第 16 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 16, No. 5
1984 年 9 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Sept., 1984

用形变理论分析结构塑性屈曲时的一类广义变分原理

李 国 琛
（中国科学院力学研究所）

提要 本文给出了用形变理论分析结构塑性屈曲时的一类广义变分原理，说明了它在本质上的势能意义．在广义变分形式下论证了塑性屈曲时无卸载的根据．最后在简化加筋板壳的分析中作了应用示例．

引 言

众所周知，在分析结构塑性屈曲时用形变理论来描述应力-应变关系比用 Prandtl-Reuss 的增量理论更相宜，结果与实验更为接近．

无论是弹性屈曲或是塑性屈曲，在计算分析时都要分两部进行．一是求屈曲前的基本路径解．二是要在这基本路径上各点判断是否存在有另外途径的解．在进行屈曲分析时，Hill[1] 用了"弹性比较固体"的模型，即屈曲的瞬时没有卸载．Hutchinson[2] 从 Hill[1] 的保证解的唯一性条件出发，分析由位移变量组成的二次泛函，进一步论证了这一问题．Bushnell[3] 用差分法计算了许多结构塑性屈曲问题，并称无卸载现象为"一致加载"条件．文献[3]还介绍了这一条件的历史由来．

塑性屈曲的计算比弹性的要复杂得多．为尽可能地简化问题，变分原理是一有利的工具．本文参照了 Reissner 在弹性条件下的广义变分原理[4]给出了用形变理论分析结构塑性屈曲时的一类广义变分原理．说明了所涉及的泛函及其二次变分的物理意义．进一步论证了在这一广义变分原理中运用"一致加载"条件的根据．最后，在应用于简化板壳结构的基本方程中显示了利用这一广义变分原理的优越性．

一、一类广义变分原理

设有广义势能为

$$\Pi = \int_v [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - V(\sigma_{ij})]dv - \int_{s_T} \overline{T}_i u_i ds_T \tag{1}$$

其中 σ_{ij} 为应力张量，ε_{ij} 为应变张量并与位移之间存在以下的已知关系，

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}$$

这里和以下各下标前的逗号代表对该下标的微分． $\overline{T}_i$ 是作用在 s_T 面上的已知外加应

本文于 1983 年 9 月 2 日收到．

力.

$$V = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_{kk})^2 + \frac{1+\nu}{3E}\sigma_e^2 + \frac{2}{3E}\int_{\sigma_r}^{\sigma_e}\phi\sigma_e d\sigma_e$$

这里

$$\sigma_{kk} = \delta_{ij}\sigma_{ij},\ \sigma_e = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}},\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\phi = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_s} - 1\right),$$

当 $\sigma_e \leqslant \sigma_r$ 时

$$\phi = 0$$

E、ν、E_s 和 σ_r 是材料的弹性模量、Poisson 系数、单向拉伸时的割线模量和屈服应力.

Π 的一次变分为:

$$\delta\Pi = \int_v \left[\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\partial V}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right] dv - \int_{s_T} \bar{T}_i\delta u_i ds_T \tag{2}$$

其中

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) + \frac{1}{2}(\delta u_{k,i}u_{k,j} + u_{k,i}\delta u_{k,j})$$

利用散度定理可以导出

$$\begin{aligned}\delta\Pi = &-\int_v \{\sigma_{ij,j} + (\sigma_{jk}u_{i,k}),\ j\}\delta u_i dv \\ &+ \int_v \left\{\varepsilon_{ij} - \left[\frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}) + \frac{\phi}{E}s_{ij}\right]\right\}\delta\sigma_{ij}dv \\ &+ \int_{s_T}\{[\sigma_{ij} + (\sigma_{jk}u_{i,k})]n_j - \bar{T}_i\}\sigma u_i ds_T \\ &+ \int_{s_u}\{\sigma_{ij} + (\sigma_{jk}u_{i,k})\}n_j\delta u_i ds_u = 0\end{aligned} \tag{3}$$

其中 n_j 为相对变形前的参考系在边界上向外的单位法线向量的分量. 不难看出,(3)式中的 Euler 方程即对应于熟知的平衡方程,形变理论的本构关系及边界条件.

上述(1)式在形式上与 Reissner[4] 在弹性体系下的相似但内容不同. 若继续进行二次变分运算并注意到此时 u_i 及 σ_{ij} 分别为独立的可变分量,于是 $\delta^2 u_i = \delta^2\sigma_{ij} = 0$, 由此可得:

$$\delta^2\Pi = Q = \int_v \left[\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\delta^2\varepsilon_{ij} + \left(\delta\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{kl}\right)\delta\sigma_{ij}\right]dv \tag{4}$$

其中

$$\delta^2\varepsilon_{ij} = \delta u_{k,i}\delta u_{k,j}.$$

以下对二次型的泛函 Q 中的 $\delta\sigma_{ij}$ 和 δu_i 做新的变分 δ^* (参见文献[8])则得屈曲时的各有关方程及边界条件. 注意到"一致加载"条件,于是在变分 δ^* 的过程中各应力、位移和塑性模量均不变. 有关"一致加载"条件在广义变分下的论证在下面还要谈及.

利用散度定理,由(4)式可以导出:

$$\delta^* Q = -2\int_v \{\delta\sigma_{ij,j} + (\delta\sigma_{jk}u_{i,k}),j + (\sigma_{jk}\delta u_{i,k}),j\}\delta^*(\delta u_i)dv$$
$$+ 2\int_v \left\{\delta\varepsilon_{ij} - \left[\frac{1}{E}((1+\nu)\delta\sigma_{ij} - \nu\delta\sigma_{kk}\delta_{ij})\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta\phi}{E}s_{ij} + \frac{\phi}{E}\delta s_{ij}\right]\right\}\delta^*(\delta\sigma_{ij})dv$$
$$+ 2\int_s \{\delta\sigma_{ij} + \delta\sigma_{jk}u_{i,k} + \sigma_{jk}\delta u_{i,k}\}n_j\delta^*(\delta u_i)ds = 0 \tag{5}$$

其中

$$\delta\phi = \frac{3}{2}\frac{\delta\sigma_e}{\sigma_e}\left(\frac{E}{E_t} - \frac{E}{E_s}\right), \quad \delta\sigma_e = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}\delta s_{ij}}{\sigma_e}$$

又 E_t 是单向拉伸时的切线模量．(5)式的 Euler 方程即对应于已知的屈曲时平衡方程，形变理论的增量形式本构方程及屈曲时的边界条件．

将 $\delta\varepsilon_{ij}$，$\delta^2\varepsilon_{ij}$ 与 δu_i 的关系式代入(4)式也可得：

$$Q = -\int_v \{\delta\sigma_{ij,j} + (\delta\sigma_{jk}u_{i,k}),j + (\sigma_{jk}\delta u_{i,k}),j\}\delta u_i dv$$
$$+ \int_v \left\{\delta\varepsilon_{ij} - \left[\frac{1}{E}((1+\nu)\delta\sigma_{ij} - \nu\delta\sigma_{kk}\delta_{ij})\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta\phi}{E}s_{ij} + \frac{\phi}{E}\delta s_{ij}\right]\right\}\delta\sigma_{ij}dv$$
$$+ \int_s \{\delta\sigma_{ij} + \delta\sigma_{jk}u_{i,k} + \sigma_{jk}\delta u_{i,k}\}n_j\delta u_i ds \tag{6}$$

比较(6)(5)两式可见，Q 与 $\delta^* Q$ 二者形式相似．这一点与弹性体系中一样[5,8]．于是当 $\delta^* Q = 0$ 时同时也将有 $Q = 0$，反之亦然．

至此证明了由式(1)的泛函 Π 的一次变分可以导出求解屈曲前基本路径解的各基本方程式，进一步对其二次变分进行新意义下的变分 δ^* 即可得出屈曲时的有关方程．

二、泛函 Π 和 Q 的物理意义

现将式(1)积分中的第一项分解为

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \int_0^{(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})} d(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) = \int_0^{(\sigma_{ij})}\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} + \int_0^{(\varepsilon_{ij})}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{7}$$

其中被积函数 ε_{ij} 可表示为应力的形式，σ_{ij} 则可表示为应变的形式．又(1)式中的第二项

$$V = \int_0^{(\sigma_{ij})}\frac{\partial V}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} \tag{8}$$

当 $\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial V}{\partial\sigma_{ij}}$ 成立时，代入(7)式可得

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - V = \int_0^{(\varepsilon_{ij})}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{9}$$

其右端项代表单位体积内的应变能．这样(1)式中的 Π 自然就等价于势能的定义．为此在一开始时本文就称之为广义势能．

为判断稳定性，由 Dirichlet 和 Kelvin 所提出的经典性的定义[6]为：如由任一种瞬息的挠动作用所造成的物体附加位移，在挠动本身是任意小时，其幅度也总可以是任意小的则物体是处于稳定状态. 反之，若任意小的某一挠动会导至有限幅度变化则为不稳定的. 显然，稳定性的充分条件是，在原平衡位置上附加任意无穷小位移时体系中所贮存的或耗散的内能应大于外力所作之功. 在本世纪三十年代时期 Trefftz[7] 和 Kappus[8] 也曾利用这一原理由能量形式导出弹性屈曲方程及判别稳定性的判据. 结合到本文的命题则应是，对任何任意小的挠动 $(\delta\sigma_{ij}, \delta u_i)$ 如 $\Delta\Pi > 0$ 是为稳定的，若 $\Delta\Pi < 0$ 则为不稳定的.

由 Taylor 级数展开可知，

$$\Pi + \Delta\Pi = \int_v \left[(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) \left(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2!}\delta^2\varepsilon_{ij} \right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\cdots \right) \right] dv - \int_{s_T} \bar{T}_i(u_i + \delta u_i) ds_T$$

这里 $\bar{T}_i$ 外应力并没有随挠动而变化因此是为“死载”条件. 将上式展开可得

$$\begin{aligned} \Pi + \Delta\Pi = & \left\{ \int_v [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - V] dv - \int_{s_T} \bar{T}_i u_i ds_T \right\} \\ & + \left\{ \int_v \left[\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\partial V}{\partial\sigma_{ij}} \right) \delta\sigma_{ij} \right] dv - \int_{s_T} \bar{T}_i \delta u_i ds_T \right. \\ & + \left\{ \frac{1}{2!} \int_v \left[\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\delta^2\varepsilon_{ij} + \left(\delta\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{kl} \right) \delta\sigma_{ij} \right] dV \right. \\ & + \cdots = \Pi + \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

由于 $\delta\Pi$ 已等于零，为此稳定与否取决于 $\delta^2\Pi(=Q)$. 若 $Q > 0$ 则为稳定的，若 $Q < 0$ 是不稳定的. $Q = 0$ 是稳定限，在稳定限上或称屈曲点上稳定性判据则有赖于对 Π 的更高阶变分，如 $\delta^3\Pi\cdots$，的研讨. 这就是说在 $Q = 0$ 点上既可以是稳定的也可能是不稳定的. 所以 $Q > 0$ 仅是稳定性判据的充分条件并不是必要的. 弄清了 $Q = 0$ 的意义又知 $Q = 0$ 对应着 $\delta^* Q = 0$，这就是由 $\delta^* Q = 0$ 可以导出屈曲方程的原因.

此外，为说明 $Q = 0$ 的条件与丧失解的唯一性之间的关系，可以作如下的解释. 如果在加载路径上解的唯一性丧失则必有另外的可能附加量 $\Delta\sigma_{ij}$ 和 Δu_i 并满足：

$$\Delta\sigma_{ij,j} + (\Delta\sigma_{jk}u_{i,k}),j + (\sigma_{jk}\Delta u_{i,k}),j = 0 \tag{11}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} - \nu\Delta\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \frac{\Delta\phi}{E}s_{ij} + \frac{\phi}{E}\Delta s_{ij} \tag{12}$$

$$\Delta T_i = (\Delta\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{jk}u_{i,k} + \sigma_{jk}\Delta u_{i,k})n_j = 0 \quad 在\ s_T\ 上$$

或

$$\Delta u_i = 0 \quad 在\ s_u\ 上 \tag{13}$$

如取

$$\Delta\sigma_{ij} = \delta\sigma_{ij}, \quad \Delta u_i = \delta u_i$$

可见(11)—(13)式与(5)式中的 Euler 方程相似. 这就是说，屈曲时就意味着解的唯一性的丧失，反之亦然. 所以屈曲点与解的唯一性的丧失有着必然联系. 但稳定性与唯一性之间却没有，因为屈曲不等于失稳.

简言之,屈曲、解的唯一性的丧失对应着 $Q=0$ 或 $\delta^* Q=0$; 稳定与否取决于 $Q>0$ 或 $Q<0$, 在 $Q=0$ 时则有赖于(10)中更高阶变分项的正负而定.

三、"一致加载"条件的论证

这里将 Hutchinson[2] 的论证推广到广义变分中可以按以下步骤来做.

在"死载"条件下,力(或位移)荷载的变化幅度是正比于一个参数而其分布与该参数无关. 前面已说明,稳定性的充分条件是 $Q>0$. 现将(4)式改写为

$$Q=\int_v\Big\{2\delta\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+u_{k,i}\delta u_{k,j})+\sigma_{jk}\delta u_{i,j}\delta u_{i,k} - \Big[\frac{1}{E}((1+\nu)\delta\sigma_{ij}-\nu\delta\sigma_{kk}\delta_{ij}) + \alpha\Big(\frac{\delta\phi}{E}s_{ij}+\frac{\phi}{E}\delta s_{ij}\Big)\Big]\delta\sigma_{ij}\Big\}\,dV \tag{14}$$

其中

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{塑性加载}\\ 0 & \text{弹性阶段}\\ 0 & \text{塑性加载后弹性卸载}\end{cases}$$

取一供比较用的固体,即弹性比较固体,并定义其二次型泛函

$$Q_c=(14)\ \text{式右端,但}\ \alpha=\begin{cases}1 & \text{塑性加载}\\ 0 & \text{弹性阶段}\end{cases}$$

显见这里的区别在于没有弹性卸载区. 为此,在已知的基本状态 (σ_{ij}, u_i) 上附加给定的任意一组微小挠动 $(\delta\sigma_{ij}, \delta u_i)$, Q 与 Q_c 的差别是

$$Q=Q_c-I_c \tag{15}$$

其中

$$I_c=\frac{1}{E}\int_{v_c}(\delta\phi_c s_{ij}+\phi_c\delta s_{ij})\delta\sigma_{ij}dV_c \tag{16}$$

下标 c 代表 Q 中可能存在的弹性卸载区. 将上述所给出的 ϕ 和 $\delta\phi$ 的表达式代入(16)可得:

$$I_c=\frac{1}{E}\int_{v_c}\left[\left(\frac{E}{E_t}-\frac{E}{E_s}\right)\Big|_c(\delta\sigma_e)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_s}-1\right)\Big|_c\delta s_{ij}\delta s_{ij}\right]dV_c$$

由于

$$\left(\frac{E}{E_t}-\frac{E}{E_s}\right)\Big|_c\geqslant 0,\ \left(\frac{E}{E_s}-1\right)\Big|_c\geqslant 0$$

于是 $I_c\geqslant 0$, $Q\geqslant Q_c$.

这也就是说,在物体的全部区域 V 中若附加某一挠动后恰好可以使塑性区保持为塑性的,弹性区保持为弹性的则 $Q=Q_c$. 否则,如果附加的挠动使 V_c 中出现弹性卸载区,会有 $Q>Q_c$. 因此,为求得最小的临界载荷参数可只需在 Q_c 范围内寻找相应的特征函数 $(\delta\sigma_{ij}, \delta u_i)$. 因为不可能有对应更小的临界载荷参数的其他特征函数分布可以使 $Q=0$ 而 Q_c 仍>0. 这就论证了"一致加载"条件在广义变分形式下依然成立.

四、在分析板壳结构中的应用

在薄壁板壳中，设应变，应力、平面位移及塑性参数沿壁厚方向 x_3 的分布可近似为：

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon_{\alpha\beta},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \delta\varepsilon_{\alpha\beta},\ \delta\sigma_{\alpha\beta},\ u_\alpha,\ \phi] \\
&\quad = [\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta},\ N_{\alpha\beta}/h,\ \delta\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta},\ \delta N_{\alpha\beta}/h,\ u^{(0)}_\alpha,\ \phi^{(0)}] \\
&\qquad + [K_{\alpha\beta},\ 12M_{\alpha\beta}/h^3,\ \delta K_{\alpha\beta},\ 12\delta M_{\alpha\beta}/h^3,\ w_{,\alpha},\ 2\phi^{(1)}/h]x_3
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 α、$\beta=1$ 或 2，h 为壁厚．将上式代入(1)，采用板壳中的应变-位移关系式[9]，沿 x_3 积分并利用散度定理后可以得到：

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = \int_s \Big\{&[N_{\alpha\beta,\beta}]\delta u^{(0)}_\alpha \\
&+ [M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}(w+w^{(i)})_{,\alpha\beta}]\delta w \\
&+ \left[\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{Eh}\left(C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}N_{\gamma\delta} + \frac{2}{h}C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta}\right)\right]\delta N_{\alpha\beta} \\
&+ \left[K_{\alpha\beta} - \frac{12}{h^3}\left(\frac{h}{6}C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}N_{\gamma\delta} + C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta}\right)\right]\delta M_{\alpha\beta}\Big\}ds \\
&+ \int_{L_T}[\cdots]dL_T + \int_{L_u}[\cdots]dL_u = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $w^{(i)}$ 为初始挠度，$b_{\alpha\beta}$ 为曲率张量又

$$\left.\begin{aligned}
C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (1+\nu)\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right] \\
&\quad + \phi^{(0)}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right] \\
C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \phi^{(1)}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

类似第一段中的作法，对 Π 的二次变分再施以新的变分 δ^*，在此将有：

$$\begin{aligned}
\delta^*(\delta^2\Pi) &= \delta^* Q \\
&= -2\int_s\{[\delta N_{\alpha\beta,\beta}]\delta^*(\delta u^{(0)}_\alpha) \\
&\quad + [\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \delta N_{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + \delta N_{\alpha\beta}(w+w^{(i)})_{,\alpha\beta} \\
&\quad + N_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta}]\delta^*(\delta w)\}ds \\
&\quad + 2\int_s\Big\{\left[\delta\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{Eh}\left(D^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta N_{\gamma\delta} + \frac{2}{h}D^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta M_{\gamma\delta}\right)\right]\delta^*(\delta N_{\alpha\beta}) \\
&\quad + \left[\delta K_{\alpha\beta} - \frac{12}{Eh^3}\left(\frac{h}{6}D^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta N_{\gamma\delta} + D^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta M_{\gamma\delta}\right)\right]\delta^*(\delta M_{\alpha\beta})\Big\}ds \\
&\quad + \cdots
\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
D^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (1+\nu)\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right] \\
&\quad + \phi^{(0)}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right] + \phi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
D^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \phi^{(1)}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right] + \phi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{9}{4}\left(\frac{E}{E_t}-\frac{E}{E_s}\right)\zeta_{\alpha\beta}\zeta_{\gamma\delta}=\phi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{2}{h}\phi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}x_3$$

$$\zeta_{\sigma\beta}=\frac{1}{\sigma_c}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right]\sigma_{\gamma\delta}$$

由上显见，(18)和(20)两式中的第三、第四个 Euler 方程对应着屈曲前和屈曲时的本构方程．又由(19)和(21)可见，联系广义应变与广义力之间的刚度矩阵是对称的．但在文献[10]中用其他办法推导时就未能得到矩阵对称性这一有利条件．

以上所述的板壳是属于相对中性面的上下截面为对称的情况．对于不对称的有筋条的截面则存在一个如何恰当地选取广义力以简化方程的形式的问题．

设有沿 x 分布的一筋条(略去其抗扭刚度)，其截面宽度是 $b(z)$，即沿厚度方向 z 宽度可以是变化的．截面上的应力、应变分布为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\left(\frac{N_x}{A_x}\right)+\left(\frac{M_x}{I_x}\right)z\\ \varepsilon_x&=\varepsilon_x^{(0)}+(K_x)z\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

其中 A_x, I_x 分别为截面面积和相对筋条截面中性面的惯性矩．

代入(1)式，经过运算可以得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi=-\int_x\Bigg\{&\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x+J\frac{M_x}{I_x}\right)\right]\delta u\\&+\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(I\frac{M_x}{I_x}+J\frac{N_x}{A_x}\right)+\left(N_x+J\frac{M_x}{I_x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w\Bigg\}dx\\&+\int_x\Bigg\{\varepsilon_x^{(0)}H-\Bigg[\frac{1}{E}\left(1+\frac{2\phi^{(0)}}{3}\right)\left(N_x+J\frac{M_x}{I_x}\right)\\&+\frac{2\phi^{(1)}}{3EH}\left(I\frac{M_x}{I_x}+J\frac{N_x}{A_x}\right)\Bigg]\Bigg\}\delta\left(\frac{N_x}{A_x}\right)dx\\&+\int_x\Bigg\{K_xI-\Bigg[\frac{1}{E}\left(1+\frac{2\phi^{(0)}}{3}\right)\left(I\frac{M_x}{I_x}+J\frac{N_x}{A_x}\right)\\&+\frac{2\phi^{(1)}}{3EH}\left(I\frac{N_x}{A_x}+G\frac{M_x}{I_x}\right)\Bigg]\Bigg\}\delta\left(\frac{M_x}{I_x}\right)dx+\cdots\end{aligned}\tag{23}$$

其中 H 为筋条自身的高度，又

$$A_x=\int_z b\,dz,\quad J=\int_z bz\,dz,\quad I=\int_z bz^2dz,\quad G=\int_z bz^3dz$$

设所选取的 z 坐标零点位置与筋条中性面相隔为 e (通常零点可取在板壳壁的中面上)，于是

$$J=A_xe,\quad I=I_x+A_xe^2$$

由(23)式可见，为尽可能地简化方程，尤其是平衡方程部分，可令新的广义力为:

$$N=N_x+J\frac{M_x}{I_x},\quad M=I\frac{M_x}{I_x}+J\frac{N_x}{A_x}$$

由此可解出:

$$N_x=\frac{IN-JM}{\left(I-\dfrac{J^2}{A_x}\right)},\quad M_x=I_x\frac{M-\dfrac{J}{A_x}N}{\left(I-\dfrac{J^2}{A_x}\right)}$$

代回(22)可得

$$\sigma_x = \frac{1}{I - A_x e^2}\left[\left(\frac{I}{A_x}N - eM\right) + (M - eN)z\right] \tag{24}$$

由上可见选取 N, M 为广义力虽然使应力和广义力的关系繁杂一些(如(24)比(22))但在平衡方程等部分可以得到简化.

五、结 论

所给出的用形变理论分析结构塑性屈曲时的一类变分原理不仅可应用于混合边界问题而且提供了简化供求解使用的方程的途径.

参 考 文 献

[1] Hill, R., A general theory of uniqueness and stability in elastic/plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids,* 6 (1958), 236.

[2] Hutchinson, J. W., *Plastic buckling, Advances in Appl. Mech.* (ed. by Chia-Shun Yih), **14** (1974), 67.

[3] Bushnell, D., Bifurcation buckling of shells of revolution including large deflections, plasticity and creep, *Int. J. Solids Structures,* **10** (1974), 1287.

[4] Reissner, E., On the Variational theorem in elasticity, *J. Math. Phys.,* **29** (1950).

[5] 李国琛，王自强，韩金虎，考虑屈曲前变形影响的圆柱曲板与圆柱壳体的弹性屈曲，«加筋圆柱曲板与圆柱壳»(中国科学院力学研究所固体力学研究室板壳组著)第 4 章，科学出版社 (1983).

[6] Hill, R., On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J. Mech. Phys. Solids,* **5** (1957), 229.

[7] Trefftz, E., Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts, Zeit. für Angew. Math. u Mech. B13 (1933), 160.

[8] Kappus, R., Zur elastizitäts theorie endlicher verschiebungen, Zeit. für Angew. Math. u Mech. B19 (1939), 344.

[9] 沃耳密尔，A. C. 柔韧板与柔韧壳(卢文达等译)，科学出版社 (1963).

[10] 李国琛，圆柱壳体的轴压蠕变屈曲，力学学报，1(1981)38.

A GENERAL VARIATIONAL THEOREM FOR THE STRUCTURAL PLASTIC BUCKLING ANALYSIS USING THE DEFORMATION THEORY

Li Guochen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Following the form given by Reissner in 1950 for elastic analysis, a general variational functional in plasticity is prescribed as Π in eq. (1). By setting its first variation $\delta\Pi$ due to the variation of (σ_{ij}, u_i) to zero, the Euler equations derived in (3) are proved to be the equilibrium equations, a deformation type of stress-strain relations and boundary conditions for the prebuckling fundamental path solution. As Kappus had done in 1939, a new variation δ^* can be imposed on $(\delta\sigma_{ij}, \delta u_i)$. Let $Q = \delta^2\Pi$, then from $\delta^* Q$ of eq. (5), the basic incremental equations are derived for the evaluation of critical loading and its corresponding buckling pattern. Comparing(5) and (6) it can be seen that whenever $\delta^* Q$ equals zero the same is Q or vice versa.

Form eqs. (7)—(9) it is shown that eq. (1) is essentially equivalent to the potential energy. According to the definition of Dirichlet and Kelvin, stability depends on whether $\Delta\Pi$ is positive or negative. Using the Taylor series expansion eq. (10) brings out that (a) if $Q > 0$, stable (b) if $Q < 0$, unstable (c) when $Q = 0$, buckling occurs, it is the limit of stability, the stability at this point relies on the sign of the higher variation term, e. g. $\delta^3\Pi \cdots$. On the other hand, when the uniqueness of the solution fails, then the possible incremental parts ($\Delta\sigma_{ij}$ and Δu_i) should satisfy eqs. (11)—(13), which are similar to the Euler equations in (5).

A comparison solid which has no unloading condition within the plastic region at the moment of buckling is introduced to solve the buckling problem. Application of the above theorem in the plate and shell problems is exemplified.