

## 等参数奇异元周围的过渡单元和普通单元

吴永礼 徐纪林

(中国科学院力学研究所)

文献[1, 2]证明了在等参数奇异元周围的过渡元中, 应变除了具有 $r^{-1/2}$ 奇异项以外, 还有 $r^{-1}$ 的奇异项, 因此认为采用过渡元并不能提高应力强度因子的计算精度。本文证明, 在等参数奇异元外面的普通梯形等参数单元中, 应变同样具有 $r^{-1}$ 的奇异项, 但是并没有 $r^{-1/2}$ 的奇异项; 然后对文献[1, 2]中的数值结果进行了分析。分析表明, 在大多数情况下, 采用过渡元要比不采用过渡元好。

### 一、普通梯形放射状单元的应变场

如果直边四边形单元的一组对边是在从原点出发的射线上, 而另外两条直边平行(图1, 2), 则这种单元称为梯形放射状单元。取裂纹顶端为坐标原点。

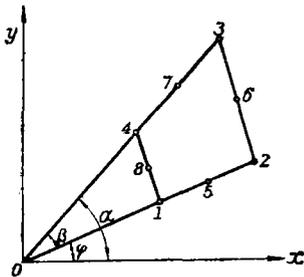


图 1

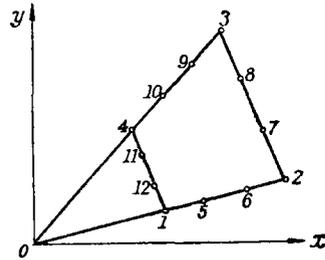


图 2

对于 8 节点的四边形等参数单元, 其形状函数为:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi) + (1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) & (i = 1, 2, 3, 4); \\
 N_i &= (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)/2 & (i = 5, 7); \\
 N_i &= (1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)/2 & (i = 6, 8), \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中 $\xi_i, \eta_i$ 为各节点在 $\xi, \eta$ 中的局部坐标值。文献[3, 4]已经证明, 在图 1 这种梯形放射状单元中, 若取节点 5, 7 的坐标满足

$$r_5 = \left( \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{2} \right)^2; \quad r_7 = \left( \frac{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4}}{2} \right)^2, \quad (2)$$

而节点 6, 8 仍取在中点, 则在这种单元中应变具有 $r^{-1/2}$ 项, 满足裂纹顶点周围的应变分布奇异性要求, 所以能够计算得到较精确的应力强度因子, 并把这种单元叫做过渡单元。在文献[1, 2]中则证明在过渡元中应变除了具有 $r^{-1/2}$ 奇异项以外, 还有 $r^{-1}$ 奇

异项。

可以证明,在普通的梯形放射状单元中,应变也具有 $r^{-1}$ 项,只是系数表达式不同。

对于普通的梯形放射状单元,节点5—8均取在边中点。而

$$\begin{aligned} x_5 &= (x_1 + x_2)/2; & x_6 &= (x_2 + x_3)/2; & x_7 &= (x_3 + x_4)/2; & x_8 &= (x_1 + x_4)/2; \\ y_5 &= (y_1 + y_2)/2; & y_6 &= (y_2 + y_3)/2; & y_7 &= (y_3 + y_4)/2; & y_8 &= (y_1 + y_4)/2. \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)代入坐标转换公式  $x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i$  以后,可以证明:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} + \frac{2[(1-k)\text{tg}\theta + k\text{tg}\alpha - \text{tg}\varphi]}{(x_2 - x_1)k(\text{tg}\alpha - \text{tg}\varphi)} \cos\theta \cdot r, \\ \eta &= \frac{k\text{tg}\alpha + \text{tg}\varphi - (k+1)\text{tg}\theta}{(k-1)\text{tg}\theta - k\text{tg}\alpha + \text{tg}\varphi}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $k = x_4/x_1 = x_3/x_2$ ;  $\varphi, \alpha$  见图1。

将式(4)代入位移插值公式,即得单元中的位移分布:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i = g_1(\theta, u_1, u_2, \dots, u_8) + g_2(\theta, u_1, u_2, \dots, u_8)r + g_3(\theta, u_1, u_2, \dots, u_8)r^2; \\ v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i = h_1(\theta, v_1, v_2, \dots, v_8) + h_2(\theta, v_1, v_2, \dots, v_8)r + h_3(\theta, v_1, v_2, \dots, v_8)r^2, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $g_1-g_3, h_1-h_3$  是坐标  $\theta$  及节点位移的函数。

这时单元中的应变极坐标分量

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) = G_1 + G_2 r; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) = H_1 r^{-1} + H_2 + H_3 r; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \\ &= I_1 r^{-1} + I_2 + I_3 r, \end{aligned}$$

其中  $G_1, G_2, H_1-H_3, I_1-I_3$  是坐标  $\theta$  和节点位移的函数。由于表达式比较繁冗,这里仅仅给出  $\varepsilon_\theta$  表达式中  $r^{-1}$  的系数  $H_1$ ,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2k(\text{tg}\alpha - \text{tg}\varphi)}{[(k-1)\text{tg}\theta - k\text{tg}\alpha + \text{tg}\varphi]^2 \cos^2\theta} \left\{ \left[ (-u_1 - u_4 + 2u_8) \frac{x_2}{x_2 - x_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (u_2 + u_3 - 2u_6) \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right] \eta \sin\theta + \left[ (v_1 + v_4 - 2v_8) \frac{x_2}{x_2 - x_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (v_2 + v_3 - 2v_6) \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right] \eta \cos\theta + \left[ (u_1 - u_4) \frac{x_2(x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)^2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (u_2 - u_3) \frac{x_1(x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)^2} - 2(u_5 - u_7) \frac{x_1 x_2}{(x_2 - x_1)^2} \Big] \sin \theta \\
& + \left[ (-v_1 + v_4) \frac{x_2(x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)^2} - (v_2 - v_3) \frac{x_1(x_1 + x_2)}{2(x_2 - x_1)^2} \right. \\
& \left. + 2(v_5 - v_7) \frac{x_1 x_2}{(x_2 - x_1)^2} \right] \cos \theta \Big\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

由此可以看出普通梯形放射状单元中的应变 $\varepsilon_\theta$ 也具有 $r^{-1}$ 项,式(7)与文献[2]中过渡元的表达式相似,而文献[2]中只是以 $\sqrt{x_1}$ ,  $\sqrt{x_2}$ 代替了式(7)中 $x_1$ ,  $x_2$ . 同样 $\varepsilon_r$ 的 $r^{-1}$ 奇异项也与文献[2]中过渡元的表达式相似.

对于图2所示的12节点四边形梯形放射状等参数单元,在文献[3,5]中给出了作为过渡元时的节点坐标公式:

$$\begin{aligned}
r_5 &= \left( \frac{\sqrt{r_1} + 2\sqrt{r_2}}{3} \right)^2, \quad r_6 = \left( \frac{2\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}{3} \right)^2, \\
r_{10} &= \left( \frac{\sqrt{r_4} + 2\sqrt{r_3}}{3} \right)^2, \quad r_9 = \left( \frac{2\sqrt{r_4} + \sqrt{r_3}}{3} \right)^2. \quad (8)
\end{aligned}$$

节点7, 8, 11, 12则取三分之一分点位置. 文献[1]证明: 在这种过渡元中应变除了具有 $r^{-1/2}$ 项外, 也有 $r^{-1}$ 奇异项.

现在对普通12节点梯形放射状等参数单元的节点5—12都取三分之一分点位置, 将这样的普通元节点坐标式, 例如 $x_5 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$ ,  $x_6 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$ , ... 代入坐标转换公式, 可以证明式(4)仍旧成立. 于是根据位移插值公式有:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{12} N_i u_i = g_1 + g_2 r + g_3 r^2 + g_4 r^3, \\
v &= \sum_{i=1}^{12} N_i v_i = h_1 + h_2 r + h_3 r^2 + h_4 r^3. \quad (9)
\end{aligned}$$

单元中应变的极坐标分量为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= G_1 + G_2 r + G_3 r^2, \\
\varepsilon_\theta &= H_1 r^{-1} + H_2 + H_3 r + H_4 r^2, \\
\varepsilon_{r\theta} &= I_1 r^{-1} + I_2 + I_3 r + I_4 r^2, \quad (10)
\end{aligned}$$

式(9), (10)中的 $g_i$ ,  $h_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$ ,  $I_i$ 均为 $\theta$ 和节点位移的函数, 由式(10)可以看出应变 $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_{r\theta}$ 也有 $r^{-1}$ 奇异项.

## 二、数值分析与讨论

上面已经证明, 在8节点和12节点的普通梯形放射状单元中, 应变也具有 $r^{-1}$ 的奇异项, 因此文献[2]认为由于过渡元中应变有 $r^{-1}$ 项而采用过渡元计算应力强度因子, 会使计算精度下降的看法在理论上是不能成立的. 文献[3—5]中给出的一些实例, 说明采用过渡元来计算应力强度因子要比不采用过渡元好, 只有在少数情况下, 二者的结果才相近.

下面我们对文献[1, 2]中的数值结果作一些分析. 文献[1]用12节点普通梯形放

射状等参数元和12节点梯形过渡元计算了双边裂纹平板受均匀拉伸时的应力强度因子。计算中采用了9种网格。对于这个问题尚未找到精确解，文献[6]对双边裂纹平板在均匀拉伸下的应力强度因子列出了5个近似公式。文献[1]引用文献[6]中的第5个近似公式算得的 $K_I=2.8155$ 公斤/厘米<sup>3/2</sup>作为比较，计算的相对误差 $\Delta_1$ 列于表1,2中，由此文献[1]认为仅仅当 $b/c$ 大于或等于20，即过渡元尺寸比裂纹顶端单元尺寸大20倍时，采用过渡元才能提高计算精度。我们根据文献[6]中与上述近似公式精度相同的第4个公式算得的 $K_I=2.7651$ 公斤/厘米<sup>3/2</sup>，两个公式的平均值为 $K_I=2.7903$ 公斤/厘米<sup>3/2</sup>。以这两个值作为参考值来比较，相对误差记为 $\Delta_2, \Delta_3$ ，也列于表1,2中。可以看出无论哪一个值作为参考值，总的来说，还是采用过渡元的计算结果误差要小，最大不超过

表1  $K_I$ 单位：公斤/厘米<sup>3/2</sup>

网 格 <sup>[1]</sup>			无过渡元 时的 $K_I$ <sup>[1]</sup>	相 对 误 差 %			有过渡元 时的 $K_I$ <sup>[1]</sup>	相 对 误 差 %		
$\rho$	b/c	a/b		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
0.005	4	10	2.8808	2.31	4.18	3.24	2.8736	2.06	3.92	2.99
	10	4	2.8376	0.78	2.62	1.70	2.7831	-1.16	0.65	-0.26
	20	2	2.9863	6.06	8.00	7.02	2.7851	-1.09	0.72	-0.19
0.010	4	5	2.7986	-0.61	1.21	0.30	2.7926	-0.82	0.99	0.08
	10	2	2.8334	0.63	2.47	1.54	2.7813	-1.22	0.59	-0.32

注：a为裂纹长度；c为裂纹顶端奇异元尺寸；b-c为过渡元尺寸； $\rho=c/9$ 。

表2  $K_I$ 单位：公斤/厘米<sup>3/2</sup>

网 格 <sup>[1]</sup>		无过渡元 时的 $K_I$ <sup>[1]</sup>	相 对 误 差 %			有过渡元 时的 $K_I$ <sup>[1]</sup>	相 对 误 差 %		
$\rho$	a/c		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$		$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
0.005	40	3.3250	18.09	20.2500	19.16	2.7658	-1.77	0.0250	2.99
0.010	20	2.9630	5.23	7.1570	6.19	2.7654	-1.79	0.0108	-0.26
0.020	10	2.8115	-0.15	1.6780	0.76	2.7650	-1.80	-0.0036	-0.19
0.040	5	2.7632	-1.86	-0.0687	-0.97	2.6550	-5.71	-3.980	-4.85

注：a为裂纹长度；c为裂纹顶端奇异元尺寸；过渡元尺寸为a-c。

表3  $K_I$ 单位：公斤/厘米<sup>3/2</sup>

裂纹顶端除奇异 元外的单元形式	2×2高斯积分点			3×3高斯积分点			文献[2]中5种网格的 $K_I$ 计算结果				
	$K_I$	相关系数	相对误差 %	$K_I$	相关系数	相对误差 %	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
8节点梯形过渡元	1.1907	0.99972	0.14	1.1781	0.99987	-0.92	1.1273	1.1787	1.1798	1.1780	1.1809
8节点普通梯形元	1.1948	0.99748	0.49	1.1801	0.99521	-0.75	1.1935	1.1810	1.1803	1.1802	1.1859
任意四边形元	1.1915	0.99979	0.21	1.1795	0.99962	-0.80					

6%，而且网格变化对计算的结果影响也不大。如果不采用过渡元，则不同网格的计算结果分散性很大，最大误差达到20%。

文献[2]对裂纹顶端奇异元外采用8节点普通梯形放射状等参单元和8节点梯形过渡元，计算了含有中心裂纹的正方形平板在单向拉伸情况下的应力强度因子，裂纹长度只有板宽的1%，无限大板的解析解 $K_I = 1.18899$ 公斤/厘米<sup>3/2</sup>可看作这个问题的精确解，文献[2]中给出了用5种不同网格计算的结果(表3)，对于后4种网格，采用过渡元与否， $K_I$ 的计算结果与精确解的相对误差均小于1%，但是不采用过渡元的 $K_I-r$

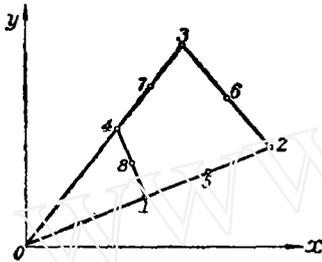


图 3

曲线呈现出较大的“波动”，而对于第一种网格文献[2]中采用过渡元的计算结果有些异常，我们采用同样的网格，对具有8节点梯形过渡元，8节点普通梯形元和任意四边形单元(图3)分别进行了计算，用5点回归分析的结果列于表3中，可以看出本文的结果与文献[2]中后4种网格的结果很接近，所以本文计算结果是可信的，由于在本例题中，采用了较多的单元数和节点数，上述3种不同单元均

得到较高的精度，很难说那一种单元好。然而正如文献[2]中所说，采用过渡元后， $K_I-r$ 的曲线比较平顺，因此，所得的裂纹面上的位移分布更接近于真实情况。

### 三 结 论

过渡元与普通元相比，由于单元应变中增加了 $r^{-1/2}$ 奇异项，因此更能反映裂纹周围的位移及应变分布情况，而绝大多数情况下采用过渡元能够求得误差较小的应力强度因子数值，而不采用过渡元则需要有较多的单元和节点才能得到较精确的应力强度因子。

### 参 考 文 献

- [1] Hussain, M.A., Vasilakis, J.D., and Pu, S.L., Quadratic and Cubic Transition Elements. *Inter. Jour. Numer. Methods in Eng.* Vol.17, 1981.
- [2] 张彦秋, 关于用有限元法计算缝端应力强度因子的“过渡单元”. *水利学报*, 1982年第11期.
- [3] Wang Kejen (王克仁), Hsu Chilin (徐纪林) and Kao Hua (高桦), Calculation of Stress Intensity Factors for Combined Mode Bend Specimens, *Advanced in Research on the Strength and Fracture of Materials. ICF4*, Vol.4, 1977.
- [4] Lynn, P.P., and Ingraffee, A.R., Transition Elements to be used with Quarter-point Crack-tip Elements. *Inter. Jour. Numer. Methods in Eng.*, No.12, 1978.
- [5] 徐纪林、吴永礼, 计算应力强度因子的奇异等参数单元. *固体力学学报*, 1983年第2期.
- [6] Tada, H., Paris, and Irwin, G., *The stress Analysis of Cracks Handbook*. 1973.