方指数, 下标  $g$ 、 $s$  各表气相和固相。

一旦给定初始条件和边界条件, 即可求解。

### 三、早期渐近解

在极早期, 介质位移远比粒径小, 运动基本上取决于  $\frac{x}{t}$ , 改用新变量  $\xi$ 、 $\eta$  替代  $x$ 、 $t$

更为方便:  $\xi = x$ ,  $\eta = \frac{x}{t}$ . 于是运动方程组变为

$$\text{气体质量守恒: } \left[ u_g \frac{\partial \varepsilon \rho_g}{\partial \xi} + \varepsilon \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial \xi} \right] + \frac{\eta}{\xi} \left[ (u_g - \eta) \frac{\partial \varepsilon \rho_g}{\partial \eta} + \varepsilon \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial \eta} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{气体动量守恒: } & \left[ \rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] + \frac{\eta}{\xi} \left[ \rho_g (u_g - \eta) \frac{\partial u_g}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] \\ & = -\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \rho_g (u_g - u_s)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{气体能量守恒: } & \left[ \frac{\varepsilon u_g}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon p u_g}{(\gamma - 1) \rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial \xi} + p \frac{\partial \varepsilon u_g}{\partial \xi} \right] \\ & + \frac{\eta}{\xi} \left[ \frac{\varepsilon}{\gamma - 1} (u_g - \eta) \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon p}{(\gamma - 1) \rho_g} (u_g - \eta) \right. \\ & \left. \times \frac{\partial \rho_g}{\partial \eta} + p (u_g - \eta) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + \varepsilon p \frac{\partial u_g}{\partial \eta} \right] \\ & = (1 - \varepsilon) \rho_g (u_g - u_s)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{固体质量守恒: } & \left[ u_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - (1 - \varepsilon) \frac{\partial u_s}{\partial \xi} \right] \\ & + \frac{\eta}{\xi} \left[ (u_s - \eta) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} - (1 - \varepsilon) \frac{\partial u_s}{\partial \eta} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{固体动量守恒: } & \left[ \rho_s u_s \frac{\partial u_s}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] + \frac{\eta}{\xi} \left[ \rho_s (u_s - \eta) \frac{\partial u_s}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] \\ & = \rho_s (u_g - u_s)^2 \end{aligned}$$

早期的渐近解可采用  $\xi$  的幂级数形式, 即任一物理量  $F$  可展成  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\eta)\xi^n$ , 其中系数  $F_n(\eta)$  是  $\eta$  的函数. 将渐近展开式代入方程组, 比较  $\xi^n (n=0, 1, 2, \dots)$  的系数, 可得到  $F_n(\eta)$  所满足的方程. 列出由  $\xi^0$  的系数所导得的常微分方程, 即可求出零阶渐近解  $F_0(\eta)$ . 采用状态量  $p_0$  作自变量比较方便, 于是零阶解满足下列方程组:

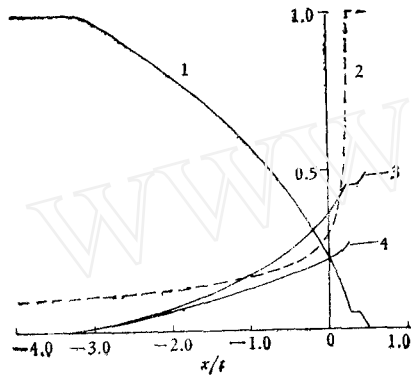


图 1 早期渐近解

1— $\rho_g$  2— $\varepsilon$  3— $u_g$  4— $u_s$

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_0}{dp_0} = -\frac{1-\varepsilon_0}{\rho_s(\eta-u_{g0})^2} \\ \frac{du_{g0}}{dp_0} = \frac{1}{\rho_s(\eta-u_{g0})} \\ \frac{du_{s0}}{dp_0} = \frac{1}{\rho_s(\eta-u_{g0})} \\ \frac{d\rho_{g0}}{dp_0} = \frac{1}{\rho_{g0}(\eta-u_{g0})} \\ \frac{d\rho_{s0}}{dp_0} = \frac{1}{(\eta-u_{g0})^2} + \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho_{g0}}{\rho_s} \cdot \frac{1}{(\eta-u_{g0})^2} \\ \eta = u_{s0} - \sqrt{\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{\rho_{g0}}{\rho_s \rho_{g0} - \gamma p_0} \frac{\gamma p_0}{(\eta-u_{g0})^2}} \end{cases}$$

其中最后一个代数方程是保证求得非平凡解的必要条件. 一旦给定初始值, 即可用数值积分求出零阶解.

下面计算  $\gamma = 3$  的气体和固体颗粒组成的两相介质的运动. 引进变量  $c = \sqrt{\frac{p}{\rho_g}}$  以代替  $p$ . 假设初始时刻, 两相密度相等, 即有  $\rho_g^0 = \rho_s = c^0 = 1$ , 而体积分数  $\varepsilon^0 = 0.1$ . 为方便计以下均省写下标“0”, 但仍理解为零阶解. 图 1 给出诸物理量随  $\frac{x}{t}$  的变化曲线.

从计算结果可以看出, 稀疏波的波阵面以等速向深部推进 ( $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^0}}$ ), 从波阵面到自由面,  $\eta$  连续增加, 压力连续下降, 体积分数连续上升. 当  $\eta$  增加到某值  $\eta_*$  时, 即是两相区的边缘, 相应的气相速度和密度各为  $u_{g*}$  和  $\rho_{g*}$  (例中  $\eta_* = 0.278$ ,  $u_{g*} = 0.458$ ,  $\rho_{g*} = c_* = 0.0465$ ). 当  $\eta$  超过  $\eta_*$  直到自由面处, 即是纯气相区, 可见气相运动超前于固相, 部分气体从两相区渗出. 纯气相区内运动服从自模规律, 即在  $\eta_* \leq \eta \leq u_{g*} + c_*$  区内, 有

$$\begin{cases} u_g = \frac{\eta}{2} + \frac{u_{g*} + c_*}{2} \\ \rho_g = c = -\frac{\eta}{2} + \frac{u_{g*} + c_*}{2} \\ p = \rho_g^{\gamma} \end{cases}$$

#### 四、晚期渐近解

从动量守恒方程诸项的量级可看出: 到运动晚期, 方程左端诸项均按  $o(\xi^{-1})$  趋近于零, 导致方程右端的作用力项  $f$  也应按  $o(\xi^{-1})$  趋近于零. 所以晚期渐近解可展成  $\xi^{-\frac{n}{2}}$  的幂级数, 即任一物理量  $F$  可展为  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\eta)\xi^{-\frac{n}{2}}$ .

将渐近展开式代入方程组, 比较  $\xi^0$  项系数, 给出

$$u_{g0} = u_{s0}$$

这说明零阶解中两相同速, 可把两相介质看成是无相间作用力的同速混相介质, 故零阶解是自模的。这里, 改用质量分数  $\sigma$  以代替用  $\varepsilon$  更为方便。下面均省写表示零阶解的下标“0”。

混相的密度和比内能各为

$$\rho = \frac{1}{\frac{\sigma}{\rho_g} + \frac{1-\sigma}{\rho_s}}, \quad e = \sigma e_g + (1-\sigma)e_s$$

其中  $\sigma$  可假设为常数(关于这一假设, 下面的第六节中会进一步讨论)。我们假设气相和固相分别服从  $p = (\gamma - 1)\rho_g e_g$  和  $e_s = \text{Const}$ , 所以混相状态方程和绝热关系可分别写为

$$p = (\gamma - 1)\rho_s \frac{\rho[e - (1-\sigma)e_s]}{(\sigma - 1)\rho + \rho_s}$$

$$p = p_0 \left[ \frac{\rho_s}{(1-\sigma)\rho^0} - 1 \right]^\gamma \cdot \left[ \frac{\rho}{\frac{\rho_s}{1-\sigma} - \rho} \right]^\gamma$$

混相声速  $c_m$  满足

$$c_m^2 = \frac{\gamma\rho_s}{1-\sigma} p^0 \left[ \frac{\rho_s}{(1-\sigma)\rho^0} - 1 \right]^\gamma \cdot \frac{\rho^{\gamma-1}}{\left[ \frac{\rho_s}{1-\sigma} - \rho \right]^{\gamma+1}}$$

由于零阶解是自模的, 所以膨胀是由一族中心左行波所引起的, 于是特征线方程和相应的特征关系为

$$dx/dt = u - c_m, \quad du = -(c_m/\rho)d\rho$$

若气体的比热比  $\gamma$  等于 3, 利用稀疏波波头上的未扰条件  $u = 0, \rho = \rho^0, p = p^0$ , 可得到如下解式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{1-\sigma-\frac{\rho_s}{\rho_0}}{(1-\sigma)\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{\rho_s}{\rho_0}} \right]^3 \\ \frac{u}{u_{\max}} &= \frac{b}{\rho^0} \left[ 1 - \frac{\frac{b}{\rho_0}-1}{\frac{b}{\rho_0}-\frac{\rho}{\rho_0}} \right] \\ \eta &= u - c_m \end{aligned} \right\}$$

其中

$$\rho^0 = \frac{1}{\frac{\sigma}{\rho_g^0} + \frac{1-\sigma}{\rho_s}}, \quad b = \frac{\rho_s}{1-\sigma},$$

$$u_{\max} = \frac{\rho^0}{\frac{\rho_s}{1-\sigma} - \rho^0} \sqrt{\gamma \rho^0 \left[ \frac{\rho_s}{(1-\sigma)\rho^0} - 1 \right]^3 \cdot \frac{1-\sigma}{\rho_s}}, \quad u_{\max}$$

乃是自由面上达到的最大速度。上述解式乃是以  $\rho$  为参量的诸物理量的零阶分布。图 2 给出  $\sigma = 0.1$  以及  $\rho^0 = \rho^s = 1$  的条件下诸量的分布曲线。

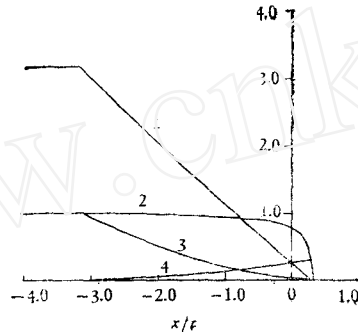


图 2 晚期渐近解

1— $c_m$  2— $\rho$  3— $p$  4— $u$

## 五、过渡期的数值解

求过渡期的解要借助数值方法。本节仍讨论气相成分是  $\gamma = 3$  的气体的情况。可以把微分方程写成下面的向量形式,即

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{U} = 0$$

其中三个列向量各为

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \varepsilon \rho_g \\ 1 - \varepsilon \\ \varepsilon \rho_g u_g + (1 - \varepsilon) u_s \\ u_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon \rho_g u_g \\ (1 - \varepsilon) u_s \\ \varepsilon \rho_g u_g^2 + (1 - \varepsilon) u_s^2 + \frac{\rho_g^3}{3} \\ \frac{u_s^2}{2} + \frac{\rho_s^3}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_g (u_g - u_s)^2 \end{pmatrix}$$

### 1. 初始条件

初始条件本该是: 当  $t = 0$ , 有  $\varepsilon = \varepsilon^0 = 0.1$ ,  $u_g = u_s = 0$ ,  $\rho_g = 1$ 。但考虑到运动在极早期是自模的, 为提高计算精度可取早期渐近自模解作为数值求解的初始条件。确切地说, 可取运动开始后不久的某一时刻作为初始时刻, 由该时刻自模解给出诸物理量的分布。

### 2. 差分格式

下面分别给出两相区内点、气相区内点以及这两区的界面点的差分格式。至于气相区

的外边界,即自由面以及两相区的内边界,即未扰区的声速线可按常规方法描述和处理。

### (1) 两相内点

设已知  $t^n$  时刻  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{W}$  的空间分布  $\mathbf{U}^n$ 、 $\mathbf{V}^n$ 、 $\mathbf{W}^n$ , 由向量方程  $\partial \mathbf{W}/\partial t + \partial \mathbf{V}/\partial x + \mathbf{U} = 0$  可求  $t^{n+1}(=t^n + \Delta t)$  时刻的  $\mathbf{W}$  分布  $\mathbf{W}^{n+1}$ 。

我们采用 Mac Cormack<sup>[2]</sup> 的差分格式,它是二阶精度的预估——校正两步格式,即

$$\begin{cases} \mathbf{W}^{\bar{n}+1} = \mathbf{W}^n - (\partial \mathbf{V}/\partial x)^n \Delta t - \mathbf{U}^n \Delta t \\ \mathbf{W}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}^n + \mathbf{W}^{\bar{n}+1}) - (\Delta t/2) (\partial \mathbf{V}/\partial x)^{\bar{n}+1} - (\Delta t/2) \mathbf{U}^{\bar{n}+1} \end{cases}$$

需要说明, Mac Cormack 所处理的方程并不包括第三项  $\mathbf{U}$ , 这里对  $\mathbf{U}$  的处理形式是我们拟定的。

上述公式中的  $\partial \mathbf{V}/\partial x$  可取向前或向后两种差商近似。由于本问题中流区的右边界外是真空,扰动是左行波,故采取下列向前——向后格式,即

$$\begin{cases} \mathbf{W}_i^{\bar{n}+1} = \mathbf{W}_i^n - (\Delta t/\Delta x)(\mathbf{V}_{i+1}^n - \mathbf{V}_i^n) - \mathbf{U}_i^n \Delta t \\ \mathbf{W}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_i^n + \mathbf{W}_i^{\bar{n}+1}) - (\Delta t/2\Delta x)(\mathbf{V}_i^{\bar{n}+1} - \mathbf{V}_{i-1}^{\bar{n}+1}) - (\Delta t/2) \mathbf{U}_i^{\bar{n}+1} \end{cases}$$

### (2) 气相内点

在纯气相区,记

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho_g \\ \rho_g u_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho_g u_g \\ \rho_g u_g^2 + \frac{1}{3} \rho_g^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则方程仍为  $\partial \mathbf{W}/\partial t + \partial \mathbf{V}/\partial x + \mathbf{U} = 0$ , 差分格式取与两相内点相同的形式。

### (3) 两相区和气相区交界面的差分格式

我们采用特征线方法,得到了较高的精度。从基本方程出发可推得如下的近似的特征线方程及相应的特征关系:

当  $dx/dt = u_s$  时,有

$$\begin{cases} du_s/dt = \rho_g(u_g - u_s)^2 - \rho_g^2(\partial \rho_g/\partial x) \\ d\varepsilon/dt = (1 - \varepsilon)\partial u_s/\partial x \end{cases}$$

当  $dx/dt = u_g \mp c$  时,有

$$\begin{aligned} -\frac{du_g}{dt} \pm \frac{dc}{dt} &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left\{ (u_g - u_s)^2 + \frac{c^2}{(u_g - u_s \mp c)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \frac{du_s}{dt} + \rho_g \frac{2\partial \rho_g}{\partial x} - \rho_g (u_g - u_s)^2 \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\rho_g}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \left( \frac{c}{u_g - u_s \mp c} \pm 1 \right) \end{aligned}$$

要指出,这里因为  $p = \rho_g^3$ , 而  $c = \sqrt{\frac{p}{\rho_g}}$ , 故  $c = \rho_g$ 。

一般认为边界差分格式的精度可以比内点低一阶。因此沿特征线方向的时间导数可以近似表为一阶差商,而在  $x_s$  处的  $\frac{\partial \rho_g}{\partial x}$  和  $\frac{\partial u_s}{\partial x}$  值均取向后差商计算之。如图 3, 已知  $x_1^n$ 、

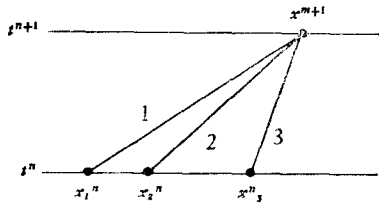


图 3 特征线示意图

1— $dx/dt = u_g + c$ , 2— $dx/dt = u_g - c$ , 3— $dx/dt = u_g$

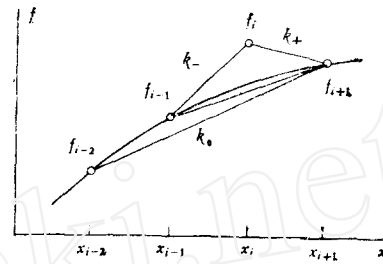


图 4 “光顺”措施示意图

$x_2^n$ 、 $x_3^n$  处的值, 利用三特征线上的四个特征关系可求得  $x^{n+1}$  处的  $\varepsilon^{n+1}$ 、 $\rho_g^{n+1}$ 、 $u_g^{n+1}$  和  $u_s^{n+1}$ 。

### 3. 数值振荡及处理

计算过程中出现了三类数值振荡。第一类发生在两相区内邻近两相区和气相区的交界面处, 该处  $\varepsilon$  变化急剧, 采取了足够小的空间步长  $\Delta x$  后, 解决了问题。第二类发生在纯气相区内  $\partial V/\partial x$  变化急剧处, 用特征线法代替差分法解决了问题。

在两相区内靠近  $x = 0$  的地方发生了第三类数值振荡, 估计振荡可能和所用格式有关。

李荫藩建议用反扩散的措施消除在采用 Mac Cormack 差分格式时产生的振荡。我们采用 Жмакин 和 Фурсенко<sup>[3]</sup> (1980) 给出的方法, 振荡不但未被抑制反而变得更严重。实质上, 他们的方法是以一条水平线为基准, 把因振荡而偏离水平线的计算点拉回水平线。我们改用当时的平均分布曲线为基准, 当振荡超过指定的允许值, 即将偏离的计算点拉回到平均分布上来。这是一种“光顺”处理。

具体做法如下。当函数  $f$  在某结点  $x_i$  处偏离了正常值(图 4)。过  $(x_{i-2}, f_{i-2})$  和  $(x_{i+1}, f_{i+1})$  连一直线作为基准, 记其斜率为  $k_0$ 。类似地, 记  $i$  和  $i-1$  两点连线的斜率为  $k_-$ ,  $i$  和  $i+1$  两点连线的斜率为  $k_+$ 。当  $(k_+ - k_0) \cdot (k_- - k_0) < 0$  时, 用下式进行修正而得修正值  $\bar{f}(x_i)$ :

$$\bar{f}(x_i) = f_i - s \left( f_i - \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2} \right)$$

系数  $s$  的取值范围是:  $0.05 \leq s \leq 0.125$ 。根据不同情况调整  $s$  值, 从而成功地抑制了振荡。应当说明, 这种“光顺”处理并不需要在每一时间步都采用, 整个计算过程中只在局部点用了有限次。

## 六、计算结果及其讨论

因为三、四两节已给出了早、晚期渐近解, 故本节先给出数值计算的结果, 并对全部解答作适当的分析和讨论。

图 5(a)–(d) 给出四个不同时刻的  $u_g$ 、 $u_s$ 、 $\varepsilon$ 、 $\rho_g$  的空间分布。图 5(e) 给出三个特征截面的运动轨迹。由图可见, 扰动前沿以速度  $1/\sqrt{\varepsilon^0}$  向静止区传播, 超前气体前沿(即

自由面) 向真空膨胀的速度约为  $\frac{1}{2}$ , 固相颗粒向右膨胀的前沿(即超前气体区和两相区的界面)的速度约为 0.277—0.3.

图 6 给出数值计算初始时刻与最后时刻 ( $t = 107.1$ ) 两相混合密度及质量分数随  $x/t$  变化的曲线.

这里再次说明, 图中各量均是无量纲的, 无量纲化所用的三个基本特征量是长度  $D_s/c_f$ 、密度  $\rho_g^0$  和速度  $c^0 (= \sqrt{\gamma p_t^0 / \rho_g^0})$ .

下面我们将就物理量的空间分布随时间的变化, 两相介质的抛出量, 运动的自模拟性等几个方面进行分析和讨论.

### 1. 物理量的空间分布

从静止区到自由面, 气相密度  $\rho_g$  单调下降, 孔隙率  $\varepsilon$ 、气相速度  $u_g$  和固相速度  $u_s$  单调上升; 各处均有  $u_g \geq u_s$ , 而速度差  $u_g - u_s$  也单调上升. 这里所表现出来的两相的运动差异完全可以由它们的惯性差异作出解释, 各处均由气相带动固相又受固相的阻滞.

超前气体的质量和动量与受扰动的两相介质总质量和总动量的比值是一个小量. 根据早期自模拟解, 在极早期, 质量比和动量比各约为 1.4% 及 3.3%; 而当时间到了 107.1, 两者下降到各约为 0.5% 及 0.9%; 以后则继续下降. 可见, 这两个数值并不大, 在某些问题中, 超前气体所起的实际作用也是可以忽略的. 如果化到有量纲系统, 若取  $c_f$  等于 1,  $t = 107.1$  这时的自由面已运动了 53.55 倍粒径的距离.

扰动区内的质量分布在超前气体区内可以直接用气相密度  $\rho_g$  分布来描写; 在两相区内可以下式定义的介质密度  $\rho$  的分布来描写, 即有

$$\rho = \varepsilon \rho_g + (1 - \varepsilon) \rho_s$$

可见, 密度在未扰区为 1, 在  $x = 0$  处为 0.7—0.8, 而在  $x = 0$  到固相前沿截面之间的区域内, 密度的变化比较急剧, 在前沿截面处降到 0.04—0.05, 在气相区内密度则更小了. 这说明作膨胀运动的介质的质量分布大体上可分为前稀后密两个区, 而从稀变密的过渡是相当急剧的 (参见图 6).

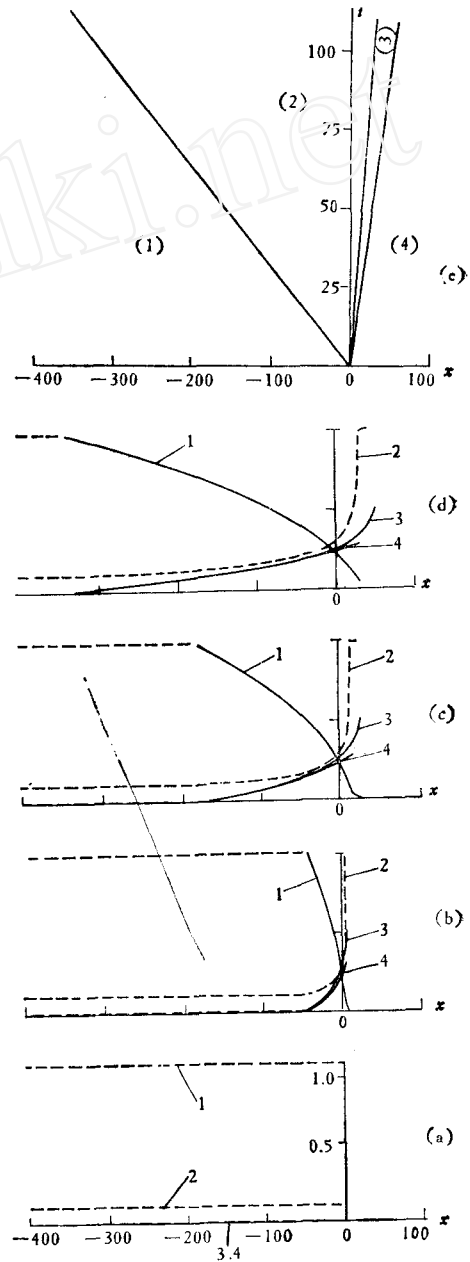


图 5 数值解诸量的空间分布  $\rho_{at}-x$  图  
1— $\rho_g$ , 2— $\varepsilon$ , 3— $u_g$ , 4— $u_s$   
(a)  $t = 0$ , (b)  $t = 12.9$ , (c)  $t = 56.5$ , (d)  $t = 107.1$ , (e)  $t-x$  图; (1) 未扰动区, (2) 两相流动区, (3) 超前气体区, (4) 真空区.



### 2. 运动的自模拟性

图 7 给出在早期、 $t = 107.1$  的过渡期及晚期  $u_g, u_s, \varepsilon$  和  $\rho_g$  随  $x/t$  变化的曲线。图 8 给出了两个组合量  $(1 - \varepsilon)u_s + \varepsilon\rho_g u_g$  及  $(1 - \varepsilon)u_s^2 + \varepsilon\rho_g u_g^2 + (1/3)\rho_g^3$  在早期和  $t = 107.1$  两个时刻随  $x/t$  变化的曲线。这两个量具有一定的物理意义，前者代表两相介质的质量流，后者代表冲量流。

由图可见，在两相区内，不同时刻的  $\varepsilon, \rho_g, (1 - \varepsilon)u_s + \varepsilon\rho_g u_g$  及  $(1 - \varepsilon)u_s^2 + \varepsilon\rho_g u_g^2 + (1/3)\rho_g^3$  四个量几乎各自重合成一条曲线。而  $u_g$  和  $u_s$  的早期解与晚期解不重合，随时间增长， $u_g$  渐降而

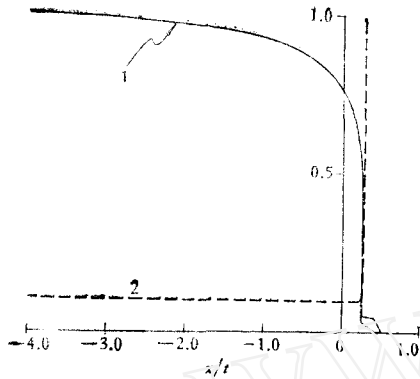


图 6 数值解的密度及质量分数分布  
1——混相密度  $\rho$ ; 2——质量分数  $\sigma$

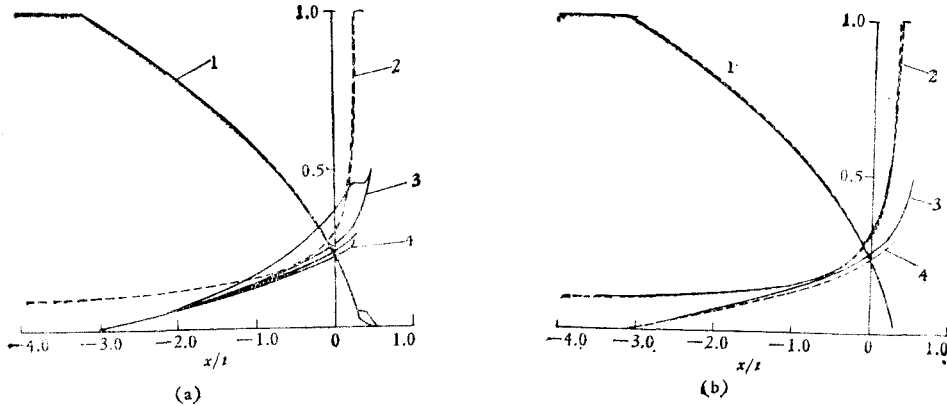


图 7 诸物理量随  $x/t$  的分布  
(a) 早期渐近解与  $t = 107.1$  的过渡期数值解 (b)  $t = 107.1$  的过渡期数值解与晚期渐近解  
1—— $\rho_g$ ; 2—— $\varepsilon$ ; 3—— $u_g$ ; 4—— $u_s$

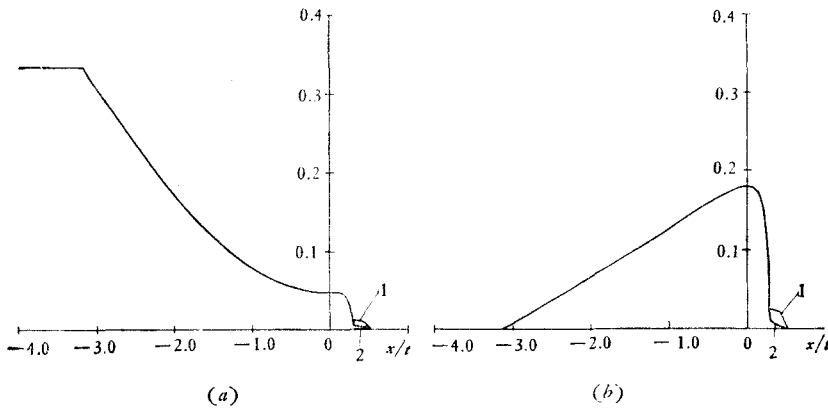


图 8 质量流与冲量流随  $x/t$  的分布  
(a)  $(1 - \varepsilon)u_s^2 + \varepsilon\rho_g u_g^2 + (1/3)\rho_g^3$  (b)  $(1 - \varepsilon)u_s + \varepsilon\rho_g u_g$   
1—— $t = 0.04$ ; 2—— $t = 107.1$

$u_s$  渐升, 两者均逼近晚期渐近解.

从图 7、8 看, 在两相区内, 过渡期数值解的  $\varepsilon$ 、 $\rho_g$ 、 $(1 - \varepsilon)u_s + \varepsilon\rho_g u_g$  和  $(1 - \varepsilon)u_s^2 + \varepsilon\rho_g u_g^2 + (1/3)\rho_g^3$  在两相区与极早期解、晚期解都非常接近, 基本遵从同样的自模拟规律;  $u_g$  及  $u_s$  则明显偏离自模拟解. 在  $t = 0.04$  时,  $(u_g - u_s)/u_g \approx 0.4$ , 到了  $t = 107.1$  时,  $(u_g - u_s)/u_g \approx 0.1$ ; 而晚期解有  $u_g = u_s = u$ , 恰好介于数值解的  $u_g$  与  $u_s$  之间, 这时固相前沿移动了约 30 倍粒径的距离. 由此可知, 过渡期的持续时间很短, 估计当  $t \geq 10^2$ , 便可认为两相流已渐近达到晚期解所表示的状态. 至于过渡期各量的空间分布, 在缺乏作数值计算的条件时, 也可以近似地采用晚期解作初步估计, 只是速度的误差要大一些.

### 3. 两相介质的抛出量

计算两相介质自初始界面位置  $x = 0$  处的抛出量有一定实用意义. 数值结果表明, 在  $x = 0$  处单位面积抛出质量  $M$  与抛出动量  $D$  都随时间  $t$  线性增长. 根据上面关于自模拟性的讨论, 可以近似认为在  $x = 0$  处  $\varepsilon$ 、 $\rho_g$ 、 $(1 - \varepsilon)u_s + \varepsilon\rho_g u_g$  及  $(1 - \varepsilon)u_s^2 + \varepsilon\rho_g u_g^2 + (1/3)\rho_g^3$  均为常量, 其表达式可由晚期渐近解确定, 于是可推导出  $x = 0$  处抛出量的有量纲表达式, 即为

$$\begin{cases} M = \frac{\sqrt{\varepsilon^0}}{(1 + \sqrt{\varepsilon^0})^2} \sqrt{\gamma \rho^0 \rho_g^0} t \\ D = \frac{\varepsilon^0}{(1 + \sqrt{\varepsilon^0})^3} \cdot \gamma \rho^0 t \end{cases}$$

当  $\varepsilon^0 = 0.1$  时,  $M = 0.18 \sqrt{\gamma \rho^0 \rho_g^0} t$ ,  $D = 0.044 \gamma \rho^0 t$ .

### 4. 关于“光顺”措施及质量分数为常数的近似假设的合理性

我们把早期自模拟解当作数值计算的初始值. 计算结果表明: 随着时间的增长, 运动恰好逼近用摄动法求得的晚期自模拟解. 数值法和解析法, 殊途同归, 互相印证了数值解 (包括对数值振荡所采取的措施) 和晚期解 (包括质量分数为常数的假设) 是合理可靠的.

在求晚期渐近解时我们曾采用了质量分数  $\sigma = \frac{\varepsilon \rho_g}{1 - \varepsilon + \varepsilon \rho_g} = \text{Const}$  的近似条件. 现在考察数值计算得到的  $\sigma$  分布的实际情况. 图 6 中虚线是数值计算的  $\sigma$  分布.  $t = 0.04$  时  $\sigma$  在固相前沿附近稍稍偏离  $\sigma = \varepsilon^0 = 0.1$ ;  $t = 107.1$  时的数值结果, 与  $\sigma = \varepsilon^0 = 0.1$  几乎重合. 这说明在膨胀全过程中  $\sigma$  等于常数都不失为很好的近似.

在数值计算中, 为消除  $x = 0$  附近的数值振荡, 采用了所谓“光顺”措施. 它是否能保证数值解收敛于原方程的解, 并没有给出证明; 但是, 数值解逐渐趋近晚期自模拟解这个事实说明了“光顺”措施是可行的.

## 七、结 论

1. 求得了早期渐近解. 早期的膨胀运动是自模的, 气相速度大于固相速度, 并在两相区前出现一个超前气相区, 超前气体的质量和动量均是少量.
2. 求得了过渡期的数值解. 气相加速固相而又被阻滞, 两相速度渐趋一致, 最终趋于

一个极限状态。在这期间,超前气体量占运动介质总量的比值进一步减少,质量的空间分布基本可分为前稀后密两区而其过渡相当急剧。

3. 求得了晚期渐近解,它是自模的,且正是过渡期数值解的极限,此时两相趋于同速。
4. 为消除格式产生的数值振荡,给出了一种可行的光顺措施。

李荫藩同志介绍了消除数值振荡的方法,李红军、王小好同志参加了部分计算工作。上机时得到林如山、刘德金、王侗等同志的热情支持,特致谢意。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Miura, H., and Glass, I. I., On a dusty-gas shock tube, UTIAS Report No. 250, CN ISSN 0082-5255, May, (1981).
- [ 2 ] MacCormack, R. W., and Baldwin, B. S., A numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock-boundary layer interactions, AIAA Paper No. 75-1 (1975).
- [ 3 ] Жмакин, А. И. и Фрсенко, А. А., Ободной монотонной разностной схема сквозного счета, Ж В. М. М. Ф., 20, 4, (1980).

## ONE-DIMENSIONAL EXPANSION OF A PRESSURIZED SOLIDGAS TWO PHASE MEDIUM

Tan Qingming Ding Yansheng Zheng Zhemin  
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

The expansion of a pressurized gas-solid two phase medium to vacuum—an elementary phenomenon of explosion is discussed. Early and late stage selfsimilar solutions are obtained by asymptotic method and numerical solution in the intermediate stage is obtained. The results indicate that the transfer of the solution from stage to stage is smooth, the density change from low to dense is quite sharp in spatial distribution, and after the free surface has moved over a distance of about 50 times of particle diameter, the flow pattern is well described by the late stage selfsimilar solution.