

# 等离子体电弧炉中的传热问题 和一个设计原则\*

荣 壁

(中国科学院力学研究所, 1983年7月30日收到)

## 摘 要

本文在供给电弧能量一定的条件下, 建立了等离子体电弧炉二维传热模型, 其传热系数可以随温度而变化. 经过一些函数变换并采用分离变量法, 给出了气体热流势和等离子体电弧炉传热效率 $\eta$ 的分析表达式. 最后本文还给出了传热效率 $\eta$ 关于电弧与熔炼物间无量纲距离 $r_0$ 和另一个无量纲量 $1/Q$  (以下详细说明) 的简单的线性关系. 它提供了一个电弧设计原则.

## 一、前 言

等离子体电弧炉是一种新型电炉, 在炉内电极间气体部分电离, 形成稳定的直流或交流等离子体电弧, 弧心温度高达几千度至一百度. 在冶金工业中应用等离子体电弧炉产生的高温熔炼难熔的金属或非金属氧化物如  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{MoS}_2$  等. 在等离子体电弧炉中熔炼物可以不是电极, 因此它可以用于熔炼电的不良导体.

供给电弧的电功率由电弧柱性质研究给出<sup>[1~3]</sup>. 本文在给定电弧能量 (或单位时间电弧发出热量 $Q^*$ ) 的前提下, 分析了二维传热问题, 其简化模型如图1. 气体传热系数 $K(T)$ 是温度 $T$ 的已知函数. 引进热流势使非线性的传热方程线性化. 经过两次函数变换去掉了传热方程右边的 $\delta$ 函数, 边界条件变成齐次的. 最后用分离变量法得到了热流势以及传热效率的分析表达式. 当电弧与熔炼物间的无量纲距离 $r_0 = r_0^*/R < 0.4$ 时, 本文给出了传热效率 $\eta$ 与 $r_0$ 和另一个无量纲量 $1/Q$ 之间的简单线性关系. 实际电弧炉设计要求传热效率 $\eta$ 尽可能高. 根据本文给出的简单线性关系可以进行电弧炉的最佳设计.

## 二、数 学 模 型

等离子体电弧炉中通有  $\text{H}_2$  或  $\text{Ar}$  等放电气体, 炉的底部存放熔炼物, 在它上方的电极间形成电弧. 炉壁由耐火砖组成, 其简化的数学模型如图1. 炉膛为半圆柱型, 其半径为 $R$ , 轴

\* 黄教推荐.

向尺度远远大于半径, 故忽略轴向热传导。没有热源的二维传热方程为:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* K(T) \frac{\partial T}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{K(T)}{r^*} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0$$

选取极坐标  $(r^*, \theta)$  如图1。现在电弧供给热量, 电弧的半径与炉半径相比是很小的, 可忽略电弧半径。电弧位于点  $M_0(r_0^*, 0)$ , 单位时间单位长度放出热量为  $q_0$ 。在传热方程中热源

电弧可用  $\delta$  函数与  $q_0$  乘积表示,  $\delta$  函数有如下性质:

$$\iint_{\Omega} \delta(r^* - r_0^*, \theta) r^* dr^* d\theta = \begin{cases} 1 & M_0 \in \Omega \\ 0 & M_0 \notin \Omega \end{cases}$$

以  $R$  为特征长度,  $r^*$  无量纲化后可写成:

$$\iint_{\Omega} \delta(r - r_0, \theta) r dr d\theta = \begin{cases} 1 & M_0' \in \Omega' \\ 0 & M_0' \notin \Omega' \end{cases}$$

其中  $r = r^*/R$ ,  $r_0 = r_0^*/R$ ,  $M_0'$  坐标为  $(r_0, 0)$ 。

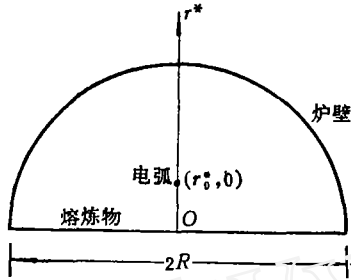


图1 电弧炉简化模型

根据福利叶传热定律, 有热源的二维传热方程为:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* K(T) \frac{\partial T}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{K(T)}{r^*} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = -q_0 \delta(r^* - r_0^*, \theta) \quad (2.1)$$

$$(r^* < R, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$$

其中  $T(r^*, \theta)$ ,  $K(T)$  分别为气体温度和随温度而变化的传热系数。设冷却炉壁温度为  $T_1$ , 溶炼物液面温度分布为  $T_2(r^*)$ 。考虑两种  $T_2(r^*)$  分布。第一种是  $T_2 = \text{常量}$ , 它表示熔炼物传热系数与气体传热系数  $K$  相比为无穷大,  $T_2$  为熔炼物的熔点。第二种分布是沿  $|\theta| = \pi/2$  液面, 温度  $T_2$  随  $r^*$  线性变化。则边界条件可写成

$$T = T_1, r^* = R$$

$$T = T_2(r^*) = T_{00} \text{ 或 } T_2 = T_0 - (T_0 - T_1)r^*/R, |\theta| = \frac{\pi}{2}$$

其中  $T_0$  为  $r^* = 0$  处温度,  $T_{00}$  为熔炼物的熔点。本文将在后面说明它是实际情况的较好近似。引入热流势  $S$ , 它是比热流量的势函数, 即

$$dS = K(T) dT$$

这样可使非线性方程 (2.1) 线性化。由于热流势的绝对大小是无意义的, 可取冷却壁处热流势为零。在熔炼物熔化液面  $|\theta| = \pi/2$  处, 热流势为  $S_2(r^*)$ , 在  $r^* = 0$  处热流势为  $S_0$ 。为了更清楚地说明电弧炉内部传热规律, 我们采用以下无量纲变量和参量:

$$r = r^*/R, U = S/S_0, Q_0 = q_0/S_0, E(r) = S_2/S_0, r_0 = r_0^*/R$$

则非线性传热方程 (2.1) 无量纲化后变成线性方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -Q_0 \delta(r - r_0, \theta) \quad (2.2)$$

无量纲边界条件是:

$$U|_{r=1} = 0 \quad (2.3)$$

$$U|_{\theta=\pm\pi/2} = 1 \quad (2.4)$$

$$U|_{\theta=\pm\pi/2} = E(r) = \begin{cases} 1 \\ 1-r \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$(2.5b)$$

### 三、解法及结果

分两种情形考虑:

1. 熔炼物液面热流势恒定即(2.5a)式, 求炉内热流势分布.

分三步解偏微分方程边值问题(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5a). 第一步: 为了克服方程(2.2)中右边 $\delta$ 函数引起的复杂性, 我们找到方程(2.2)的特解:

$$U_0 = -\frac{Q_0}{4\pi} \lg(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta) \equiv -\frac{Q}{2} \lg(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta) \quad (3.1)$$

其中  $Q = \frac{Q_0}{2\pi}$ , 以下使用的物理量均指无量纲量. 利用  $U_0$ , 引入函数

$$g = \frac{U - U_0}{Q} \quad (3.2)$$

以函数  $g$  代替  $U$ , 得到关于  $g$  的双调和方程并带有非齐次边界条件. 第二步引进函数

$$H(r, \theta) = g - f_2(r) \quad (3.3)$$

其中  $f_2(r) = \frac{1}{2} \lg(r^2 + r_0^2) + \frac{1}{Q}$

则非齐次边界条件变为齐次边界条件, 关于  $H$  的边值问题:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} f_2(r) \right) \quad (3.4)$$

$$H|_{r=1} = f_1(\theta) - \frac{1}{Q} - \frac{1}{2} \lg(1 + r_0^2) \quad (3.5)$$

$$H \Big|_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} = 0 \quad (3.6)$$

$$H|_{r=0} = 0 \quad (3.7)$$

它比原边值问题简化了. 第三步我们采用分离变量法解边值问题(3.4)~(3.7), 其固有函数系为  $\{\cos(2m+1)\theta\}$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . 将函数  $H, f_1, f_2$  对该固有函数系展开

$$\left. \begin{aligned} H(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m(r) \cos[(2m+1)\theta] & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ f_1(\theta) &= \frac{1}{2} \lg(1 + r_0^2 - 2r_0 \cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos[(2m+1)\theta] \\ f_2(r) &= f_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos[(2m+1)\theta] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[(2m+1)\theta] d\theta = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

$$d_m = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2m+1} [(-1)^m \lg(1+r_0^2) - L_m]$$

$$L_m = \int_0^{\pi/2} \frac{2r_0 \sin \theta \cdot \sin[(2m+1)\theta]}{1+r_0^2-2r_0 \cos \theta} d\theta \quad m \geq 0$$

积分 $L_m$ 用递推方法逐步积分. 将函数 $H(r, \theta)$ 展开式(3.8)代入(3.4)~(3.7)式, 不难解出

$$H_m(r) = -\frac{a_m}{Q} r^{2m+1} + Z_{0m} - Z_{im}, \quad i=1, 2, \quad m \geq 1 \quad (3.9)$$

$$H_0(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \left[ \left(1 - \frac{2}{Q} - L_0\right) r + \left(\frac{r}{r_0} - r r_0\right) + \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r}\right) \operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{r_0} - 1 \right] \quad (3.10)$$

其中

$$Z_{0m} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{2m+1} \left\{ L_m r^{2m+1} + (r r_0)^{2m+1} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{r_0} + \frac{(-1)^m}{2m+1} (1-r^2 \pi^2) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} r_0^{2(m-k)} r^{2m+1} \right\} \quad m \geq 1$$

$$Z_{1m} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2m+1} \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m+1} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{r_0} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{r_0}\right) \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(m-k)} - r_0^{2k+1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m+1} \right] \right. \\ \left. - \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(k-m)} \right\} \quad \frac{r}{r_0} \leq 1$$

$$Z_{2m} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2m+1} \left\{ -\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2m+1} \operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{r_0} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2(m-k)} \right. \\ \left. + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[ r_0^{2k-2m} r^{2k+1} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k-2m} \right] \right\} \quad \frac{r}{r_0} > 1$$

利用函数变换(3.2)和(3.3)及函数 $H$ 的展开式, 得到第一种边界条件下热流势的表达式

$$U = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{2m+1} \cos[(2m+1)\theta] + Q \left\{ \frac{1}{2} \lg \left( \frac{r^2 + r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \theta} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \cos \theta \left[ -1 + (1 - L_0) r + \left(\frac{r}{r_0} - r r_0\right) \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{r_0} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r}\right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (Z_{0m} - Z_{im}) \cos[(2m+1)\theta] \right] \right\} \quad (3.11)$$

当 $r/r_0 \leq 1$ 时 $Z_{im}$ 中 $i=1$ , 当 $r/r_0 > 1$ 时 $Z_{im}$ 中 $i=2$ . 利用(3.11)式寻求传热效率 $\eta$ 会出现一些数学上的麻烦. 我们进一步分析边界条件(2.5b)情形.

2. 熔炼物熔化液面温度线性变化即(2.5b)求热流势分布. 用 $V$ 表示这种边界条件下

相应的热流势。用第一种情况中解法、得到

$$V = U - r - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{r - (2m+1)^2 r^{2m+1}}{2m \cdot 2(m+1)} \cos \left[ (2m+1)\theta \right] + \frac{a_0}{2} r (\lg r + 2) \cos \theta \quad (3.12)$$

其中 $U$ 由(3.11)式给出。

分别计算两种边界条件下得到的热流势表达式(3.11)和(3.12), 结果绘于图4。它说明对于相同的 $r, \theta$ 值, 除去 $|\theta| < \pi/2 - \pi/10, r > 3/4$ 小区域之外,  $U$ 和 $V$ 是很相近的。这意味着两种边界条件(2.5a)和(2.5b)不影响 $U, V$ 。实际上在边界 $|\theta| = \pi/2$ 上, 温度或热流势分布是光滑函数, 像图2中曲线那样, 在 $r=0$ 和 $r=1, \theta = \pm\pi/2$ 处热流势有水平切线, 实际曲线应夹在直线 $U=1$ 与直线 $U=1-r$ 之间, 因此热流势表达式(3.12)是实际热流势分布的较好近似。其典型的等热流势线分布如图3。

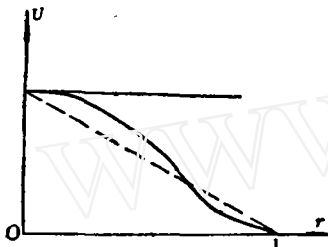


图2 熔炼物液面热流势分布

定义等离子体电弧炉的传热效率

$$\eta = \frac{Q_1^*}{Q^*} = 1 - \frac{Q_2^*}{Q^*} \quad (3.13)$$

其中 $Q^*, Q_1^*, Q_2^*$ 分别表单位时间内电弧放出的总热量, 电弧传给熔炼物的热量以及从冷却壁散失的热量。并且有

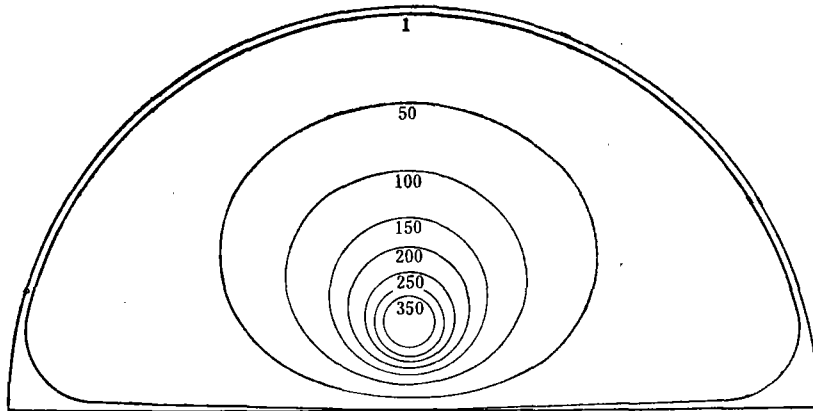


图3 等热流势线分布( $Q=200, r_0=0.2$ )

$$Q_2^* = \frac{\int_0^{\pi/2} -\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta}{\pi Q} \quad (3.14)$$

将(3.12)式代入(3.14)式和(3.13)式, 得到等离子体电弧炉的传热效率

$$\eta = 1 - P(r_0) - \frac{D}{Q} \equiv 1 - P(r_0^*/R) - \frac{2\pi S_0 D}{a_0} \quad (3.15)$$

其中:

$$P(r_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1+r_0}{1-r_0} - \frac{1}{4(1+r_0^2)} + \frac{4}{\pi^2} \operatorname{tg}^{-1} r_0 \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{r_0} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m L_m}{2m+1}$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \frac{r_0}{1+r_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m r_0^{2m+1}}{(2m+1)^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+1} (4m-2k+1) r_0^{2(m-k)}}{(2k+1)(2m+1)^2} \quad (3.16)$$

$$D = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(m+1)} = \text{常数} \quad (3.17)$$

(3.15)式表明传热效率 $\eta$ 仅由无量纲量 $r_0$ 和 $Q$ 决定, 即 $\eta$ 仅与 $r_0^*$ 与 $R$ 比值有关, 与它们的绝对大小无关,  $\eta$ 与电弧放出的热量 $q_0$ 和原点热流势 $S_0$ 的比值有关, 与它们的绝对大小无关.

将(3.15)式对 $r_0$ 作泰勒展开( $r_0 < 1$ ), 取 $r_0$ 的一次项得到 $\eta$ 的简单的线性表达式

$$\eta = 1 - \frac{4}{\pi} r_0 - \frac{D}{Q} \quad r_0 < 0.4 \quad (3.18)$$

(3.18) 式中心传热效率是 $r_0$ 与 $1/Q$ 的线性函数. 当 $r_0 < 0.4$ 时(3.18)式有足够的准确度.

对于不同的 $Q$ 值, 按公式(3.15)和(3.18)计算的传热效率 $\eta$ , 结果如图 5. 图中三条实线由表达式(3.18)求得, 符号“点”, “圈”和“三角”由更准确的表达式(3.15)得到. 从图5可以看出, 简单的(3.18)式的结果与复杂的(3.15)式的结果很相近. 我们从(3.18)式得出有重要意义的推论: 当 $r_0 < 0.4$ 时, 传热效率 $\eta$ 随着 $r_0$ 的降低而线性增长. 这意味着随着电弧与熔炼物间的距离减小, 有更多的热量传给熔炼物, 较少的热量由炉壁散失. 传热效率 $\eta$ 随着 $1/Q$ 的减小而线性增大. 当 $Q$ 值增大到一定值如 $Q=10$ 以后, (3.18)式中含 $1/Q$ 的一项近于零.  $Q$ 值再增大,  $\eta$ 变化很小, 趋向于饱和值 $\eta = 1 - 4r_0/\pi$ . 在通常情况下,  $Q > 5$ , 所以 $\eta$ 值接近于

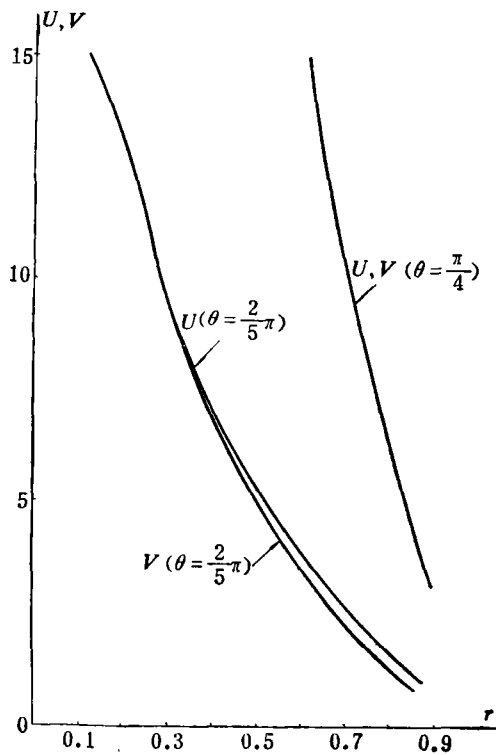


图 4 两种边界条件下热流势分布

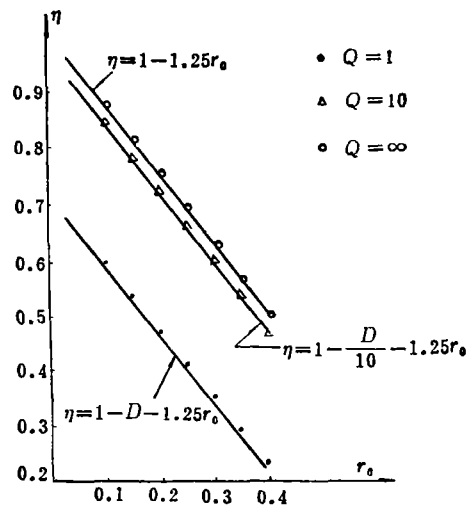


图 5 传热效率 $\eta$ 随 $Q, r_0$ 变化曲线

$1 - 4r_0/\pi$ .

为了更直观理解上述公式, 我们回到有量纲量来看一个实例: 若炉壁温度 $T_1 = 2000^\circ\text{C}$ , 熔炼物为 $\text{MoS}_2$ , 其熔点温度为 $3000^\circ\text{C}$ , 电弧每秒发出100千焦耳热量即 $Q^* = 100\text{kJ/sec}$ , 炉

半径 $R=1\text{m}$ , 炉中通有氩气Ar, 那么 $Q=100$ , 电弧设在 $r_0^*=0.1\text{m}$ 处, 由 $\eta$ 的表达式(3.18)和(3.15)都得到 $\eta\approx 0.88$ . 当电弧位置升高到 $r_0^*=0.4\text{m}$ 时,  $\eta=0.52$ . 若电弧放热 $Q^*=200\text{kJ/sec}$ 时, 相应 $Q=200$ , 此时 $D/Q$ 很小,  $\eta$ 随 $Q$ 值变化不大. 从上例及公式(3.18)的分析, 我们可以得出, 无量纲的热量 $Q$ 对传热效率 $\eta$ 影响不大, 而电弧与熔炼物之间的无量纲距离 $r_0$ 对传热效率 $\eta$ 影响显著. 为了提高等离子体电弧炉的传热效率必须减小 $r_0$ , 缩短电弧与熔炼物间的距离, 对电弧功率不必苛求. 但是 $r_0$ 是有限制的,  $r_0$ 过小, 电弧与较冷的熔炼物间距离过近, 电弧会因不稳定而中断. 总之按本文分析, 如果只计及电弧的稳定性和传热效率两个主要因素, 电弧以放在使电弧能够稳定放电的与熔炼物距离最近的位置为好.

徐复教授曾对本文给予热情指导和帮助, 黄敦教授给予可贵的指导, 在此表示感谢.

### 参 考 文 献

- [1] 荣陞, 轴向热传导对交流电弧性质的影响, 力学学报, 6(1981).
- [2] 荣陞, 交流电弧外回路对弧柱特性影响, 力学学报, 5(1982).
- [3] Phillips, R. L., The behavior of dynamic electric arcs, ARL(1964), 64—150.
- [4] 复旦大学数学系编, 《数学物理方程》, 上海科技出版社(1961).

## On the Heat Conduction Problems and a Design Principle for Plasma Arc Furnace

Rong Sheng

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

### Abstract

In this paper a plane heat conduction problem with variable coefficient of heat conductivity  $K(T)$  is analysed with given electric power supplied to the plasma arc. The governing equation for unknown temperature distribution is a nonlinear one with a  $\delta$  function as its nonhomogeneous term. To make the problem tractable by the method of separation of variables, a set of transformation of governing equation is introduced. An explicit simple formula is found for the efficiency of the furnace  $\eta$ .  $\eta$  depends linearly on  $r_0$ , the nondimensional distance between the arc and surface of melted material, as well as on another nondimensional quantity  $Q$ , we described the above in detail in the paper. This relationship holds for  $r_0 < 0.4$ , and gives a good guidance for the design of furnace.