第14卷 第4期 力学进展 Vol. 14 No. 4
1984年11月25日 ADVANCES IN MECHANICS Nov. 25, 1984

复合材料多层板壳有限元研究现状

中国科学院力学研究所 刘国玺 王震鸣

复合材料常常以多层板、多层壳（夹层板和夹层壳可以看作多层板和多层壳的特例）的结构形式承载。复合材料板壳结构具有如下的特点：

1．非均质性 首先，就每一层来说，都由两种或两种以上的材料构成，因而是非均质的。其次，不同层的纤维取向、纤维含量、厚度，甚至纤维种类和树脂种类都可能不同，因而不同的层更是非均质的。我们通常称前者为层内非均质性，后者为呈层性。

2．各向异性 虽然树脂是各向同性的，但是，由于纤维是按一定的方向排列的，所以复合材料的强度性能刚度性能都具有方向性，即各向异性。另外，有些纤维（例如碳纤维）本身也是各向异性的。每一层复合材料都是各向异性的，而不同层的各向异性情况又可能是不同的。

层内非均质性的影响是微观力学的研究对象。在结构分析中，都采用宏观力学的方法进行研究，在层内做了均匀化处理，即把每一层都看作是均质的各向异性材料，其等效弹性常数既可以用实验方法测得，也可以用理论分析的方法得到。但是，对于不同层之间的非均质性即呈层性，却不宜再做这样的均匀化处理。换言之，呈层性是多层板壳分析中必须加以考虑的一个问题。

复合材料板壳结构的呈层性和各向异性，给分析工作带来了很大的困难。对于各向同性均质材料的单层板壳，只有在某些特殊的几何形状、特殊的边界条件和特殊的载荷情况下才有分析解。对于复合材料多层板壳，这种特殊情况更少。所以，用有限元方法求解复合材料多层板壳问题就是十分必要的。计算机技术的迅速发展，给有限元方法的应用提供了可能性。

近十多年来，各向同性均质材料单层板壳的有限元方法有了很大的发展，但复合材料多层板壳有限元方面的文献资料却不多。复合材料多层板壳的固有困难，特别是呈层性带来的困难，不仅反映在理论分析上，也反映在有限元的构成上。本文打算对目前能见到的若干文献加以评述，作为开展此项研究工作的出发点，供有关人员参考。

当然，从原则上说，采用一般的各向异性三维单元完全可以解决呈层性带来的困难。但这实际上很难实现。复合材料多层板壳的层数一般有十几层甚至百余层之多，从厚度方向上来看，至少每一层都要划分出一个单元。如果在中面上划分的网格也比较密，那么所需的计算机内存将是非常庞大的。如果中面的网格划分得比较稀，则每个三维单元就都成了薄片

状，这会使最后求得的总体刚度矩阵出现很高的病态，给求解带来困难。所以，还是要靠复合材料多层板壳单元自身来克服呈层性带来的困难，直接使用三维单元的想法是不大现实的。

复合材料的横向剪切模量（即沿板壳厚度方向的剪切模量）相当低，因而除了很薄的板壳之外，一般都应该考虑沿厚度方向剪切变形的影响。由于呈层性，厚度方向的两个剪应力（τ_{xz} 和 τ_{yz}，其中 z 为板壳中面的外法线方向）沿厚度的分布十分复杂，事先无法确切地确定其分布规律，因此要正确地考虑这种影响，并精确地计算这两个剪应力，是比较困难的。复合材料多层板壳有限元构成方面的困难，就在于此。

根据构成方法的不同，现有的复合材料多层板壳单元基本上可以归为二类。第一类是利用最小势能原理构成的单元，我们称之为多层位移板元和多层位移壳元。第二类是利用广义变分原理（目前还只是利用二变量广义变分原理，即 Hellinger-Reissner 变分原理）构成的单元，我们称之为多层杂交板元和多层杂交壳元。

复合材料多层板壳位移单元的构成方法和一般板壳位移单元基本相同。首先在单元内设一个用节点位移参数表示的位移场，这个位移场要保证单元之间位移的连续性。然后把这些位移表达式代到单元总势能泛函的表达式当中去，就可得到单元的刚度矩阵。不同的是总势能泛函的表达式现在复杂化了，刚度系数增多了（由于各向异性因素引起的），各层的刚度系数也不一样（由于呈层性引起的）。复合材料多层板壳位移单元可以分为下三类。

第一类：平行于中面的位移 u 和 v 在厚度方向的分布假设为分层线性的，即在每一层内它们都是 z 的线性函数，呈直线分布，而就板壳的整个断面来说，则都呈折线状分布。若板壳的厚度较大，断面在变形后要发生严重翘曲。u 和 v 的这种折线分布可以把断面的翘曲反映出来（当然已经把厚度方向剪切变形的影响考虑进去了），因而这类单元适合于厚板厚壳（$h/L>1/10$，其中 h 为板壳的厚度，L 为中面方向的尺寸）的应力和变形分析。

属于这一类的单元有[1]中的六节点三角形板元，[2]中的四边形等参板元和[3]中的矩形板元。[1]中的多层板实际是一种特殊的夹层板，由 n 个刚度和强度较大的层和 $n-1$ 层夹心交错叠合构成。

这类单元的优点是可以反映断面的翘曲和厚度方向剪切变形的影响，反映的程度也比较准确。位移和应力的精度都比较高，剪应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 的分布也比较真实。缺点是未知数的个数随层数的增加而增加，因而所需的计算机内存相当大。所以，只有当层数不太多时，才能使用这种单元。

第二类：u，v 在整个断面上都假设为线性的，但不采用 Kirchhoff 假设，即认为变形前中面的法线变形后仍为直线，但不再垂直于变形后的中面。这样，就把厚度方向剪切变形的影响考虑进去了（当然，断面的翘曲没有考虑）。这类单元适用于中等厚度的多层板壳（$h/L<1/10$）的应力分析和变形分析。但是，当板壳很薄时，一般会发生“闭锁”（Locking）现象，即求得的位移和采用 Kirchhoff 假设的理论解不一致，位移偏小。这种现象可以用节减积分（Reduced Integration）的办法加以克服。

属于这类单元的有[4]中的八节点四边形等参板元，十二节点四边形等参板元，九节点、十六节点和四节点的四边形板元；[5]中的四节点矩形板元；[6]中的八节点四边形等参板元；[7]中的等参板元；[8]中的矩形板元和九节点等参板元；[9]中的轴对称回转壳元。

其中[5]中的矩形元，是以节点处的平均剪应变$\bar{\gamma}_{xz}$和$\bar{\gamma}_{yz}$为未知数的，因而当厚度很小时也不会出现闭锁现象。

这类单元的优点是未知数较少，因而所需的计算机内存较小，计算量也较小。位移的精度也比较好。缺点是应力精度差，特别是τ_{xz}和τ_{yz}的分布和真实情况相差很大，如果不进行某种事后的处理是无法使用的。这是由于这类单元对呈层性引起的τ_{xz}和τ_{yz}的复杂分布根本无法考虑，而仅能考虑它们的合力Q_x，Q_y和平均剪应变$\bar{\gamma}_{xz}$，$\bar{\gamma}_{yz}$之间的近似物理关系。

第三类：采用Kirchhoff假设，不考虑厚度方向剪切变形的影响。这一类单元只适用于相当薄的板壳（$h/L<1/20$）的应力分析和变形分析。由于没有考虑厚度方向剪切变形的影响，当然也就没有闭锁的问题了。

属于这类单元的有[10]中的四节点矩形扁壳元，[11]中的三角形圆柱壳元，[12]中的轴对称回转壳元，[23]中的四节点矩形板元，[24]中的板元。

这类单元的优点是没有"闭锁"问题，位移的精度也较好。缺点是τ_{xz}和τ_{yz}的分布无法求出，w在单元边界上要保证C^1阶连续（如果要构造协调单元的话），因而未知数的数量也不少，并且构造插值函数时比较困难。

多层板壳杂交元（此处是指杂交应力元）的构成方法和一般板壳杂交元的构成方法是不同的。一般板壳杂交元的构成方法是，在单元内部假设一个内力场（N_x，N_y，N_{xy}，M_x，M_y，M_{xy}，Q_x，Q_y），在单元边界上假设一个位移分布，然后利用板壳理论中的Hellinger-Reissner变分原理求出单元刚度矩阵和内力与位移之间的关系。在这种构成法中，如果要考虑厚度方向剪切变形的影响，就需要知道Q_x，Q_y和平均剪应变$\bar{\gamma}_{xz}$，$\bar{\gamma}_{yz}$之间的物理关系。对于单层板壳来说，这个物理关系是已知的，因而可以用内力作参数。对于多层板壳来说，这样做就行不通了，因为Q_x，Q_y和$\bar{\gamma}_{xz}$，$\bar{\gamma}_{yz}$之间的物理关系是未知的。所以，多层板壳杂交元的构成方法是在单元内部假设一个应力场（σ_x，σ_y，σ_z，τ_{yz}，τ_{xz}，τ_{xy}），这个应力场通常是平衡的，并且取$\sigma_z=0$。在单元边界上假设一个位移分布。然后利用三维弹性理论中的Hellinger-Reissner变分原理求出单元刚度矩阵和应力与位移之间的关系。这样做的最大优点是可以准确地模拟τ_{xz}和τ_{yz}的分布规律，从而既使厚度方向剪切变形的影响能够准确地反映出来，同时又求得了合理的τ_{xz}和τ_{yz}的分布。这一点是位移单元所无法做到的，这是杂交单元最大的优点。

多层板杂交元的开创性工作是S.T.Mau，P.Tong and T.H.H.Pian[13]在1972年发表的一篇文章。该文第一次提出了在单元内部假设应力分量而不是内力分量的办法，从而解决了准确模拟τ_{xz}和τ_{yz}的分布的问题。文中构造了一个四边形多层厚板杂交元。这个元也可以用于多层薄板，并且不会产生闭锁问题。这个单元的缺点是有机动模式（当四边形为矩形时），未知数的数量随着层数的增加而增加，需要的计算机内存很大。

R.L.Spilker[14]把这种单元发展成了八节点等参多层板元，并且提出了通过选择应力函数的不同的项来达到消除闭锁现象的办法。这个元没有机动模式。[15]中给出了一种适用于中等厚度多层板的杂交元MLP3K，但是这个单元有机动模式。[16]中给出了一种插值阶数更高的用于计算柱面弯曲的多层厚板杂交元。[17]中提出了一个六节点三角形夹层壳等参

元和一个八节点四边形夹层壳等参元，因为是夹层壳，所以不会出现闭锁问题。

[18]中的多层壳混合杂交元，在单元内部是对内力进行插值的，因而无法考虑 τ_{xz} 和 τ_{yz} 在厚度方向的分布规律，没有反映出呈层性的特点。

杂交元的缺点在于，求单元刚度矩阵时要进行矩阵求逆运算，因而计算时间比位移元要长。位移元的缺点是 τ_{xz} 和 τ_{yz} 求不准，无法真实地反映呈层性的特点。比较二者的利弊，还是杂交元更适合多层板壳的实际情况。用杂交单元来解决复合材料多层板壳的应力分析和变形分析问题，是一条合理的途径。

复合材料板壳结构的几何非线性（大挠度）问题的有限元分析，目前资料很少。我们仅看到 T.Y.Chang and K.Sawamiphadi[19] 的一篇文章，是用三维等参元退化而成的八节点和九节点四边形等参多层壳元来计算复合材料多层壳的几何非线性问题的。

有限条法可以看作是一种特殊的有限单元法。板的有限条法一般只能用于一组对边简支的矩形板。[20]中给出了一种适合中等厚度复合材料多层板的有限条。采用的是位移法，考虑了厚度方向的剪切变形的影响。[21]中的有限条适用于由 n 层硬材料和 $n-1$ 层夹心交错叠合而成的夹层板，和[1]的情况类似。

采用罚参数（Penalty Parameter）构造板单元的办法，也可以用来构造多层板单元。[22]中提供了一类这样的元（其中有四节点四边形等参元和八节点四边形等参元）。考虑了厚度方向剪切变形的影响，适用于中等厚度的复合材料板。适当地选择罚参数，当板的厚度很薄时（可以采用 Kirchhoff 假设时），这些单元也同样适用。

复合材料是一种新型材料，复合材料多层板壳有限元，特别是复合材料多层板壳杂交元的研究工作，开展得还不够充分，发表的文献不多。从以上列举的这些文献来看，一般板壳有限单元的各种构成方法，无一不可推广到复合材料多层板壳中来，但是只有杂交元能够正确地反映复合材料多层板壳呈层性的特点，因而最为适用。特别是适用于中等厚度和较薄的多层板壳的杂交元，因为所需计算机内存不太大，对复合材料板壳结构的分析更加合适，看来将成为未来一段时间内研究的重点。

参　考　文　献

1 Khatua, T.P., Cheung, Y.K., Triangular element for multilayer sandwich plates, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, EM5 (1972): 9233.

2 Epstein, M., Huttelmaier, H.P., A finite element formulation for multilayered and thick plates, *Comp. & Struc.*, 16, 1—4 (1983): 645—650.

3 Pillasch, D.W., Majerus, J.N., Zak, A.R., Dynamic finite element model for laminated structures, *ibid.* 16, 1—4 (1983): 449—455.

4 Noor, A.K., Mathers, M.D., Finite element analysis of anisotropic plates, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11 (1977): 289—307.

5 Pryor, C.W., Jr., Barker, R.M., A finite-element analysis including transverse shear effects for application to laminated plates, *AIAA J.*, 9, 5 (1971).

6 Panda, S.C., Natarajan, R., Finite element analysis of laminated composite plates, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 14 (1979): 69—79.

7 Hinton, E., The flexural analysis of laminated composites using a parabolic isometric plate bending element, *ibid*, 11 (1977): 174—179.

8 Reddy, J.N., Dynamic (transient) analysis of laminated anisotropic composite material plates, *ibid*, 19, 2 (1983): 237—255.

9 Panda, S.C., Natarajan, R., Finite element analysis of laminated shells of revolution, *Comp.*

& *Struc.*, 6 (1976): 61—64.
10 Rao, K.P., A rectangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 15 (1978): 13—33.
11 Lakshminaryana, H.V., Viswanath, S., A high precision triangular laminated anisotropic cylidrical shell finite element, *Comp. & Struc.*, 8 (1978): 633—640.
12 ——, Einite element analysis of laminated composite shell junction, *ibid*, 6 (1976): 11—15.
13 Mau, S.T., Tong, P., Pian, T.H.H., Finite element solutions for laminated thick plates, *J. Composite Materials*, 6 (1972): 304—310.
14 Spilker, R.L., Hybrid-stress eight-node elements for thin and thick multilayer laminated plates, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18, 6 (1982): 801—828.
15 ——, R.L., Chou, S.C., Orringer, O., Alternate hybrid-stress elements for analysis of multilayer composite plates, *J. Cmposite Materials*, 11 (1977): 51—70.
16 ——, A hybrid-stress finite-element formulation for thick multilayer laminates, *Comp. & Struc.*, 11 (1979): 507—514.
17 Holt, P.J., Webber, J.P.H., Finite elements for honeycomb sandwich plates and shells, *Aeronaut. J.* (March/April, 1980): 113—167.
18 Noor, A.K., Andersen, C.C, Mixed isoparametric finite element models of laminated composite shells, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 11 (1977): 255—280.
19 Chang, T.Y., Sawamiphadi, K., Large deformation analysis of laminated shells by finite elemnt method, *Comp. & Struc.*, 13 (1981): 331—340.
20 Hinton, E., Flexure of composite laminates using the thick finite strip method, *ibid*, 7 (1977): 217—220.
21 Chan, H.C., Foo, O., Buckling of multi-layer sandwich plates by the finite strip method, *Int. J. Mech. Sci.*, 19: 447—459.
22 Reddy, J.N., A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 15 (1980): 1187—1209.
23 赵永枢，复合材料层板结构的有限单元法分析，复合材料研究（第一届全国复合材料学术会议论文选编），《航空材料》编辑部，北京（1981）：162—168.
24 陈业标，复合材料结构分析有限元法，同上：176—178.

REVIEW ABOUT FINITE ELEMENTS OF MULTILAYER PLATES AND SHELLS

Liu Guo-xi　　Wang Zhen-ming
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)