中 国 科 学

1984 年 4 月　　A 辑　　第 4 期

连续系统稳定性问题中的李雅普诺夫直接法

朱如曾　谈镐生

（中国科学院力学研究所，北京）

摘　　要

关于连续系统（如弹性系统、流体系统）的态空间往往构成非局部紧致的度量空间．本文将对这种类型空间上的动力系统建立不变性原理，由此导出一系列渐近稳定判据，并在更弱的条件下导出不稳定的判据．

一、引　　言

近年来，将李雅普诺夫直接法[1]推广到连续系统，这一研究方向受到了极大的重视．Zubov[2] 和 Movchan[3] 获得了与李雅普诺夫的经典理论平行的适用于一般度量空间中动力系统的一系列结果．在处理稳定性问题时，这些结果都是强有力的．然而在处理渐近稳定性问题和不稳定性问题时，为了利用文献[2]和[3]的定理，就必须找到时间导数为正定或负定的李雅普诺夫函数．这样过高的要求使定理使用起来很不方便．例如，对于耗散的物理系统，往往自然地存在能量函数 V，它随时间单调减少，然而其时间导数 $\dot{V}$ 并不负定，而是半定的，因而不能选作文献[2]和[3]所要求的李雅普诺夫函数．这一困难对于有限自由度系统和无限自由度系统都是存在的．为了把 $\dot{V}$ 的正定（或负定）要求降为半定要求进行了一系列工作．1952 年，Барбашин 和 Красовский[4,5] 减弱了李雅普诺夫定理的假设，只要求 $\dot{V}$ 半定即可．后来，LaSalle[6,7] 发展了文献[4]的结果，对驻定系统（定义在 n 维欧氏空间 R^n 上）建立了更一般的“不变性原理”．1979 年，Шестаков[8] 用 V 函数确定了 n 维欧氏空间上的非驻定系统的极限集，进一步推广了 LaSalle 的工作．然而要将文献[4—8]推广到在非局部紧致的度量空间 $\mathscr{A}$ 上定义的动力系统中去，却存在着严重的困难，原因是“不变性原理”的成立本身要以有界闭集具有自列紧性为前提．Hale[9] 和 Slemrod[10] 在这方面作了一些研究．

本文将对非局部紧致的度量空间中的动力系统建立“不变性原理”，在此基础上给出渐近稳定定理，并在更弱的条件下给出不稳定性定理．连续系统的状态变化所决定的动力系统，通常都属于非局部紧致的度量空间．

二、记号和基本定义

$R=(-\infty,\infty)$，实数；$R_+=[0,\infty)$，$R_-=(-\infty,0]$；$\mathscr{A}$ 表示度量空间；若 $x, y\in\mathscr{A}$，其间距离记为 $\rho(x,y)$．

本文 1982 年 10 月 9 日收到．

定义 1. u 为 $\mathscr{A}$ 中的动力系统，是指 u 满足如下三个条件

(1) u 是连续映射 $u: R_+ \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$,

(2) $u(0, x) = x$,

(3) $u(t+\tau, x) = u(t, u(\tau, x))$, 只需 $t, \tau \in R_+$, $x \in \mathscr{A}$.

定义 2. 通过 $x \in \mathscr{A}$ 的正轨道 $O^+(x)$ 是指

$$O^+(x) = \bigcup_{t\geq 0} u(t, x).$$

定义 3. y 为平衡点是指

$$O^+(y) = y.$$

定义 4. 集 $M \subset \mathscr{A}$ 称为不变集是指，如果 $x \in M$，则 $O^+(x) \subset M$.（按通常习惯，这样定义的是正不变集，因本文只涉及这种不变性质的集，故简称为不变集.）

定义 5. V 是 $G \subset \mathscr{A}$ 上的李雅普诺夫函数是指 V 满足如下三个条件

(1) $V: \mathscr{A} \to R$,

(2) V 在 $\bar{G}$ 上连续且有下界，

(3) 在 G 上，$\dot{V} \leqslant 0$,

其中

$$\dot{V} = \varliminf_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[V(u(t, x)) - V(x)]. \tag{1}$$

定义 6.

$$E = \{x \mid \dot{V}(x) = 0,\ x \in \bar{G}\};$$

E 中最大的不变集称为 M；$\bar{E}$ 中最大的不变集称为 M_0.

定义 7. 令 $W: \mathscr{A} \to R$, $G \subset \mathscr{A}$. W 在 G 上广义负定是指 W 满足如下两个条件:

(1) $W(x) \leqslant 0$, 当 $x \in G$;

(2) 设 $D = \{x \mid x \in \bar{G}, W(x) = 0\}$ 非空，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，只要 $x \in G$ 和 $\rho(x, D) > \varepsilon$，则成立 $W(x) \leqslant -\eta$.

定义 8. $G_a = \{x \mid x \in \mathscr{A}, V(x) < a, a$ 为某一实数$\}$;

$V^{-1}(c) = \{x \mid x \in \mathscr{A}, V(x) = c, c$ 为某一实数$\}$.

此外，关于 ω 极限点，ω 极限点集 $\Omega(x)$，不变集的稳定、不稳定、渐近稳定、吸引、吸引子和吸引区的定义同文献[2]；正定，无穷小上限以及无限大函数的定义同文献[3].

三、E 的吸引性

定理 1. 对 $\mathscr{A}$ 上定义的动力系统 u，如果满足如下四个条件：(1) 有界集 G 上存在李雅普诺夫函数 V. (2) 存在 $x_0 \in G$，使 $O^+(x_0) \subset G$. (3) $\dot{V}$ 在 $[0, \infty)$ 上绝对连续，其导数几乎处处有上界（或有下界）；或者点 $x = u(t, x_0)$ 在 G 中变化的速率 $\frac{ds}{dt}$ 有界[1]. (4) $\dot{V}$ 广义负定，则

$$x(t, x_0) \to E. \tag{2}$$

证. 根据条件(1)和(2)并利用文献[11]的定理 34.1 得到 V 在 $[0, \infty)$ 上单调下降，并有极限 C

$$\lim_{t\to\infty} V = c. \tag{3}$$

1) $\frac{ds}{dt}$ 有界，指运动的道路可度长，$\frac{ds}{dt}$ 存在并有界，下同.

进一步利用文献[11]的定理 34.2，得

$$V(x(t,\ x_0))-V(x_0)\leqslant\int_0^t\dot V(x(\tau,\ x_0))d\tau,$$

因此

$$\int_0^\infty\dot V(x(\tau,\ x_0))d\tau>-\infty. \tag{4}$$

利用条件(3)的前一半，从(4)式得到

$$\lim_{t\to\infty}\dot V(x(\tau,\ x_0))=0. \tag{5}$$

由于条件(4)，任给 $\varepsilon>0$，当 $\rho(x,\ E)>\varepsilon$ 时，必有 $\eta>0$，使 $\dot V\leqslant-\eta<0$. 对这一 η，根据(5)式，又必存在 T，当 $t>T$ 时，有 $0>\dot V(x(t,\ x_0))>-\eta$. 所以当 $t>T$ 时，我们得到必有

$$\rho(x(x_0,\ t),\ E)\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了(2)式.

现在还必须从条件(3)的后一半来证明(2)式. 用反证法. 假定(2)式不真，即存在 $\varepsilon>0$，它具备如下两种性质之一：① 当 t 足够大时，x 永远停留在 G 中 E 的邻域 $N_\varepsilon(E)$ 之外(即 $\rho(x,\ E)\geqslant\varepsilon$)，因而也在 $N_{\varepsilon/2}(E)$ 之外；②无限多次达到 $N_\varepsilon(E)$ 之外，故 x 必在 $N_{\varepsilon/2}(E)$ 之外走过无限长的路程，由于 x 的运动速率的有界性，x 必在 $N_{\varepsilon/2}(E)$ 以外停留无限长时间. 因此对这两种情况，x 都在 $N_{\varepsilon/2}(E)$ 之外停留无限长时间. 由于条件(4)，必存在 $\eta>0$，使得在$N_{\varepsilon/2}(E)$ 之外，$\dot V<-\eta$，所以

$$\int_0^\infty\dot V(x(\tau,\ x_0))d\tau\leqslant-\eta\int d\tau=-\infty,$$

积分区域是

$$\rho(x,\ E)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

这与(4)式矛盾. 于是(2)式得证.

推论 1. 若将定理 1 的条件 (2) 改为：G 为某 G_a 的一个道路连通分支并且 $x_0\in G$，而其它条件不变，则定理 1 仍然成立.

证. 根据 G_a 的定义 (定义 8) 和 $\dot V\leqslant 0$ 及 $x_0\in G$ 可得 V 随时间单调下降，并且 $O^+(x_0)\subset G_a$. 又 G 是 G_a 的一个道路连通分支，及运动的连续性，及 $x_0\in G$，所以 $O^+(x_0)\subset G$. 这就是定理 1 的条件(2). 证毕.

四、不变性原理及其推论

引理 1. 对 $\mathscr{A}$ 中动力系统 u，$x\in\mathscr{A}$，其 ω 极限集 $\Omega(x)$ 如果非空，则必定是闭的不变集.

因为 $\mathscr{A}$ 非紧致，故必须假定 $\Omega(x)$ 非空. 其余证明与文献 [2] p21 相同.

引理 2. M_0 是 $\mathscr{A}$ 中的闭集

证. M_0 是不变集，从文献[2]定理 2 知，$\overline{M}_0$ 仍是不变集. 因为 $M_0\subset\overline{E}$，所以 $\overline{M}_0\subset\overline{E}$. 可是按定义 6，$M_0$ 是 $\overline{E}$ 中最大不变集，所以 $M_0\supset\overline{M}_0$，即 $M_0=\overline{M}_0$，证毕.

引理 3. 若 E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，且当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to E$，则对任一序列 $\{t_n\}$，只要

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$，则序列 $\{x(t_n)\}$ 的极限点集 Ω 非空，并且 $\Omega\subset\bar{E}$.

证．因为 $x(t)\to E$，$t_n\to\infty$，所以 $x(t_n)\to E$．因此，容易找到序列 $\{y_n\}$，$y_n\in E$，使 $\rho(y_n, x(t_n))\to 0$．由于 E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，故存在 $\omega\in\mathscr{A}$，ω 是 $\{y_n\}$ 的聚点．因此也必定是 $\{x(t_n)\}$ 的聚点．因为 $y_n\in E$，所以 $\omega\in\bar{E}$．证毕．

定理 2. （不变性原理）除定理 1 的条件外，再补充以 E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，则 $\Omega(x_0)$ 是非空、自列紧的不变集，且存在某一实数 c，使

$$\Omega(x_0)\subset V^{-1}(c)\cap M_0, \tag{6}$$

当 $t\to\infty$ 时，

$$x(t, x_0)\to\Omega(x_0), \tag{7}$$

$$x(t, x_0)\to M_0, \tag{8}$$

$$x(t, x_0)\to V^{-1}(c)\cup M_0. \tag{9}$$

证．定理 1 已证得(2)式成立，又由于 E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，故可利用引理 3 得 $\Omega(x_0)$ 非空，并且

$$\Omega(x_0)\subset\bar{E}. \tag{10}$$

所以 $\Omega(x_0)$ 也在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧．利用引理 1 知，$\Omega(x_0)$ 是闭的不变集．所以 $\Omega(x_0)$ 自列紧．

现在证明(7)式：用反证法．设(7)式不真，必存在 $\varepsilon>0$，和 $\{x(t_n, x_0)\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$，满足 $\rho(x(t_n, x_0), \Omega(x_0))>\varepsilon$．由于(2)式和 E 在 $\mathscr{A}$ 中的相对列紧性，利用引理 3 得 $\{x(t_n, x_0)\}$ 有至少一个极限点 $\omega\in\Omega(x_0)$，这与

$$\rho(x(t_n, x_0), \Omega(x_0))>\varepsilon$$

相矛盾，故(7)式得证．

由于 $\Omega(x_0)$ 是满足(10)式的不变集，故 $\Omega(x_0)\subset M_0$，又由于(3)式及 V 的连续性得 $\Omega(x_0)\subset V^{-1}(c)$，所以(6)式成立，从而(8)式和(9)式也成立．证毕．

我们要指出，E 的相对列紧性条件在许多实际情况是被满足的．例如耗散的物理系统，当把机械能取为李雅普诺夫函数时，$\dot{V}=0$ 就表示耗散不存在的状态．这对应着系统内部相对运动停止，因而运动所对应的所有状态退化到 $\mathscr{A}$ 中一个超曲面上，此时往往 E 是相对列紧的．以粘滞流体为例，耗散不存在就对应着流体作整体刚性运动，相空间退化为六维欧氏空间，其中的有界闭集是自列紧的了．

推论 2. 对 $\mathscr{A}$ 中动力系统 u，如果下面六个条件得到满足：(1) $G\subset\mathscr{A}$ 是有界开不变集，(2) G 上存在李雅普诺夫函数，(3) $M_0\subset G$，(4) $\dot{V}$ 在 $[0, \infty)$ 上绝对连续，导数几乎处处有上界（或下界）；或者 x 在 G 中运动的速率 $v=\dfrac{ds}{dt}$ 有界，(5) $\dot{V}$ 广义负定，(6) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，则 M_0 是一个吸引子，G 属于 M_0 的吸引区．

证．由于 G 是不变集，故只要 $x_0\in G$，必有 $O^+(x_0)\subset G$，再考虑到条件(2)，(4)，(5)和(6)便可利用定理 2 得，当 $t\to\infty$ 时，$x(t, x_0)\to M_0$．从引理 2 知，M_0 是闭集，结合条件(3)并考虑到 G 是开集，故 $G\backslash M_0$ 是 M_0 的邻域．因此 M_0 是吸引子，G 属于 M_0 的吸引区．

推论 3. 对 $\mathscr{A}$ 中动力系统 u，$x_0\in G$，为了找到某一实数 c，使

$$\lim_{t\to\infty}\rho[x(t, x_0), M_0\cup V^{-1}(c)]=0,$$

只要如下五个条件得到满足：(1) V 是有界集 G 上的李雅普诺夫函数，(2) G 是某 G_a 的一个道路连续分支，(3) $\dot{V}$ 在 $[0, \infty)$ 上绝对连续，导数几乎处处有上界（或下界）；或者 $x(t)$ 在 G 中运动的速率 $v = \frac{ds}{dt}$ 有界，(4) $\dot{V}$ 广义负定，(5) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧.

证. 由推论 1 的证明过程可知，$x_0 \subset G$ 和条件 (2) 保证 $O^+(x_0) \subset G$. 因此，所有条件符合定理 2 的假设条件，故本推论成立.

推论 4. 在推论 3 的所有条件之外，再加上对每个 c，都有 $M_0 \cap V^{-1}(c)$ 只由有限个孤立点所构成的条件，则 $x(t, x_0)$ 必定随着初条件 x_0 的不同而趋向于孤立点之一，并且它必定是平衡点.

证. 由推论 3 得 $x(t, x_0) \to M_0 \cap V^{-1}(c)$. 若 $x(t, x_0)$ 不是趋向于孤立点之一，则必定有多于一个的极限点. 又由于 $x(t, x_0)$ 对 t 的连续依赖性，无论多大的 T，当 $t > T$ 时，为了使 $x(t, x_0)$ 从一个聚点附近达到另一个聚点附近，必定会在某一时刻 $t_0 > T$ 与各孤立点有大于某一正数 η 的有限距离，此 η 只取决于 $M_0 \cap V^{-1}(c)$ 的性质而与 t 无关. 这就与

$$x(t, x_0) \to M_0 \cap V^{-1}(c)$$

相矛盾. 这就证明了 $x(t, x_0)$ 必定趋向于孤立点之一.

这些被趋向的孤立点是某个 x_0 的 Ω 集，因而是不变集，故是平衡点.

五、渐近稳定性定理

Zubov 和 Movchan 所得到的稳定性、渐近稳定性和不稳定性定理，因为并没有利用度量空间的列紧性条件，因此对非局部列紧的度量空间中的动力系统是有效的，这里不再复述. 但是这里将利用上面给出的不变性原理把渐近稳定性定理的条件放宽，只要求 $\dot{V}$ 是半定的.

定理 3. 对 $\mathscr{A}$ 中动力系统 u，M_0 是渐近稳定的，如果如下的八个条件得到满足：(1) $G \subset \mathscr{A}$ 是有界开的不变集，(2) G 上存在李雅普诺夫函数 V，(3) $M_0 \subset G$，(4) $x(t)$ 在 G 中运动的速度 v 有界，(5) $\dot{V}$ 广义负定，(6) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，(7) V 在 M_0 的边界上为常数 c，(8) 若 $x_0 \bar{\in} M_0$，则 $x(t, x_0) \bar{\in} M_0$.

证. 由条件 (1)—(6)，利用推论 2 得 M_0 是吸引子，G 在 M_0 的吸引区中. 现在证明 M_0 是稳定的. 用反证法. 若 M_0 吸引而不稳定，则存在 $\varepsilon_1 > 0$，找到一点列 $x_n \to M_0$，的边界 $x(t, x_n)$ 必在某一时刻越出邻域 $N_{\varepsilon_1}(M_0)$，又在足够大的时刻回到 $N_{\varepsilon_1}(M_0)$ 中来，并且趋向于 M_0，这可分为两种情况：① 找到 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta > 0$，使 $\{x(t, x_n)\}$ 中有无限条在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度 $\geqslant \eta$；② 无论 $\varepsilon > 0$，$\eta > 0$ 多么小，$\{x(t, x_n)\}$ 中最多只有有限条在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度 $\geqslant \eta$.

先讨论情况 ①：将在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度 $\geqslant \eta$ 的那无限条仍记为 $\{x(t, x_n)\}$，对它们有

$$V(x(t, x_n)) - V(x_n) \leqslant \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_n)) d\tau.$$

令 $t \to \infty$，得

$$c - V(x_n) \leqslant \int_0^\infty \dot{V} d\tau.$$

因为 $\dot{V}$ 广义负定，故必存在 $\delta > 0$，使在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外有 $\dot{V} \leqslant -\delta$，所以上式化为：

$$c - V(x_n) \leqslant \int \dot{V} d\tau \leqslant -\delta \int \frac{ds}{v},$$

积分区域是

$$\rho(\bar{E},\ x(t,\ x_n)) > \varepsilon.$$

令 $x(t)$ 在 G 中运动的速率 v 的上界为 L，并考虑到 x 在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度 $\geqslant \eta$，故从上式得

$$c - V(x_n) \leqslant -\frac{\delta\eta}{L}.$$

在此式中令 $n \to \infty$，得 $x_n \to M_0$ 的边界，所以

$$c - c \leqslant -\frac{\delta\eta}{L}.$$

所得矛盾即证明了 M_0 是稳定的.

现在讨论情况②：此时，无论 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta > 0$ 是多么小，$\{x(t,\ x_n)\}$ 中总有无限条在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度小于 η. 因此，$\{x(t,\ x_n)\}$ 中有无限条在 $N_\varepsilon(\bar{E})$ 外运动的路径长度为零，即 $\{x(t,\ x_n)\}$ 中有无限条完全位于 $\bar{N}_\varepsilon(\bar{E})$ 上. 将完全位于 $\bar{N}_\varepsilon(\bar{E})$ 上的这无限条仍用 $\{x(t,\ x_n)\}$ 来表示. 这些轨道总在某一时刻 t_n 达到 $\rho[x(x_n,\ t_n),\ M_0] = \varepsilon_1$. 由于 $\bar{E}$ 的列紧性和 ε 的任意性，可以找到子列 $\{x_{n_j}, t_{n_j}\}$，使 $x_{n_j} \to x^0 \in M_0$ 的边界，$x(t_{n_j},\ x_{n_j}) \to y \in \bar{E}$，并且 $\rho(y,\ M_0) = \varepsilon_1$. 对这样得到的 $\{x_{n_j}\}$ 我们用 $\{x_j\}$ 来表示，t_{n_j} 用 t_j 表示. 对这一 $\{x_j\}$，定义

$$\gamma = \{z \mid \text{对某序列 } t_j\text{，当 } j \to \infty \text{ 时，} x(t_j,\ x_j) \to z \bar{\in} M_0\}$$

因为 $y \in \gamma$，故 γ 非空，并且 $y \in \bar{G} \backslash M_0$. 这里，当 $j \to \infty$，必定 $t_j \to \infty$ (如果 t_j 包含一个子列 $s_i = t_{j_i}$，$s_i \to s$，那末 $x(s_i,\ x_{j_i}) \to z = x(s,\ x^0)$，$x^0 \in M_0$，但 M_0 是不变集，故 $z \in M_0$，这与 γ 的定义矛盾). 当 $j \to \infty$ 时，$x(t + t_j,\ x_j) = x(t,\ x(t_j,\ x_j)) \to x(t,\ z)$，利用条件(8)，对任意 t，$x(t, z) \in \gamma$，故 γ 是不变集. 对 $z \in \gamma$，有

$$V(z) = \lim_{j \to \infty} V(x(\tau_j,\ x_j)) \leqslant \lim_{j \to \infty} V(x_j) = V(x_0) = c.$$

但是，由于 $x(t,\ z) \to M_0$，所以 $V(z) \geqslant c$. 所以在 γ 上，$V = c$. 又由于 γ 是不变集，故在 γ 上，$\dot{V} = 0$，因此 $\gamma \subset M_0$，这与 γ 的定义矛盾. 证毕.

定理 4. $\mathscr{A}$ 中的有界闭不变集 H 是渐近稳定的，如果如下的九个条件是满足的：(1) 有界开不变集 $G \supset H$，(2) G 上有函数 V_2 和李雅普诺夫函数 V_1，(3) $H \supset M_0$，(4) $\dot{V}_1$ 在 $[0,\ \infty)$ 上绝对连续，导数几乎处处有上界(或下界)；或者 $x(t)$ 在 G 中运动的速度有界，(5) $\dot{V}_1$ 广义负定，(6) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，(7) 对任何充分小的实数 $c_1 > 0$，存在 $c_2 > 0$，使得满足 $V_2(x) > c_2\ (x \in G \backslash H)$ 和 $\rho(x,\ H) > c_1$，(8) 对任意 $\gamma_2 > 0$，能找到 $\gamma > 0$，使当 $\rho(x,\ H) < \gamma_1\ (x \in G \backslash H)$ 时，$V_2(x) \leqslant \gamma_2$，(9) 当 $x \in G \backslash H$，V_2 非增.

证. 根据推论 2，条件(1)—(6)保证 M_0 是吸引子，G 是 M_0 的吸引区. 因为 $G \supset H \supset M_0$，所以 G 也是 H 的吸引区. 又按文献[2]定理 12，条件(7)—(9)保证 H 是稳定的，从而 H 是渐近稳定的.

定理 5. 将定理 4 中条件 1 改为如下条件： 存在 a，使 G 为 G_a 的道路联通分支，K 为开集，并满足 $G \supset K \supset H$，其余条件不变，H 是渐近稳定的.

证. G 为 G_a 的道路联通分支以及 V_1 的单调下降性保证 G 是不变集. 利用定理 2 可得，

当 $x_0 \in G$ 时，$x(t, x_0) \to M_0$，再利用 $H \supset M_0$ 得 $x(t, x_0) \to H$. 又由于 $G \supset K \supset H$，K 是开集，故 $K \backslash H$ 是 H 的邻域，从而 H 是吸引子，G 包含在 H 的吸引区内. 余下的证明与定理 4 的证明相同.

推论 5. 为了使孤立的平衡点 $x^{(e)}$ 是渐近稳定的，只要满足如下九个条件：(1) G 为某 G_a 的道路连通分支，K 为开集，且满足 $K \subset G$，$x^{(e)} \in K$，(2) G 上有函数 V_2 和李雅普诺夫函数 V_1，(3) $M_0 \equiv x^{(e)}$，(4) $\dot{V}_1$ 在 $[0, \infty)$ 上绝对连续，导数几乎处处有上界（或下界）；或者 $x(t)$ 在 G 中运动的速度 v 有界，(5) $\dot{V}_1$ 广义负定，(6) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，(7) V_2 在 $x^{(e)}$ 处正定，(8) V_2 在 $x^{(e)}$ 处有无穷小上限，(9) 当 $x \in G$，且 $x \neq x^{(e)}$ 时，V_2 非增.

在此推论中，如果 $V_1 \equiv V_2$，则条件(8)可改为 $V(x^{(e)}) = 0$，(9) 也被包括在 V_1 是李雅普诺夫函数的假定之内了.

推论 6. $\mathscr{A}$ 中动力系统 u 是全局稳定的，如果如下六个条件得到满足：(1) 在整个 $G \equiv \mathscr{A}$ 中存在无限大的李雅普诺夫函数 V，(2) $M_0 \equiv x^{(e)}$，(3) $\dot{V}$ 在 $[0, \infty)$ 上绝对连续，有上界(或下界)；或者 $x(t)$ 在 $\mathscr{A}$ 中运动的速度 v 有界，(4) $\dot{V}$ 广义负定，(5) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧，(6) V 在 $x^{(e)}$ 处正定，$V(x^{(e)}) = 0$.

证. 因为 G 上存在无限大 V 函数，因此任意 x 点出发的轨道将不可能走向 ∞，并必定趋向 E. 余下的证明就是应用推论 5 了.

五、不稳定性定理

不变性原理的要求条件较多，在证明下面的不稳定性定理时，条件可以宽一些. 下面的定理 6 是 Красовский 定理[5] 的推广.

定理 6. 令 $y \in \mathscr{A}$ 是一个平衡点，它包含在开集 G 之内，如果满足如下四个条件，则 y 不稳定:

(1) G 上存在李雅普诺夫函数 V，并且 $M_0 \cap G$ 中只含有 y，(2) V 函数在 y 点不是常正也不是正定的，$V(y) = 0$，(3) 在 G 上，$\dot{V}$ 广义负定，(4) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧.

证. 根据条件(2)，在 y 的任意小邻域 $N_\delta(y) \subset G$ 中一定可以选取点 x_0，使得

$$V(x_0) < 0. \tag{11}$$

取 y 的邻域 $N_\varepsilon(y) \supset N_\delta(y)$，但仍满足 $G \supset N_\varepsilon(y)$. 现在证明，由 x_0 决定的轨道 $x(t, x_0)$ 必定在 $t > 0$ 的某时刻越出 $\bar{N}_\varepsilon(y)$.

用反证法. 假设 $x(t, x_0)$ 永不越出 $\bar{N}_\varepsilon(y)$，因此 $x(t, x_0) \subset \bar{N}_\varepsilon(y) \subset G$. 由于条件(1)，像定理 1 的证明那样得到(3)和(4)式. 在(4)式中，由于 $\dot{V}$ 是非正的，所以

$$\lim_{t \to \infty} \dot{V} = 0,$$

故必存在序列 $\{t_n\}$，$\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \infty$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \dot{V}(x(t_n, x_0)) = 0. \tag{12}$$

又由于条件(3)以及 $x(t_n, x_0) \subset \bar{N}_\varepsilon(y)$，当 $n \to \infty$ 时，

$$x(t_n, x_0) \to E \cap \bar{N}_\varepsilon(y).$$

由于条件(4)，与引理 3 类似可证存在 $\omega \in \bar{E} \cap \bar{N}_\varepsilon(y)$，使得子列 $x(t_{n_j}, x_0) \to \omega$. 因此 $\Omega(x)$ 非空. 所以

$$\omega \in \Omega(x) \cap E \cap \bar{N}_\varepsilon(y). \tag{13}$$

根据引理1，$\Omega(x)$ 是不变集，故 $\Omega(x)\cap\bar{E}\subset M_0$，与(13)比较得 $\omega\in M_0\cap\bar{N}_\varepsilon(y)$. 可是由条件(1)知，$M_0\cap G$ 中仅含有 y，故 $M_0\cap\bar{N}_\varepsilon(y)$ 中也仅含有 y，所以 $\omega=y$. 另一方面，导出(3)式时，已知 V 随时间单调下降，结合(11)式得 $V(x(t_{n_j}, x_0))\leqslant V(x_0)<0$. 在此不等式中令 $j\to\infty$，由 $V(x)$ 的连续性得

$$V(\omega=y)\leqslant V(x_0)<0,$$

这与条件(2)矛盾. 证毕.

下面的定理7是 LaSalle 定理的推广，证法与定理6相仿.

定理7. 令 $y\in\mathscr{A}$ 是平衡点，U 是开集，$y\in\bar{U}$，并令 N 是 y 的球形邻域. y 是不稳定的，如果如下五个条件得到满足

(1) 在 $G=U\cap N$ 上存在李雅普诺夫函数 V，并且 $M_0\cap G$ 是空的或只含有 y，(2) 当 $x=y$，或 x 位于 G 的边界上并且 $x\in N$ 时，$V(x)=0$，(3) 当 $x\in G$，且 $x\neq y$ 时，$V(x)<0$，(4) 在 G 上，$\dot{V}$ 广义负定，(5) E 在 $\mathscr{A}$ 中相对列紧.

六、附　　注

如果我们找到函数 $W(x)$，使得 $\dot{V}(x(t))\leqslant W(x)\leqslant 0$（当 $t\in R_+$, $x\in G$），且 $W(x)$ 在 $\bar{G}$ 上连续，则本文所有的定理及推论中，均可以用 $W(x)$ 去取代 $\dot{V}$ 的位置而保持定理及推论仍有效. 只是要注意以下几点:

(1) 定义5中条件 $\dot{V}\leqslant 0$ 改为 $\dot{V}\leqslant W(x)\leqslant 0$.

(2) 定义6中 E 改为:

$$E=\{x\,|\,W(x)=0,\ x\in\bar{G}\}.$$

(3) (4)式改为: $\int_0^\infty W(x)d\tau>-\infty$.

(4) (5)式改为: $\lim\limits_{t\to\infty}W(x(t))=0$.

在定理的证明过程中，将不再出现 $\dot{V}$，而总是出现 $W(x(t))$.

用 $W(x)$ 来取代 $\dot{V}$ 的好处是，有时可以找到容易控制其行为的函数 $W(x)$.

参　考　文　献

[1] Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, Физматгиз., 1950.

[2] Zubov, V. I., *Methods of A. M. Lyapunov and Their Application*, Noordhoff, Amsterdam, 1964.

[3] Movchan, A. A., *Prik . Math. Meh.*, **23**(1959), 483.

[4] Барбашин, Е. А., Красовский, Н. Н., *ДАН СССР*, **86**(1953), 6: 3.

[5] Красовский, Н. Н., *ДАН СССР*, **101**(1955), 1.

[6] LaSalle, J. P., *J. Diff. Eqs.*, **4**(1968), 57.

[7] ————, *The Stability of Dynamical Systtems*, 1976.

[8] Шестаков, А. А., *Дифференц уравнения*, **15**(1979), 1909.

[9] Hale, J. K., *J. Math. Anal. Appl.*, **26**(1969), 39.

[10] Slemrod, M.. *J. Diff. Eqs.*, **7**(1970), 584.

[11] McShane, E., *Integration*, Princeton, Univ. Press, 1947.