

一种非局部弹塑性连续体模型与 裂纹尖端附近的应力分布

虞吉林 郑哲敏

(中国科学技术大学) (中国科学院力学研究所)

提要 本文提出一种非局部弹塑性连续体模型。在这个模型中,应力与弹性应变之间为非局部线性关系,而塑性应变与总应变历史相联系。对于形变理论,假定塑性应变张量与总应变偏量张量成比例,其比例因子是总有效应变的标量函数。将这一模型用于分析幂硬化弹塑性材料拉伸型裂纹尖端附近的应力场,利用经典断裂力学中所得的拉伸型裂纹尖端 HRR 奇性解的结果,在一维简化计算下导出了裂纹正前方的拉应力分布和最大拉应力的表达式,证明临界 J 积分准则可由非局部最大拉应力准则得到。用已有的实验数据计算了几种钢材在裂纹起始扩展时裂纹尖端附近的最大拉应力,发现其量级与晶格内聚强度相近。所得结果对于理解材料断裂过程的物理机理是有益的。

一、引言

最近二十多年来,以经典线弹性力学和弹塑性力学为基础的断裂力学理论获得了迅速的发展,它为工程构件的安全设计、寿命估计以及工程材料的性能评价提供了新的理论基础,在指导工程实践中取得了很大的成功。

经典断裂力学是从 Griffith 提出并由 Orowan 推广的能量平衡准则发展起来的, J 积分的概念也是基于能量分析。这种能量准则回避了断裂过程的物理机理即裂纹尖端附近的应力和应变条件。事实上,按经典连续体力学,裂纹尖端将出现应力奇性。现已广泛使用的应力强度因子的概念以及幂硬化材料的 HRR 分析都是承认这个奇性的。然而,如果存在这种奇性,裂纹体将不能承受任何载荷。这一矛盾不能不说是经典断裂力学的一个主要不足之处。

曾经作了许多努力试图消除这种应力奇性,如 Dugdal^[1] 的线屈服带模型,Neuber^[2] 的曲率半径修正, Bilby 等人^[3] 的位错模型和 Atkinson 等^[4] 的超位错模型等。这些模型大部分是在经典理论基础上的局部修正,它们对某些实际问题是有用的,但物理基础则是含糊的。

也有人^[5,6]认为裂纹尖端总有一定的曲率半径,不存在理想尖锐裂纹。从细观看(μm 量级)也许事情确实如此。但是,断裂过程归根到底是原子键的破坏。从更精细的尺度看,塑性流动并不是均匀的,高应变水平时的位错分布呈现胞状结构(dislocation cell)。已有理论证明^[7],除了面心立方金属和碱金属以外,大多数金属中,在原子程度上尖锐的裂纹不会发生钝化,铁属于居中的情况。因此,尽管裂纹尖端附近可能有较大的塑性变形,

本文于 1984 年 1 月 16 日收到。

当精确到原子尺度时,裂纹尖端仍然可能是尖锐的.

事实上,材料是由离散的原子构成的,它有复杂的内结构.与连续场对应的物理量如位移、应变、应力等,只是在局部平均的意义上才能建立.当所考虑的物理现象的特征尺度与材料内结构的特征尺度可以相比较时,经典连续体力学必然会遇到困难.一个物理上更为合理的本构理论必须考虑到材料的内部结构.因此,自六十年代以来,发展了各种考虑材料微结构的连续体理论.在处理裂纹尖端和其它应力奇性问题时,由 Eringen 等人^[8,9]发展起来的非局部理论取得了很大的成功.

非局部理论认为,原子间的作用力是一种长程作用力,因此一点的应力状态不但与该点的应变和变形历史有关,还应与物体中所有其它点的应变和变形历史有关.也就是说,一点的应力是整个物体的应变场及其历史的泛函.

Eringen 及其同事用非局部弹性理论研究了理想单晶脆性材料裂纹尖端的应力场.研究表明:裂纹尖端的应力奇性并不存在,最大应力出现在裂纹尖端前方一个小距离处;并且,由这一理论确定的内聚应力与由原子理论和实验预言的内聚应力符合得相当好^[10].这就是说,裂纹体同样也符合最大应力断裂准则.按照非局部弹性理论,不需要引入在经典理论中物理意义不明的表面能,就可以直接从最大应力准则推出 Griffith 准则.因此,这一结果的物理意义是非常重大的.

本文进一步用非局部理论研究弹塑性材料中的裂纹问题.当涉及塑性变形时,应力状态还与变形历史有关.考虑一个金属晶体(单晶体或多晶体).在外载荷作用下,如果材料仅有弹性变形,则材料中相邻原子之间的距离相对其平衡位置仅有很小的偏离,一旦去掉外载荷,这些原子仍能回到其原来的状态.而塑性流动与晶体材料中位错的运动和增殖相联系,这就是说,材料的塑性变形意味着材料的原子排列即一些原子间的相对位置发生了永久性的变化,随着塑性流动的发展,每一时刻都有其新的平衡状态.由于外载荷的存在,各个原子间的距离相对于这个新的平衡状态有一个小的偏离.按照这一物理图象,应力与各别原子间的距离相对其当时的平衡状态的偏离即应变的弹性部分相对应.考虑到原子间的相互作用力是长程力,应力与弹性应变之间应该用非局部关系描述.而塑性应变则与平衡状态原子排列的永久性变化相对应,它应该与总应变的历史有关.基于小变形、塑性形变理论,本文建立了幂硬化材料的这种非局部弹塑性本构关系和基本方程组,并用它来研究拉伸裂纹尖端附近的应力场.利用经典断裂力学中得到的拉伸型裂纹尖端 HRR 奇性解的结果,在一维简化下导出了小范围屈服时裂纹尖端附近最大拉应力的表达式,证明经典断裂力学中的临界 J 积分准则可以从非局部弹塑性理论中的最大拉应力准则得到.用已有的实验数据计算了几种钢材在断裂时裂纹尖端附近的临界最大拉应力值,发现其量级与晶格内聚应力相近.最后对这一理论和结果的物理含义进行了讨论.

二、基本方程

本文将用应变空间来描述塑性本构关系.这是因为在物理上,如上一节所述,塑性变形与其说与应力有关,不如说与总变形有关.

按小应变理论,应变 ϵ 与位移 u 之间是线性关系,即

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

其中逗号后的下标表示对相应坐标的偏导数。

将应变分为弹性应变和塑性应变两部分

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

其中上标 e, p 分别表示弹性部分和塑性部分。假定弹性应变 ε^e 与应力 t 之间满足非局部线性关系^[8]

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V [\lambda'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{kk}^e(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2\mu'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{x}')] dV(\mathbf{x}') \quad (3)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecher 的 δ , λ' 和 μ' 为非局部模量, 重复下标表示对所有指标求和。假定塑性变形引起的材料内特征尺度变化和微观不均匀性等因素对非局部模量的影响可以忽略, 则 λ' 和 μ' 仅是位置 $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ 的函数。

在没有体积力时, 应力平衡方程为

$$t_{i,j,i} = 0 \quad (4)$$

为了讨论塑性本构关系, 引进应变偏量 \mathbf{e} 和弹性应变偏量 \mathbf{e}^e

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (5)$$

以及有效应变 $\bar{\varepsilon}$ 和有效弹性应变 $\bar{\varepsilon}^e$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}, \quad \bar{\varepsilon}^e = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^e e_{ij}^e} \quad (6)$$

与经典塑性形变(全量)理论相对应, 在应变空间描述下, 我们假定:

1. 体积应变是弹性的, 即 $\varepsilon_{kk}^p = 0$, 塑性应变仅与总应变的偏量部分有关。
2. 有效弹性应变是有效总应变的确定函数。
3. 塑性应变张量与总应变偏量张量成比例, 其比例系数是总应变的标量函数, 即

$$\varepsilon_{ij}^p = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) e_{ij} \quad (7)$$

引入名义局部应力 $\boldsymbol{\sigma}$, 它与弹性应变以经典广义 Hooke 定律相联系

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (8)$$

其中 λ, μ 为 Lamé 系数。定义有效名义局部应力

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (9)$$

其中

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (10)$$

为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的偏量部分。

考虑一个均匀变形体。显然, 这时名义局部应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与非局部应力(真实应力) \mathbf{t} 相等。因此, 对不可压材料, $\bar{\sigma}$ - $\bar{\varepsilon}$ 曲线与简单拉伸时的应力应变曲线相同。对于幂硬化材料, 有

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \sigma_y \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} \right) & \text{当 } \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y \text{ 时} \\ \sigma_y \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} \right)^n & \text{当 } \bar{\varepsilon} > \varepsilon_y \text{ 时} \end{cases} \quad (11)$$

其中 n 为应变硬化指数, σ_y 和 ε_y 分别为简单拉伸时的屈服应力和屈服应变. 注意到 $s_{ij} = 2\mu e_{ij}^e$, 上式可以化为 $\bar{\varepsilon}$ 与 $\bar{\varepsilon}^e$ 之间的关系

$$\frac{\bar{\varepsilon}^e}{\varepsilon_y} = \begin{cases} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} & \text{当 } \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y \text{ 时} \\ \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} \right)^n & \text{当 } \bar{\varepsilon} > \varepsilon_y \text{ 时} \end{cases} \quad (12)$$

按上述假定 2, 这一关系对于非均匀变形(此时 $t_{ij} \neq \sigma_{ij}$) 仍然成立. 由 (7) 式和 (12) 式可以解出

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{当 } \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y \text{ 时} \\ 1 - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} \right)^{n-1} & \text{当 } \bar{\varepsilon} > \varepsilon_y \text{ 时} \end{cases} \quad (13)$$

式 (1)–(7), (13) 就构成了在小变形、不可压假定下, 幂硬化材料非局部弹性-塑性形变理论的基本方程组. 同经典形变理论一样, 它只适用于简单加载或接近简单加载的情况.

三、平面应变情况下拉伸裂纹尖端附近的应力场

设在无限大平板中有一长为 $2a$ 的裂纹, 表面自由, 在无穷远处受到与裂纹面垂直方向上的均匀拉伸应力 t_∞ (图 1). 在裂纹尖端附近, 塑性应变比弹性应变大得多, 因此不可压假定近似成立. 如果局限于研究裂纹的起始扩展, 对于幂硬化材料, 形变理论也是适用的. 当塑性区尺寸比板的厚度小时, 可近似看作平面应变状态. 由问题的对称性, 我们只需要研究上半平面, 问题归结为二维情况下求方程组.

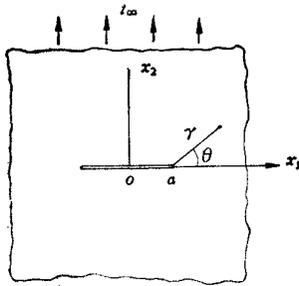


图 1 拉伸裂纹问题

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad t_{i,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \\ t_{ij} &= \int_V [\lambda'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{kk}^e(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2\mu'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{x}')] ds(\mathbf{x}') \\ \varepsilon_{ij}^p &= \begin{cases} 0 \\ \left[1 - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} \right)^{n-1} \right] \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在边界条件

$$\left. \begin{aligned} t_{11} = t_{12} = 0, \quad t_{22} = t_\infty, & \quad \text{当 } (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty \text{ 时} \\ t_{12} = t_{22} = 0, & \quad \text{当 } x_2 = 0, |x_1| < a \text{ 时} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad u_2 = 0, & \quad \text{当 } x_2 = 0, |x_1| \geq a \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下的解, 最后一个条件是从对称性得到的.

Eringen^[8] 证明了非局部模量可以表为

$$\lambda' = \lambda\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad \mu' = \mu\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (16)$$

其中 $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ 是 \mathbf{x}' 的非负函数, 具有下列性质:

1. 随着 $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ 的增大, $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ 很快趋于零.
2. 对经典弹性理论的极限情况, $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ 成为 Dirac 的 δ 函数.
3. $\int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = 1.$

通过与理想晶格模型比较, 可得

$$\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \begin{cases} K\left(1 - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{b}\right) & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq b \\ 0 & |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > b \end{cases} \quad (17)$$

其中, b 为晶格参数, $K = \frac{3}{\pi b^2}$ (二维) 或 $K = \frac{1}{b}$ (一维).

利用式 (16), 平衡方程 (4) 可改写为

$$\int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') = 0 \quad (18)$$

可以证明^[11], 如忽略表面张力的影响, 上式被满足的充要条件是

$$\sigma_{ii,j} = 0 \quad (19)$$

这表明, 关于名义局部应力的控制方程与经典理论完全一样. 因此, 如果忽略表面张力的影响, 对于给定位移边界条件问题, 由本文所述模型得到的位移场和应变场与经典弹塑性理论的结果相同, 但应力场则要用 (14) 式计算.

对于给定应力边界条件或混合边界条件问题, 一般说来上述结论是不成立的. 如果用经典应变场解来计算非局部应力场, 应力边界条件只能近似地满足. 尽管如此, 由于非局部效应所反映的微观尺度很小 (原子间距), 误差实际上只出现在按经典理论应力发生间断或出现奇异性的地方 (当然那里也往往正是我们感兴趣的区域). Eringen^[9] 对非局部弹性体中拉伸裂纹的计算表明, 这一误差随 $2a/b$ 的增大而减小, 当 $2a/b = 40$ 时 (相当于裂纹长度 $0.1 \mu\text{m}$ 左右), 最大拉应力的误差约为 10%. 实际裂纹要长得多, 误差会更小.

对于幂硬化材料, 按经典弹塑性形变理论, 裂纹尖端处应力和应变分别具有 $r^{-\frac{n}{1+n}}$ 和 $r^{-\frac{1}{1+n}}$ 奇性. 根据文献 [12], 对小范围屈服, 裂纹尖端附近的应力和应变场的主项可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_0^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{n}{1+n}} \sigma_y \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_0^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{n}{1+n}} \sigma_y \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_0^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{n}{1+n}} \sigma_y \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) \\ \varepsilon_{rr} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_0^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{1}{1+n}} \varepsilon_y \tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a l_\infty^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{1}{1+n}} \varepsilon_y \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a l_\infty^2}{I_n r \sigma_y^2} \right]^{\frac{1}{1+n}} \varepsilon_y \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 ν 为材料在弹性时的 Poisson 比, I_n 是一个与硬化指数 n 有关的常数 (见图 2), $\tilde{\sigma}_{rr}(\theta), \dots, \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta)$ 为与 $\sigma_{rr}, \dots, \varepsilon_{r\theta}$ 对应的角分布函数, 它们也与 n 有关. 不同 n 值时三个应力的角分布函数如图 3 所示.

如果认为式(21)也可以作为非局部弹塑性理论中应变场的一个可以接受的近似解, 则利用(20)式, 可从式

$$t_{ij} = \int_s \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') d_s(\mathbf{x}') \quad (22)$$

求出非局部应力场的近似解. 这是一个非常繁重的工作, 本文不准备对此作进一步研究. 可以看出, t_{ij} 将是有限的, 裂纹尖端的应力奇性不再出现.

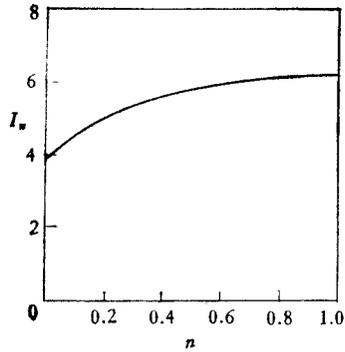


图 2 系数 I_n 与 n 的关系

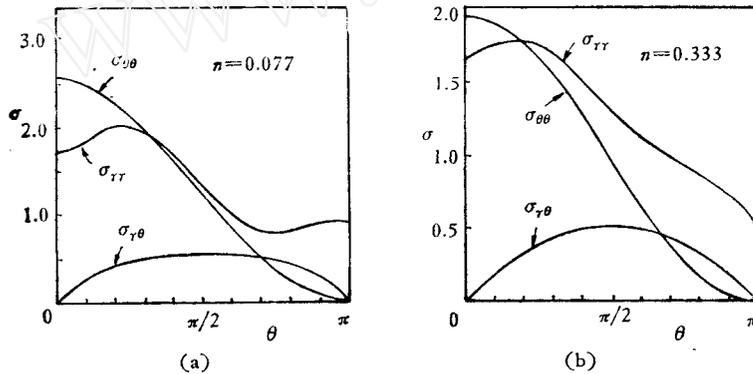


图 3 不同硬化指数时的应力随 θ 角分布 (引自 [12])

四、裂纹前方非局部拉应力的一维近似分析

为了对裂纹尖端非局部应力场的性状获得明确的物理图象, 本节我们将用一维简化公式即采用式

$$t(x) = \int_{x-b}^{x+b} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{|x' - x|}{b} \right) \sigma(x') dx' \quad (23)$$

来近似计算裂纹正前方的拉应力 (为了书写简便, 这里略去了下标). 这相当于假定沿 x_2 方向应力至少在原子间距尺度内不变, 非局部性仅沿裂纹方向起作用.

从式(20)和式(23)容易求出

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq x < a - b \text{ 时} \\ \frac{(1+n)^2}{2+n} \left(\frac{x-a}{b} + 1 \right)^{\frac{2+n}{1+n}} \sigma_0 & \text{当 } a - b \leq x < a \text{ 时} \\ \frac{(1+n)^2}{2+n} \left[\left(\frac{x-a}{b} + 1 \right)^{\frac{2+n}{1+n}} - 2 \left(\frac{x-a}{b} \right)^{\frac{2+n}{1+n}} \right] \sigma_0 & \text{当 } a \leq x < a + b \text{ 时} \end{cases} \quad (24)$$

$$\left[\frac{(1+n)^2}{2+n} \left[\left(\frac{x-a}{b} + 1 \right)^{\frac{2+n}{1+n}} - 2 \left(\frac{x-a}{b} \right)^{\frac{2+n}{1+n}} + \left(\frac{x-a}{b} - 1 \right)^{\frac{2+n}{1+n}} \right] \sigma_0 \right]$$

当 $x \geq a + b$ 时

其中

$$\sigma_0 = \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_\infty^2}{I_n b \sigma_y^2} \right]^{\frac{n}{1+n}} \sigma_y \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(0).$$

图 4 和图 5 给出了不同内结构尺度时的拉应力分布。

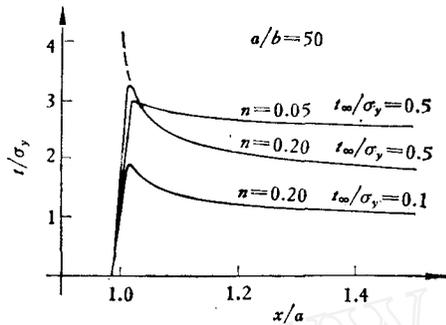


图 4 当 $a/b = 50$ 时裂纹前方拉应力分布
虚线表示 $n = 0.2, t_\infty/\sigma_y = 0.5$ 时的经典解

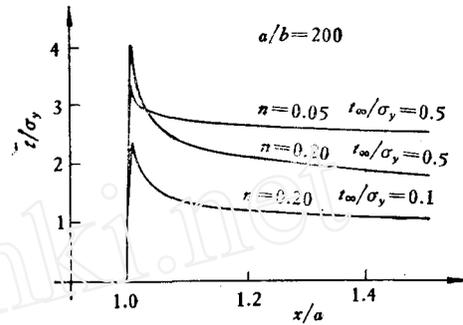


图 5 当 $a/b = 200$ 时裂纹前方拉应力分布

显然,只要 b 不为零,裂纹前方的应力总是有限的。最大拉应力出现在 $r = \frac{b}{2^{1+n} - 1}$ 处,为

$$t_{\max} = A_n \left[\frac{(1-\nu^2)\pi a t_\infty^2}{b \sigma_y^2} \right]^{\frac{n}{1+n}} \sigma_y \quad (25)$$

其中

$$A_n = \frac{(1+n)^2 \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(0)}{\left(1 + \frac{n}{2}\right) I_n^{\frac{n}{1+n}} (2^{1+n} - 1)^{\frac{1}{1+n}}} \approx \frac{0.91}{n + 0.31}$$

是一个与硬化指数有关的常数,如图 6 所示。由此得应力集中系数

$$P = \frac{t_{\max}}{t_\infty} = A_n \left[(1-\nu^2)\pi \frac{a}{b} \right]^{\frac{n}{1+n}} \left(\frac{t_\infty}{\sigma_y} \right)^{-\frac{1-n}{1+n}} \quad (26)$$

它不但与裂纹和内结构的相对尺度有关,还与材料的硬化指数以及外载荷和屈服应力的相对大小有关。这是塑性本构关系非线性的必然结果。

既然裂纹尖端附近的应力是有限的,从物理上我们便可以自然地建立起一个断裂判据:存在一个临界应力 t_c ,它是一个材料常数,当 $t_{\max} = t_c$ 时,裂纹将开始扩展。

(25) 式也可改写为

$$t_{\max} = A_n \sigma_y \left(\frac{JE}{b} \right)^{\frac{n}{1+n}} \quad (27)$$

式中 E 为杨氏模量。由于 n, A_n, b, σ_y, E 也都是材

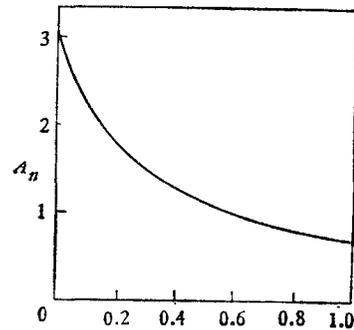


图 6 系数 A_n 随硬化指数 n 的变化

料常数, 因此从这一断裂判据可以直接得出经典弹塑性断裂力学中的临界 J 积分判据. 这就摆脱了引言中指出的经典断裂力学中的矛盾, 使得断裂的宏观力学模型与微观物理机理统一起来.

值得注意的是临界应力 t_c 的物理含义. 合金的准脆性断裂和韧性断裂过程要比单晶的脆断复杂得多. 一方面, 由于晶粒间界、合金元素以及不同金相结构的存在, 微观结构是不均匀的. 另一方面, 随着塑性变形的发展, 微观结构在不断发生变化. 尽管如此, 我们仍然可以期望, 临界应力 t_c 应该是经历了大的塑性变形后, 裂纹前缘各个原子之间的内聚力的某种平均值, 其量级应该与基体金属的晶格内聚强度接近(对多数金属来说, 约为 $0.1E$ 左右). 表 1 是根据已有的一些实验数据计算出来的几种钢材的 t_c/E 值, 其结果与

表 1 由几种材料的实验数据求得的临界应力与杨氏模量之比

钢 种	σ_y (MN/m ²)	n	J_c (MN/m)	t_c/E	数据来源
GCr 15	636	0.17	0.086	0.093	[13]
	451	0.21	0.046	0.104	
	411	0.21	0.030	0.091	
34 CrNiMo	1225	0.10	0.032	0.060	[6]
	1450	0.085	0.038	0.059	
30SiMnCrMo	980	0.12	0.119	0.073	[6]
	1156	0.11	0.117	0.073	[14]
	1156	0.10	0.119	0.064	
Fe-20%Co-15%Cr- 5%Mo (高纯)	1390	0.066	0.0413	0.046	[15]
	1580	0.058	0.0247	0.045	
	1750	0.051	0.0203	0.045	
	2110	0.034	0.0057	0.042	
Fe-20%Co-15%Cr- 5%Mo (高纯、脱氧)	2300	0.021	0.0018	0.040	[15]
	1590	0.076	0.0456	0.058	
	1810	0.070	0.0215	0.058	
	2140	0.050	0.0051	0.050	
	2360	0.033	0.0018	0.045	

上述分析很好吻合. 从这些数据可以看出, 对于具有相同成分的材料, 尽管屈服强度 σ_y 可有较大变化, 当断裂方式相同时, t_c 的值相对比较稳定, 其数值要比完整晶格的内聚应力小一些. 考虑到破坏前裂纹尖端附近已存在大量晶格缺陷、位错塞积造成了局部应力集中等因素, 这种降低是不奇怪的. 当然, 由于热处理条件不同, 材料的细观(显微)结构不尽相同, 上述各种因素影响的大小也不一样, 因此 t_c 值会略有变化. 表 1 中两种 Fe-20%Co-15%Cr-5%Mo 合金的数据反映了这种变化. 这些数据是按时效时间的增大自上至下排列的. 随着时效时间的增大, 残余奥氏体含量减小, 沉淀相增多, 因此原子间的结合力下降, 局部应力集中效应增强, t_c 略有减小.

五、讨论和结论

1. 尽管本文只给出了塑性形变理论下的本构关系, 其基本思想同样适用于其它类型

的塑性本构关系。无论采用哪一种本构假定, 都需要用应变空间来描述。这在形式上可以利用经典理论中应力与弹性应变之间的对应关系, 将应力转换为弹性应变。这样处理的结果同时也保证了当非局部模量中的内尺度趋于零时, 现在的模型与相应的经典模型完全一致。

2. 与 Eringen^[6] 最近提出的非局部塑性理论不同, 本模型没有考虑塑性本构关系的非局部性。这是因为与塑性变形有关的物理特征尺度远大于所考虑的非局部弹性的特征尺度(原子间距)。相对于原子间距这个尺度, 塑性变形是高度非均匀的。从另一个角度看, 也可以说, 一个点的塑性变形具有某种随机的性质。因此, 精确到原子尺度时, 应该把塑性应变的连续化描述理解为所考察点邻域内实际变形的各种可能性的统计平均。而塑性应变与应力间在物理上的联系主要表现为由于位错增殖造成的内应力, 它在统计平均的意义上是等于零的。因此宏观上塑性应变并不直接与应力相联系。但在微观上, 这种内应力导致平均内聚强度的下降。在数学上, 本文所提出的模型使得基本方程中非局部性(弹性本构关系)与非线性(塑性本构关系)解耦, 从而有可能比较方便地应用于实际问题。

3. 严格地说, 在裂纹尖端附近的断裂过程区内, 大应变造成的几何非线性不容忽视, J 积分也仅在过程区外才适用。因此, 将整个区域都按小应变线性理论处理会造成一定的误差。尽管如此, 本文所建议的非局部弹塑性理论能够把断裂的宏观力学模型与微观物理机理在一定程度上统一起来, 而且得到的临界断裂应力在量级上与晶格内聚应力相近, 这对于理解材料断裂过程的物理机理是有益的。

4. 金属物理中从细观水平讨论了微结构因素如二相粒子体积分数、粒子尺寸、杂质间距等对断裂韧性的影响。在现在的模型中, 这些因素主要通过 σ_y 和 n 的改变即裂纹前方塑性变形状态的变化来影响材料的断裂韧性。

5. 金属的断裂问题同时涉及到三个不同的层次: 宏观、细观和微观。本文仅在建立微观与宏观之间的联系方面作了一些尝试。从细观方面看, 有许多物理因素有待于进一步考虑。要弄清临界内聚应力对于合金成分、金相、显微结构等细观因素以及描述塑性变形程度的硬化指数、破坏应变等宏观参数的依赖关系, 还需要做大量细致的理论和实验研究工作。

参 考 文 献

- [1] Dugdale, D. S., *J. Mech. Phys. Solids*, **8**, 2(1960), 100—104.
- [2] Neuber, H. Z., *Kerbspannungslehre*, (1937), 中译本, 诺埃伯, 应力集中, 赵旭生译 (1958).
- [3] Bilby, B. A., Cottrell, A. H. and Swinden, K. H., *Proc. Roy. Soc. London*, **A272** (1963), 304—314.
- [4] Atkinson, C. and Kay, T. R., *Acta Metallurgica*, **19**, 7 (1971), 679—683.
- [5] Rice, J. R. and Johnson, M. A., *Inelastic Behavior of Solids*, ed. M. F. Kanninen et al., (1970), 641—670.
- [6] 陈旻, 金属断裂研究文集, 陈旻等著 (1978), 135—156.
- [7] Rice, J. R. and Thomson, R., *Philosophical Magazine*, **29** (1974), 73—97.
- [8] Eringen, A. C., *Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics*, ed.

- P. T. Christensen (1974), 81—105.
- [9] Eringen, A. C., Spezial, C. G. and Kim, B. S., *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), 339—355.
- [10] Eringen, A. C., *Crystal Lattice Defects*, 7 (1977), 109—130.
- [11] Eringen, A. C., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 10 (1977), 671—678.
- [12] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1 (1968), 13—31.
- [13] Hong, Y. (洪友士), Yeh, Y. (叶裕恭) and Xia, X. (夏小欣). *Mechanical Behavior of Materials-IV* (ICM4), ed. J. Carlsson et al. 2 (1983), 849—855.
- [14] 陈镜等, 金属断裂研究文集, 陈镜等著 (1978), 92—108.
- [15] Musiol, C. and Brook, R., *Eng. Fract. Mech.*, 9 (1977), 379—387.
- [16] Eringen, A. C., *Int. J. Eng. Sci.*, 19, 12(1981), 1461—1474.

A MODEL OF NONLOCAL ELASTIC-PLASTIC CONTINUUM APPLIED TO THE STRESS DISTRIBUTION NEAR A CRACK TIP

Yu Jilin

(University of Science and Technology of China)

Zheng Zhemin

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A model of nonlocal elastic-plastic continuum is proposed. The stress and the elastic strain are related by a nonlocal linear relation, and the plastic strain is dependent on the history of total strain. For plastic deformation theory, it is assumed that the plastic strain tensor is proportional to the total strain deviation tensor and the ratio is a scalar function of the effective total strain.

This model is used to analyse the stress field at the tip of a crack in a power-law hardening material under plane strain condition. Based on the results of HRR asymptotic solution in classical fracture mechanics, the distribution of tensile stress on the line directly ahead of a crack tip and the expression for maximum tensile stress are calculated under one-dimensional simplification. It is shown that the J_c criterion may be obtained from the maximum tensile stress criterion of the nonlocal theory. Available experimental data for steels are used to calculate the maximum tensile stress of fracture initiation at the crack tip, which is found to be close to the theoretical cohesive strength. The results obtained are useful for understanding the fracture process and mechanism of materials.