

# 用拉格朗日等参数单元计 算应力强度因子

中国科学院 力学研究所 吴永礼

## 摘 要

本文证明了在二次或三次拉格朗日等参数单元中,假使边上点和内节点移动适当的位置即可产生奇异性。在标准的拉格朗日等参单元中,使一边缩并成一点,成为三角形单元,再适当的选泽边上点和内节点的位置,可以在单元的角度产生奇异性,因而,可以计算应力强度因子。在奇异元外面,适当移动边上点和内节点可以形成过渡元,可得到较精确的结果。通过几个例子表明,用这种奇异元,只要较少的单元数和节点数就能得到较精确的结果。

## 一、引 言

有限元法是计算应力强度因子的有效方法。在用有限元计算应力强度因子的各种奇异元中,有两类单元比较好。一类是由八节点或十二节点的四边形等参元(所谓 Serendipity 族)所派生的奇异元<sup>[1~3]</sup>,这种单元就是常用的等参数单元,只需适当改变裂纹顶点单元的边上点坐标,就可使应变具有  $r^{-1/2}$  奇异性,不必作程序上的修改就能用来计算应力强度因子。这种单元是协调单元,满足收敛准则,因此,这种单元是工程中较广泛应用的一种单元。杂交元是计算应力强度因子的另一类单元<sup>[4~6]</sup>,杂交元的优点是可以用较少的单元和节点就能得到较精确的结果,但杂交元的缺点是程序比较复杂,计算结果有时不太稳定。

本文将证明用拉格朗日多项式作插值函数的等参数单元具有上述等参数单元相类似的性质。将四边形的一边收缩成一点而成三角形单元,再将边上点和内节点移动适当的位置,可以使单元的应变具有  $r^{1/2}$  奇异性,从而可以用来计算应力强度因子。此外,这种单元也可以有过渡元公式。最后计算了几个例子,计算表明,用这种奇异元,只需较少的单元和节点,就能得到较精确的应力强度因子。而且这种单元是协调元,满足收敛准则,程序比较简单,所以,这种单元是比较好的一种计算应力强度因子的单元。

1983年6月18日收到。

## 二、奇异性的形成

### 1. 二次拉格朗日等参元

二次函数在每个方向可以有三个节点, 因此, 二次拉格朗日等参元是九节点单元, 节点编号如图 1 所示, 各节点的形状函数是<sup>[7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \xi_i \eta_i \eta, & (i = 1, 2, 3, 4) \\ N_i &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) \eta_i \eta, & (i = 5, 7) \\ N_i &= \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \xi_i \xi, & (i = 6, 8) \\ N_9 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

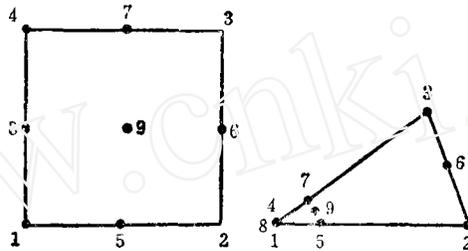


图 1 二次拉格朗日单元

Fig.1 Quadratic lagrangian element

式中  $\xi_i, \eta_i$  为节点在  $\xi, \eta$  坐标系中的坐标值。

将节点 1, 4, 8 缩并成一点, 节点 5, 7, 9 取 1/4 分点的位置

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_4 = x_8, & y_1 &= y_4 = y_8 \\ x_5 &= \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_2, & y_5 &= \frac{3}{4} y_1 + \frac{1}{4} y_2, \\ x_7 &= \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_3, & y_7 &= \frac{3}{4} y_1 + \frac{1}{4} y_3, \\ x_9 &= \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} x_6, & y_9 &= \frac{3}{4} y_1 + \frac{1}{4} y_6, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

节点 6 则取在中分点的位置

$$x_6 = \frac{1}{2} (x_2 + x_3), \quad y_6 = \frac{1}{2} (y_2 + y_3) \quad (3)$$

将 (2), (3) 式代入坐标变换公式  $x = \sum_{i=1}^9 N_i x_i, y = \sum_{i=1}^9 N_i y_i$  中, 那么可以得出

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \left( \frac{1 - \eta}{2} x_2 + \frac{1 + \eta}{2} x_3 - x_1 \right) \left( \frac{1 + \xi}{4} \right)^2 \\ y &= y_1 + \left( \frac{1 - \eta}{2} y_2 + \frac{1 + \eta}{2} y_3 - y_1 \right) \left( \frac{1 + \xi}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

下面来证明在这种情况下单元在  $\theta = \text{常数}$  的方向上, 应变均有  $r^{-1/2}$  的奇异性。取坐标原点在单元的顶点, 如图 2 所示, 即有  $x_1 = y_1 = 0$ , 公式 (4) 可以写为

$$\left. \begin{aligned} x &= \left( \frac{1-\eta}{2} x_2 + \frac{1+\eta}{2} x_3 \right) \left( \frac{1+\xi}{2} \right)^2 \\ y &= \left( \frac{1-\eta}{2} y_2 + \frac{1+\eta}{2} y_3 \right) \left( \frac{1+\xi}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

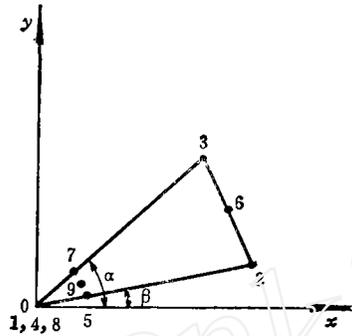


图 2 退化后的二次拉格朗日单元

Fig. 2 Collapsed quadratic lagrangian element

记  $k = x_3/x_2$ ,  $\text{tg}\alpha = y_2/x_2$ ,  $\text{tg}\beta = y_3/x_3$ , 代入公式 (5) 后有

$$\text{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{(1-\eta)\text{tg}\beta + (1+\eta)k\text{tg}\alpha}{(1-\eta) + (1+\eta)k}$$

由此可以解出

$$\eta = \frac{(\text{tg}\beta + k\text{tg}\alpha) - (k+1)\text{tg}\theta}{(k-1)\text{tg}\theta - (k\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)} \quad (6)$$

将公式 (6) 代入公式 (5) 的第一式, 并注意到  $x = r \cos\theta$ , 于是可以得到

$$\xi = -1 + \sqrt{4 \frac{[(1-k)\text{tg}\theta + k\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta]\cos\theta}{x_3(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)}} \sqrt{r} \quad (7)$$

在极坐标中的应变分量为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $u_i$ ,  $v_i$  分别为各个节点在  $x$ ,  $y$  坐标系中的位移分量。从公式 (6)、(7) 可以得出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= f_1(\theta) r^{-1/2}, & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= f_2(\theta) r^{1/2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} &= f_3(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= \sqrt{\frac{[(1-k)\operatorname{tg}\theta + k\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta]\cos\theta}{x_3(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}} \\ f_2(\theta) &= \sqrt{\frac{(1-k)\cos\theta - (k\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\sin\theta}{x_3(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)[(1-k)\operatorname{tg}\theta + k\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta]}\cos\theta} \\ f_3 &= \frac{2k(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}{[(1-k)\operatorname{tg}\theta + (k\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)]^2\cos^2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

从形状函数  $N_i$  的表达式 (1), 并利用公式 (6), (7) 可以得出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= c_{1i}(\theta) + c_{2i}(\theta) r^{1/2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= d_{1i}(\theta) + d_{2i}(\theta) r^{1/2} + d_{3i}(\theta) r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $c_{1i}(\theta)$ ,  $c_{2i}(\theta)$ ,  $d_{1i}(\theta)$ ,  $d_{2i}(\theta)$ ,  $d_{3i}(\theta)$  仅是极坐标中  $\theta$  的函数,  $i = 1, 2, \dots, 9$ 。其表达式比较繁冗, 这里就省略了。将表达式 (9)、(11) 代入公式 (8) 后可以得到

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= g_1(\theta) + g_2(\theta) r^{-1/2} \\ \varepsilon_\theta &= h_1(\theta) + h_2(\theta) r^{-1/2} + h_3(\theta) r^{-1} \\ \varepsilon_{r\theta} &= I_1(\theta) + I_2(\theta) r^{-1/2} + I_3(\theta) r^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中  $g_1(\theta)$ ,  $g_2(\theta)$ ,  $h_1(\theta)$ ,  $h_2(\theta)$ ,  $h_3(\theta)$ ,  $I_1(\theta)$ ,  $I_2(\theta)$ ,  $I_3(\theta)$  都是  $\theta$  的函数, 并与  $u_i$ ,  $v_i$  有关, 而与半径  $r$  无关, 其形式为

$$\left. \begin{aligned} g_1(\theta) &= f_1(\theta) \sum_{i=1}^9 c_{2i}(\theta) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ g_2(\theta) &= f_1(\theta) \sum_{i=1}^9 c_{1i}(\theta) (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ h_1(\theta) &= \sum_{i=1}^9 [c_{2i}(\theta) f_2(\theta) + d_{3i}(\theta) f_3(\theta)] (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \\ h_2(\theta) &= \sum_{i=1}^9 [c_{1i}(\theta) f_2(\theta) + d_{2i}(\theta) f_3(\theta)] (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \\ h_3(\theta) &= f_3(\theta) \sum_{i=1}^9 d_{1i}(\theta) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \\ I_1(\theta) &= \sum_{i=1}^9 \{ [d_{3i}(\theta) f_3(\theta) + c_{2i}(\theta) f_2(\theta)] (u_i \cos\theta + v_i \sin\theta) \\ &\quad + c_{2i}(\theta) f_1(\theta) (-u_i \sin\theta + v_i \cos\theta) \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$I_2(\theta) = \sum_{i=1}^9 \{ [c_{1i}(\theta)f_2(\theta) + d_{2i}(\theta)f_3(\theta)](u_i\cos\theta + v_i\sin\theta) + c_{1i}(\theta)f_1(\theta)(-u_i\sin\theta + v_i\cos\theta) \}$$

$$I_3(\theta) = f_3(\theta) \sum_{i=1}^9 d_{1i}(\theta)(u_i\cos\theta + v_i\sin\theta)$$

从公式(12)可以看出九节点派生的奇异元的极坐标应变分量在 $\theta = \text{常数}$ 的方向上有 $r^{-1/2}$ 和 $r^{-1}$ 的奇异性, 现在研究 $r^{-1}$ 项的系数 $h_3(\theta)$ ,  $I_3(\theta)$ 。

$$\left. \begin{aligned} h_3(\theta) &= f_3(\theta) [(2u_8 - u_1 - u_4)\sin\theta + (v_1 + v_4 - 2v_8)\cos\theta] \eta \\ I_3(\theta) &= f_3(\theta) [(u_1 + u_4 - 2u_8)\cos\theta + (v_1 + v_4 - 2v_8)\sin\theta] \eta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

可以看出, 若节点 1, 4, 8 合并成一点, 并有 $u_1 = u_4 = u_8$ ,  $v_1 = v_4 = v_8$ 的约束条件, 则 $h_3(\theta) \equiv I_3(\theta) \equiv 0$ , 因而, 应变没有 $r^{-1}$ 的奇异性。若没有这个约束条件, 则应变有 $r^{-1}$ 的奇异性, 这个情况是与八节点派生的奇异元相似的, 文献〔8〕就是利用这种情况来计算理想塑性问题的。直角坐标与极坐标的应变分量转换关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_r \cos^2\theta - \varepsilon_{r\theta} \sin\theta \cos\theta + \varepsilon_\theta \sin^2\theta \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_r \sin^2\theta + \varepsilon_{r\theta} \sin\theta \cos\theta + \varepsilon_\theta \cos^2\theta \\ \varepsilon_{xy} &= (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \sin 2\theta + \varepsilon_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

因而, 应变 $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_{xy}$ 也有与 $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_{r\theta}$ 相同的奇异性。

为了提高精度, 可以在奇异元周围布置一层或几层过渡元, 过渡元也是通过移动边上点和内节点的位置来达到在单元中有 $r^{1/2}$ 的位移项, 也即应变具有 $r^{-1/2}$ 。可以证明, 过渡元的边上点和内节点的坐标计算公式与文献〔3〕中相同。例如, 对于图 3 中的过渡元, 节点 5, 7, 9 的坐标计算公式为

$$r_5 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{4}, \quad r_7 = \frac{(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4})^2}{4}, \quad r_9 = \frac{(\sqrt{r_6} + \sqrt{r_8})^2}{4} \quad (16)$$

式中 $r_i$  ( $i=1, 2, \dots, 9$ ) 为各节点到裂纹顶点的距离。

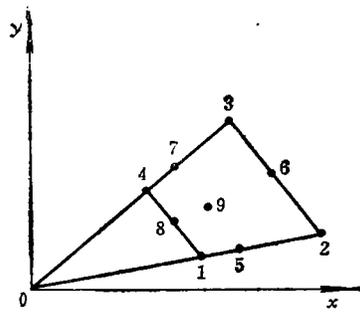


图 3 二次拉格朗日过渡元

Fig.3 Quadratic lagrangian transition element

## 2. 三次拉格朗日等参元

三次拉格朗日函数作形状函数的等参数单元在每个方向上有四个节点, 这时, 形状函数为(图 4)。

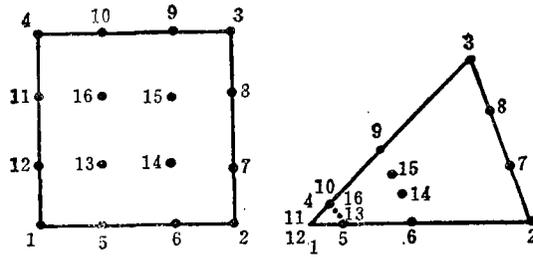


图 4 三次拉格朗日单元

Fig.4 Cubic lagrangian element

$$\left. \begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{256} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (9\xi^2 - 1) (9\eta^2 - 1), & (i = 1, 2, 3, 4) \\
 N_i &= \frac{9}{256} (1 - \xi^2) (1 + 9\xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (9\eta^2 - 1), & (i = 5, 6, 9, 10) \\
 N_i &= \frac{9}{256} (1 - \eta^2) (1 + 9\eta_i \eta) (1 + \xi_i \xi) (9\xi^2 - 1), & (i = 7, 8, 11, 12) \\
 N_i &= \frac{81}{256} (1 + 9\xi_i \xi) (1 + 9\eta_i \eta) (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), & (i = 13, 14, 15, 16)
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将节点 1, 4, 11, 12 缩并成一点使之成为三角形, 边节点和内节点 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16 分别取 1/9 和 4/9 分点的位置

$$\left. \begin{aligned}
 x_5 &= \frac{8}{9} x_1 + \frac{1}{9} x_2, & y_5 &= \frac{8}{9} y_1 + \frac{1}{9} y_2 \\
 x_6 &= \frac{5}{9} x_1 + \frac{4}{9} x_2, & y_6 &= \frac{5}{9} y_1 + \frac{4}{9} y_2
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

节点 10, 9, 13, 14, 15, 16 的坐标公式与此相似。节点 7, 8 则仍取在正常的 1/3, 2/3 的位置

$$\left. \begin{aligned}
 x_7 &= \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3, & y_7 &= \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 \\
 x_8 &= \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3, & y_8 &= \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将公式 (17)~(19) 代入坐标变换公式  $x = \sum_{i=1}^{16} N_i x_i, y = \sum_{i=1}^{16} N_i y_i$ , 可以证明

坐标变换公式与公式 (4) 相同, 于是可以用相同的方法证明此单元在  $\theta = \text{常数}$  的方向上应变具有  $r^{-1/2}$  的奇异性和  $r^{-1}$  的奇异性, 从而可以用来计算裂纹问题的应力强度因子和理想塑性问题。对于过渡元则有下列坐标计算公式 (图 5)

$$r_5 = \frac{(2\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{9}, \quad r_6 = \frac{(\sqrt{r_1} + 2\sqrt{r_2})^2}{9} \quad (20)$$

节点 13, 14, 15, 16, 10, 9 的坐标计算公式与此类似。

可以将上面形成奇异元和过渡元的公式推广到任意  $N$  阶拉格朗日等参元中去。对于

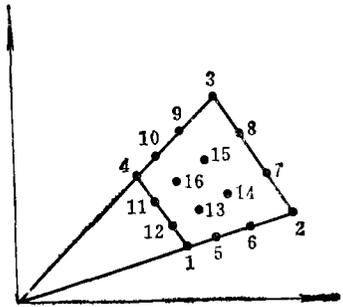


图 5 三次拉格朗日过渡元

Fig.5 Cubic lagrangian transition element

$N$ 阶拉格朗日等参元, 先将一边缩并成一点, 然后将边上点和内节点分布在 $\left(\frac{I}{N}\right)^2$ 分点的位置, 其中 $I=1, 2, \dots, N-1$ 。例如二次元,  $N=2$ , 则 $I=1$ 。三次元,  $N=3$ ,  $I=1, 2$ 。依此类推可用到高阶拉格朗日单元。但是, 一般计算用二次元较多。

## 二、数值例子和结论

为了检验拉格朗日等参元所派生的奇异元的计算精度, 计算了几个例子, 在计算中分二种情况作对比, 一种是只采用裂纹顶点周围的奇异元, 另一种在奇异元周围布置二层过渡元。二种情况的计算结果相差不大, 但是在用外推法来求应力强度因子时, 有过渡元时线性较好, 因而, 下面给出的结果是有过渡元的情况。

### 1. 受均匀拉伸的单边裂纹板

由于对称, 只需取一半就可以了。单元网格如图 6 所示。计算了 $L/W=2, 3$ 二种情况,  $a/W=0.5$ ,  $L$ 为板的一半长度,  $W$ 为宽度,  $a$ 为裂纹长度, 二种情况计算结果相同, 说明 $L/W \geq 2$ 即可作为无限长板处理。 $L/W=2$ 时, 单元数 20, 节点数 93;  $L/W=3$ 时, 单元数 22, 节点数 103。用外推法得到无量纲应力强度因子 $K^*=K/\sigma\sqrt{\pi a}=2.850$ , 用最靠近裂纹顶点的节点位移直接计算得到的 $K^*=2.828$ 。文献[1]用 40 个单元, 147 个节点计算所得的 $K^*=2.825$ (外推法)。文献[9]的解析解为 2.86, 文献[10]的级数和积分变换解得 2.826,  $L/W$ 均为 3。

### 2. 受均匀拉伸的双边裂纹板

由于对称, 只需计算 1/4 就可以了, 网格同前, 这时, 板宽为  $2W$ 。本文经外推法和位移直接计算所得的 $K^*$ 为 1.167 和 1.166。对于 $L/W=2, 3$ 二种情况结果相同。文献[2]对 $L/W=4$ 的情况, 用 115 个单元和 370 个节点, 所得的 $K^*$ 为 1.162~1.174; 文献[6]对 $L/W=3$ 的情况, 用 32 个单元, 108 个节点, 所得的结果为 1.161 或 1.169; 文献[10]给出 1.169; 文献[11]给出 1.15; 文献[10, 11]均为 $L/W=3$ 的结果。

### 3. 受均匀拉伸的中心裂纹板 ( $L/W=2, 3, a/W=0.5$ )

计算 1/4 的部分, 网格同前,  $2a$ 为裂纹长度, 本文结果为 1.184 和 1.179; 文献[1]对于 $L/W=3$ 的情况, 用 40 个单元, 147 个节点, 得到 1.208; 文献[12 和 13]对 $L/W=3$ 的情况分别给出 1.187 和 1.19。

#### 4. 受均匀拉伸的中心裂纹板 ( $L/W=1$ , $a/W=0.4$ )

计算 1/4 部分的网格如图 7 所示, 所用的单元数为 20, 节点数为 93, 计算结果为 1.213 或 1.209; 文献〔5〕用 24 个单元和 93 个节点, 计算结果为 1.229; 文献〔13〕的复变函数法计算结果为 1.216。

#### 5. 受均匀拉伸的中心裂纹板 ( $L/W=1$ , $a/W=0.6$ )

计算网格仍如图 7 所示, 本文计算结果为 1.480 或 1.474; 文献〔13〕的结果为 1.481。

通过上述五个例子可以得出如下的结论

(1) 用拉格朗日等参元所派生的奇异元可以较精确地计算应力强度因子, 所得的结果与其他数值解或各种奇异元的解都相当接近。



图 6 算例 1, 2, 3 的网格

Fig.6 Grid for examples 1, 2, 3

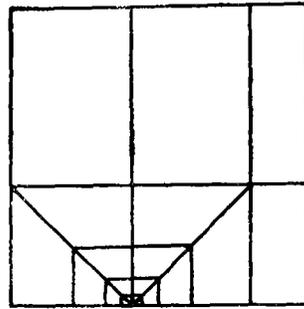


图 7 算例 4, 5 的网格

Fig.7 Grid for examples 4, 5

(2) 本文所提供的奇异元与文献〔1, 2〕所用的等参元相比, 所用的单元和节点数可以少一些。

(3) 本文所用的奇异元的单元和节点数大致与杂交元〔4,6〕相当(略微少一些)。但是, 本文的奇异元是协调的位移元, 这种单元在许多程序系统中已经使用, 所以使用方便, 而且收敛性是得到保证的。因此, 这是一种比较好的单元。可以用来精确地计算应力强度因子。

### 参 考 文 献

- 〔1〕 Henshell, R. D. and Shaw, K. G., Crack tip finite elements are unnecessary, *Inter. Jour. Num. Methods Eng.*, Vol. 9, №3, (1975).
- 〔2〕 Barsoum, R. S., On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Inter. Jour. Num. Methods Eng.*, Vol. 10, №1, (1976).

- [3] Wang Keh Jen, Hsu Chi-Lin and Kao Hua, Calculation of stress intensity factors for combined mode bend specimens, *Advances in Research on Strength and Fracture of Materials*, Vol. 4, ed. by D. M. P. Taplin, (1978).
- [4] Pian, T. H. H., Tong, P. and Luk, C. H., Elastic crack analysis by a finite element hybrid method, *Proc. Third Air Force Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*, 661~682 (1971).
- [5] Atluri, S. N., Kobayashi, A. S., and Nakagaki, M., Fracture mechanics application of an assumed displacement hybrid finite procedure, *AIAA Jour.*, Vol. 13, No. 6, (1975).
- [6] 何积范, 常尧明, 高占民, 李洲圣和孙写信, 用杂交应力元及等参元计算应力强度因子, *航空学报*, 2 卷 3 期, (1981).
- [7] Zienkiewicz, O. C., *The finite element methods*, 3rd ed., McGraw-Hill, (1977).
- [8] Barsoum, R. S., Triangular quarter-point element as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *Inter. Jour. Num. Methods Eng.*, Vol. 11, No. 1, (1977).
- [9] Paris, P. C., and Sih, G. C., Stress analysis of cracks, *ASTM STP 381*.
- [10] Keer, L. M., and Freedman, J. M., Tensile strip with edge crack, *Inter. Jour. Eng. Sci.*, Vol. 11, No. 12, (1973).
- [11] Bowie, O. L., Rectangular tensile sheet with symmetric edge crack, *Jour. of Applied Mechanics*, Vol. 31, No. 2, (1964).
- [12] Bowie, O. L., and Neal, D. M., A note on the central crack in the uniformly stressed strip, *Eng. Fracture Mech.*, Vol. 2, No. 2, (1970).
- [13] Isida, M., Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions, *Inter. Jour. Fract. Mech.*, Vol. 7, pp301~306(1971).

## CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS USING LAGRANGIAN ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS

Wu Yongli

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

It is proved in this paper that a singularity occurs in quadratic or cubic Lagrangian isoparametric finite elements when the side-nodes and internal nodes are displaced properly from their normal position. As the quadrilateral elements are collapsed into triangular elements around the crack tip and the side-node and internal node positions on standard Lagrangian isoparametric elements are so chosen that the singularity occurs exactly at the corner of an element, it is possible to obtain inverse square root singularity of the strain field at the crack tip. In addition, a transition element can be easily constructed by shifting side-nodes and internal nodes to some properly calculated points. Stress intensity factors may be computed with considerably high accuracy by using transition element between crack-tip singular elements and remaining non-singular elements. Several numerical examples show collapsed Lagrangian isoparametric singular element gives excellent results even when a comparatively few elements and nodes are used.