

旋转力学系统的长期稳定性及其工程应用

徐 硕 昌

(中国科学院力学研究所)

一、引 言

旋转力学系统包括各类陀螺仪、机械转子和各类飞行器(火箭,卫星和行星际站)等。另外,各种天体都普遍作着多种多样的旋转运动,例如地球、行星的自转和绕太阳的公转,恒星和星系的旋转,这些都属于旋转力学系统的研究范畴。

Thomson 和 Tait 最早指出旋转系统具有长期稳定性和动力稳定性之重要区别^[1]。对于旋转力学系统的准稳演化过程或者要求其定常运动状态长时间维持的情形,到底应按这两种稳定性中那一种判断是一个长期存在争论的问题。

这场争论要追溯到 Newton 关于地球形状的研究和 Laplace 星云假说的提出。这个问题的历史背景,以及它和 Columbus 问题,天体形状理论研究,天体演化研究关系可参阅作者的论文^[2-4]。

在这些研究中,我们基于长期稳定性概念,证明了二类陀螺仪的稳定准则。它们是存在能量耗散情形的刚体迴转稳定准则和液体转子陀螺仪稳定准则。本文着重介绍这两个准则的工程应用。

近一个世纪来, Kelvin 的流体转子陀螺仪实验结果的分析一直是科学家感兴趣的研究课题^[4,5]。但无论是 Poincare 和 Жуковский 等的经典理论还是苏联和欧美学者的新近理论的结果都与实验不符。我们考虑粘性影响后,按长期稳定性处理得到和 Kelvin 实验完全一致的结论,才算揭开这个谜底^[2]。

本世纪六十年代,流体转子陀螺仪被重新重视起来了。它作为一种新型陀螺仪被欧、美国家许多公司研制和成批生产^[5]。但按刚性转子或按理论流体转子处理所建立的工程理论均与实验事实不符。只有按长期稳定性处理才建立较完善的流体转子陀螺仪稳定理论。

1958 年美国发射 Explorer-1 卫星设计通过绕最小惯量主轴(长轴)自旋实现姿态控制,但卫星飞行仅几小时就发生翻滚。后来,在 1963 年发射第一颗通讯卫星 Syncon-1 号改为绕短轴自旋才成功的实现姿态控制。西德发射“交响乐”通讯卫星开始由于火箭液体燃料室设计不合理致使发射失败。这些事实激发了研究旋转系统长期稳定的新高潮。只有基于长期稳定性概念才找到应用自旋实现姿态控制的理论依据。

二、长期稳定性和动力稳定性

力学系统的平衡状态在现实生活中是否存在依赖于对于初始小扰动的反应,如果小扰动随时间衰减,这种平衡状态就称是稳定的;反之,如果小扰动随时间增长就称为是不稳定的。

众所周知,对于力学系统的静平衡状态,Lejeune-Dirichlet 定理表明系统的稳定的充要条件是

势能取极小值。对于旋转力学系统增加两种力：一种是惯性离心力（有势力）；另一种是 Coriolis 力，Thomson 等称为迴旋力或陀螺力。他们详细研究了各种旋转机械系统的稳定问题，发现耗散对系统稳定性影响是非常重要的：“当存在任意耗散时，在零位置的平衡是否稳定取决于具有相同势力而没有运动力的相同系统是否稳定。正如迴旋器那样，当没有耗散时，我们着手研究的陀螺力能变不稳定状态为稳定状态，但是当存在任意的耗散时，陀螺力能立刻使不稳定位形消失似乎转变为螺旋运动，不过当存在任意耗散时，陀螺力就不能变不稳定情形成为稳定情形。”在这里，他们明确指出了：陀螺力（Coriolis 力）在不考虑耗散时具有稳定作用，此时对应动力稳定性，在考虑耗散时，陀螺力就不再具有稳定作用，这时稳定完全由总势能是否取极小所决定，这时的情形称为长期稳定情形。

Lamb 列举了一些简单机械运动的例子来解释 Thomson-Tait 上述思想。其中一个最简单而又说明问题的例子是：在一个绕垂直方向以恒定角速度旋转的球碗中，放置一个小球。如果碗是完全光滑的，小球在最低平衡位置（零位置）是动力稳定平衡状态；但在碗和小球间存在任意微弱摩擦（事实上总是存在的），当角速度超过某确定值，小球将沿螺旋线向外直至达到长期稳定平衡位置，在此处总势能（包括重力势和离心力势）成为极小，这是一个真实的平衡位置^[4]，参看图 1。

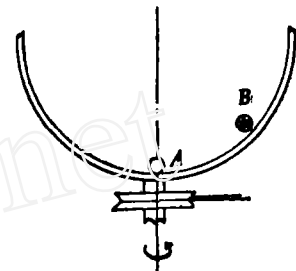


图 1 旋转球碗中小球的平衡
A—动力稳定情形 B—长期稳定情形

在旋转力学系统稳定理论中，通常把没有考虑粘性由小扰动法导得的稳定条件称为是动力稳定条件，此时认为 Coriolis 力有稳定作用；把考虑粘性影响直接按总势能取极小得到的稳定条件称为长期稳定条件。

在以往的理论中，通过直接求解运动方程，考虑粘性只能处理二个自由度问题，这时本征值方程是四次代数方程；处理 3 个自由度问题要解六次代数方程就无能为力了。

文献[4]概述了作者对于旋转液体星和 Columbus 问题这两个经典问题的研究。从理论和实验两方面论证了长期稳定性的真实性，澄清一些长期存在争论的问题。本文介绍这些结论在陀螺仪技术和飞行器姿态控制等工程方面的应用。

三、陀螺仪迴转稳定准则

陀螺仪具有保持空间给定方向的特性，被广泛应用于船舶、飞机、火箭及宇宙飞行器等的控制系统。

旋转的刚体是怎样产生维持定向的稳定效应？这是从十七世纪以来就一直吸引科学家和工程师的研究课题。陀螺仪的名称是 Foucault 在 1852 年最先引入的。对于陀螺仪的经典动力学理论——刚体的定点运动理论，Euler 和 Poisson 早已开始了深入研究。

按经典刚体动力学理论，任意形状刚体的旋转运动都可以用一个等效椭球代替（设椭球体的主轴半径 a, b, c 满足 $c < b < a$ ）。如果不计耗散影响，刚体只有绕最大惯量主轴（ c 轴）和最小惯性主轴（ a 轴）旋轴是稳定的。而绕中间轴旋转是不稳定的（图 2）。

在十八世纪七十年代，Thomson 和 Tait 建立了更为广泛适用的陀螺系统理论^[6]。他们把陀螺仪作为一个受陀螺力作用的 n 个自由度的机械系统处理。证明了如下陀螺仪迴转稳定准则：

- (1) 唯有不稳定自由度的数目是偶数的系统，才可能有迴转仪的稳定作用；
- (2) 如果系统中无阻尼作用，那末借助于足够强大的迴转仪总可以使偶数个不稳定的自由度稳定，反之，如果系统中有带阻尼的自由度，那末要使系统获得稳定作用的可能，必须具有人工扰

动自由度。

将上述准则容易解释图 2 所示三种情形：(a) 静平衡是稳定的，没有不稳定自由度，故旋转是稳定的；(b) 静平衡有一个不稳定自由度，故旋转是不稳定的；(c) 静平衡有两个不稳定自由度，故旋转能变不稳定状态为稳定状态。

后来，Чераев 应用 Ляпунов 稳定理论证明存在耗散作用下的线性迴旋系的稳定准则，即著名的 Kelvin-Tait-Цераев 定理：“力学系统在稳定平衡位置附近的受扰运动（在这种平衡位置处，作用力的位置函数具有极小值）是有振动性的，反过来也一样。添加散逸力时，不会影响物质系统在位势力作用下所具有的平衡……”^[8]。

将上述定理应用于椭球体的旋转运动，情形 (c) 平衡位置的势能具有极大值，计及耗散影响后也将是不稳定的。这就是说，不计耗散影响时，情形 (c) 只对应动力稳定情形；只有情形 (a) 是长期稳定的。KTC 定理只是在线性假设下被证明。在考虑非线性效应后，KTC 定理是否还成立？仍然成立。这就是我们所证明的耗散情形下的刚体迴转稳定准则^[9]：对于弱非线性情形，在能量耗散存在条件下，刚体迴转运动只有绕最大惯量主轴（短轴）旋转才是稳定的。

对于陀螺仪设计，这个准则提出一个明确的指导思想：转子必须设计成扁形的。所含物理意义是明确的：在能量耗散影响下，长形陀螺仪变成不稳定，无耗散情形的规则进动将变成沿螺旋线向外倾倒；但耗散使扁形陀螺仪变得更稳定，无耗散情形的规则进动将变成渐近稳定。

这些结论就是长期稳定概念在陀螺仪设计中具体运用，陀螺仪的运动稳定与否必须按长期稳定性判定。这些结论已为陀螺仪技术的研制者所肯定^[9]。

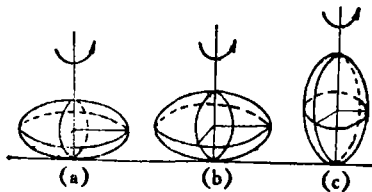


图3 Explorer-1号的外形

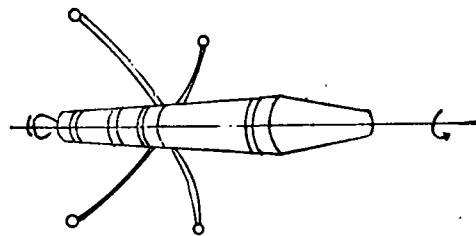


图2 椭球体 ($c < b < a$) 的三种情形
(a)、(c) 稳定的旋转情形 (b) 不稳定的旋转情形

四、在空间飞行器姿态控制中的应用

利用自旋稳定作用实现飞行器姿态控制是一种在空间探索计划中得到广泛应用的技术，但美国在开始实施这种技术时却遭到失败。美国发射第一颗卫星 Explorer-1 号（外形见图 3）设计用绕长轴自旋来控制姿态，但进入飞行仅几小时就发生翻滚。

当时，Stanford 大学的 R. N. Bracewell 和 O. K. Garrioff 提出解释，认为 Explorer-1 号绕最小惯量主轴（长轴）自旋，四根鞭状天线是耗能的，因此使自旋轴转变成绕最小惯量主轴旋轴。后来，Garrioff 作为一名宇航员还在天空实验室飞行中作了一个简单实验来验证这种现象。

美国科学家按上述直观猜测，在 1963 年发射第一颗通讯卫星 Syncon-1 号（外形见图 4）把自旋轴变为短轴来控制姿态，结果成功了。

在文献 [10] 中所给出的论证只有推理式的，并不是严格证明。这个结论的严格证明由我们在文献 [9] 中给出，这就是基于长期稳定概念所建立的能量耗散条件下的刚体迴转稳定准则。它为利用自旋稳定实现姿态控制提供了理论依据。美国 Explorer-1 号绕小惯量主轴（长轴）自旋失稳的事实和第一颗通讯卫星 Syncon-1 号绕最大惯量主轴自旋取得姿态控制的成功都能依据这一准

则得到合理的解释。详细分析参看文献[9]。

在六十年代,西德开始发射“交响乐”通讯卫星时由于火箭流体燃料舱设计不合理失败了^[11]。在轨道中的空间飞行器也有流体燃料舱,如何通过自旋实现这类飞行器姿态控制?这个问题刺激了最近三十年“充液腔体运动和稳定理论”研究的发展。Columbus 问题和这个问题具有相同理论基础。我们基于长期稳定概念建立的“流体系统的迴转稳定准则”为解决这个工程问题提供理论依据。

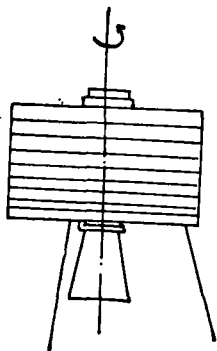


图4 Syncon 号的外型

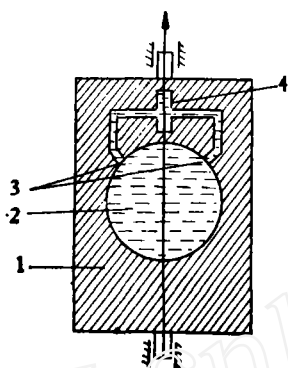


图5 流体转子陀螺仪 SYG-2000 结构图
1——固体壳 2——氟化碳液体 3——孔
4——压力传感器

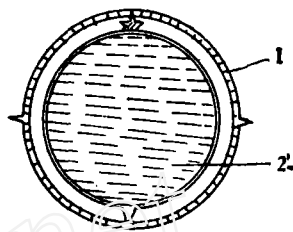


图6 Kelvin 流体转子陀螺仪
1——框架 2——液体转子

五、流体系统迴转稳定准则及其应用

“充液腔体运动和稳定理论”的研究来源于 Newton 关于地球形状理论的研究^[1]。Kelvin 流体转子陀螺仪实验理论分析是这个学科中的一个经典课题。这项实验是长期稳定性真实性最有力的证明^[2]。

在本世纪六十年代出现了一种新型的流体转子陀螺仪。美国许多公司进行了这项研制。图 5 是 Sperry 公司 1963 年成批生产的一种流体转子陀螺仪、型号为 SYG-2000。

这种陀螺仪关于空间位置信号的载体不是刚体而是旋转的流体。流体转子陀螺仪具有一系列优点,例如:在支承中不存在干摩擦,没有由于零件磨损和零件晶体结构变化而造成的不平衡力矩,在陀螺仪的许多结构中,自动地保持转子理想的平衡等。它装置在转动空间飞行器上,没有必要采用专门的电机驱动转子,所以消耗功率小。缺点是灵敏度不高。

在国外文献中,处理流体转子陀螺仪的工程理论一般是采用这样的做法:或者用具有与液体同样形状和容度的刚体转子代替液体转子,并把粘性力矩看成外力矩;或者将液体看成处于刚性绝热壳内的理想流体处理。按理想流体处理的流体转子陀螺仪理论是以 Жуковский 等效原则为基础的, Жуковский 证明了腔内理想流体的运动等效于一个刚体的运动。这实质上是认为流体转子陀螺仪和刚体转子陀螺仪稳定特性是相同的,对应于图 2 所示情形。

Kelvin 流体转子陀螺仪实验是这样做的(装置见图 6)薄椭球壳用两个钢半球壳焊接敲制而成,中间充满水,陀螺是用飞轮连接转子顶部的 V 形滑轮来转动。他制作了两套扁长不同的流体转子陀螺仪,一套 $\frac{c}{a} = \frac{9}{10}$,另一套 $\frac{c}{a} = \frac{10}{9}$ 其中 c 为极半径, a 为赤道半径。实验结果表明,只有扁形转子 ($c < a$) 才是稳定的,稍长一点 ($c > a$) 就不稳定。

按理想流体模型分析实验的 Poincare 和 Жуковский 的经典理论导得稳定条件是 $c > 3a$ 或

$c < a$; 不稳定条件是 $a < c < 3a$, 理论结果和实验不符. 这个实验结果证明 Жуковский 等效原则是虚假的, 即忽略粘性的动力稳定性是虚假的. 当然, 把流体转子按刚性转子处理就更成问题了. 在我们的研究中^[2], 按考虑粘性的长期稳定性处理, 理论结果和实验精确一致. 理论依据就是流体系统的迴转稳定准则: “当流体系统绕最大惯性主轴(短轴)旋转时, 流体系统才具有迴转稳定效应.” 我们是在弱非线性假设下, 应用 Ляпунов 方法证明这个稳定准则的.

在图 5 所示的 Sperry 公司生产的流体转子陀螺 SYG-2000 把转子设计成球形是不合理的. 漂移大的原因可能就在于此, 我们认为把转子改为扁形将肯定会提高精度. 这是因为, 扁形转子的陀螺仪发生扰动后, 耗散会自动抑制扰动, 使陀螺恢复到未扰动的平衡转动状态, 而球形转子是中性稳定状态.

还有很多工程问题涉及到充液腔体运动稳定, 例如用液体燃料的火箭, 各类飞行器和行星际站等. 如何通过自旋来达到各类流体系统的稳定, 流体系统的迴转稳定准则具有一定指导作用.

六、结 论

如果旋转力学系统是按无限缓慢变化的准稳态过程演化或者其定常运动状态被要求长时间维持的情形, 例如卫星的姿态控制和作为自动控制部件的陀螺仪等, 都必须按长期稳定性判断.

基于长期稳定性概念建立的能量耗散情形的刚体迴转稳定准则和流体系统稳定准则对这些工程问题具有一定理论指导作用.

参 考 文 献

- [1] Lamb, H., Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge (1932).
- [2] 徐硕昌, 自然杂志, 1(1982), 22—24; 中国科学, 3(1982), 254—264.
- [3] 徐硕昌, 中国科学, 7(1981), 665—674.
- [4] 徐硕昌, 力学进展, 3(1983).
- [5] П. И. 马列耶夫, 新型陀螺仪, 国防出版社(1974).
- [6] Thomson, W. & Tait, P. G., Treatise on Natural philosophy, 2d ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge(1912).
- [7] R. 格兰曼, 回转仪的理论及其应用(上册), 科学出版社(1959).
- [8] Н. Г. 契塔耶夫, 运动的稳定性, 国防出版社(1959).
- [9] 徐硕昌, 论刚体的迴转稳定准则及其应用, 1982年全国非线性力学学术会议论文集.
- [10] M. H. 卡普兰, 空间飞行器动力学和控制, 科学出版社(1981).
- [11] Pfeiffer, F., Raumfahrt Forschung, 5(1972).
- [12] Мойсеев, Н. Н., Руменцев, В. В., Динамика Тела с Полостями Содержащими жидкость, «Наука» (1965).

(上接第17页)

原结构齿根为直角连接, 导致根部应力集中(方案 I), 后改为圆弧 ($k = 6\text{mm}$) 过渡(方案 II), 使应力值大为降低(方案 II 未作试验).

表中 σ 为“能量理论”中的等效应力, 按下式定义:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

张仁纯副教授对本文提出了很有价值的建议, 并和吴连元讲师、仇振德、袁国栋、姚建德工程师一起参加了部分计算工作, 在此深表谢意.

- 与应力测试报告(1982).
- [2] S. 铁木辛柯, 板壳理论, 科学出版社(1977).
- [3] 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法(修订版), 水利电力出版社(1978).
- [4] 冯康, 组合流形上的椭圆方程与组合弹性结构, 计算数学, 1,3(1979).
- [5] 上海交通大学工程力学系, 三维弹性体静力分析程序使用说明(1982).

参 考 文 献

- [1] 上海交通大学工程力学系, $\phi 2 \times 21$ M 蒸压釜强度计算

(本文于 1983 年 1 月 13 日收到)