

# 平面强爆震波对运动薄物体的绕射

庄峰青

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文用奇点分布法研究平面强爆震波对运动三维薄物体的绕射问题, 并求得解析解. 这个解是以前激波绕射问题 Ting 和 Gunzburger 解在强爆震波情况的推广.

## 一、引言

本文用奇点分布法研究平面强爆震波对运动薄物体(如机翼)的绕射问题, 这个问题与激波绕射问题密切相关.

关于激波对薄物体的绕射, 人们已进行了广泛的研究. 分析方法有三种: (1)利用锥形变量和保角变换的方法<sup>[1]</sup>; (2)用奇点分布代替物面并直接决定满足激波条件的镜像的方法, 即奇点分布法<sup>[2-4]</sup>; (3)积分变换法<sup>[5]</sup>. 其中以奇点分布法最有效.

奇点分布法是1952年 Ting 和 Ludloff<sup>[2]</sup> 在求静止二维对称薄翼的激波绕射问题解析解时首先提出的. 1970年 Ting 和 Gunzburger<sup>[3]</sup> 用这个方法处理了激波对运动三维薄翼的绕射问题. 1973年 Gunzburger 和 Yang<sup>[4]</sup> 用此方法研究了激波绕射理论中的反对称问题. 1974年 Ting<sup>[6]</sup> 又用同一方法研究了二维点涡、涡线、偶极子和四极子等奇点同激波的相互作用.

本文作者已研究了平面强爆震波对静止二维薄翼绕射问题<sup>[7]</sup>. 研究表明, 奇点分布法同样适用于强爆震波绕射问题.

本文在文献[7]的基础上进一步用奇点分布法研究强爆震波对运动薄物体绕射问题, 所论的薄物体是三维形体. 由于薄物体相对地面而运动, 强爆震波条件中出现非齐次项. 和文献[3]一样, 利用对应于假想物体定常解的特解即可消去此非齐次项, 然后可按文献[2]的方法求通解. 本文所得的解析解适用范围较广, 薄物体相对波前或波后气流的速度可以是超音速, 也可以是亚音速. 但本文的解析解是利用小扰动法求得的线化解, 没有考虑薄物体相对气流以超音速运动时的激波现象, 这就在一定程度上限制了该解析解的适用范围.

本研究再次表明, 奇点分布法也适用于研究强爆震波绕射问题; 只要作适当修改, 激波绕射问题解就可用于强爆震波绕射问题.

在本文基础上, 现正进行强爆震波反对称绕射问题的研究.

下面概述强爆震波绕射问题解析解的求解过程. 有关细节情况, 请参阅文献[2-4, 7].

## 二、绕射问题的数学描述(物理空间)

首先假设: 波前未燃气体和波后已燃气体均为完全气体, 即它们的状态方程均为  $p/\rho = \mathcal{R}T$ , 比热为常数; 波前气体比热比  $\gamma_0$  一般不同于波后气体比热比  $\gamma$ , 通常可令  $\gamma_0 = 1.4$ ,  $\gamma < 1.4$  (如 1.2, 1.3 等)<sup>[8]</sup>.

我们研究零攻角三维对称薄物体绕射问题. 为此先建立固结于波后未扰气体的坐标系  $xyz$  (图 1).  $x$  轴方向与强爆震波运动方向相同.  $y = 0$  平面为对称薄物体的对称平面. 由于对称性, 只需研究  $y \geq 0$  情况.

在地面参考系中, 强爆震波以速度  $U_0$  向右运动; 波前方 (即右方) 的未扰气体静止不动, 压力为  $p_0$ , 密度为  $\rho_0$ , 声速为  $c_0 = (\gamma_0 p_0 / \rho_0)^{1/2}$ ; 波后方 (即左方) 的未扰气体以速度  $U_0 - U$  向右运动, 压力为  $p$ , 密度为  $\rho$ , 声速为  $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ .

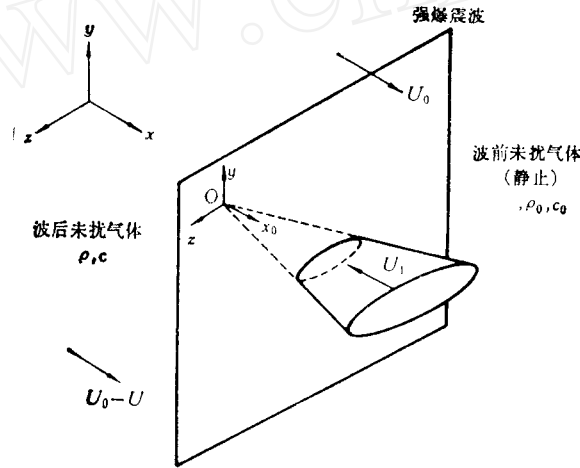


图 1 绕射问题示意图

在固结于强爆震波的参考系中, 波前未扰气体以速度  $U_0$  向左运动; 波后未扰气体以速度  $U$  向左运动.  $U_0$  和  $U$  决定未扰强爆震波 (即平面强爆震波) 的强度. 相对强爆震波, 波前马赫数为  $Ma_0 = U_0/c_0$ , 波后马赫数为  $Ma = U/c$ , 显然  $Ma_0 > 1$ ,  $Ma < 1$ .

相对波前未扰气体 (即地面), 薄物体以速度  $U_1$  向左运动. 令  $Ma_1 = U_1/c_0$ , 则  $Ma_1$  可大于或小于 1. 相对波后未扰气体, 薄物体以速度  $\tilde{U}_0 = (U_1 + U_0 - U)$  向左运动. 令  $\tilde{Ma}_0 = \tilde{U}_0/c$ ,  $\bar{Ma}_0 = U_0/c$ ,  $\bar{Ma}_1 = U_1/c$ , 则  $\tilde{Ma}_0 = \bar{Ma}_1 + \bar{Ma}_0 - Ma$ .  $\tilde{Ma}_0$  也可大于或小于 1.

薄物体形状可用  $y = \varepsilon f(x_0, z)$  来表示. 其中  $\varepsilon$  为小厚度参数, 表示物体薄的程度.  $x_0 y z$  为固结于运动薄物体上的坐标系,  $x_0 = x + \tilde{U}_0 t$ . 研究波后气流用  $xyz$  坐标系, 波后压力、密度和速度分量的线化扰动量分别为  $\varepsilon p'$ ,  $\varepsilon \rho'$ ,  $\varepsilon u'$ ,  $\varepsilon v'$  和  $\varepsilon w'$ . 描述波前气流用  $x_0 y z$  坐标系, 波前线化扰动量为  $\varepsilon p'_0$ ,  $\varepsilon \rho'_0$ ,  $\varepsilon u'_0$ ,  $\varepsilon v'_0$  和  $\varepsilon w'_0$ .

薄物体对称平面上的线化边界条件为

$$\varepsilon v' = \varepsilon \tilde{U}_0 f_{x_0}(x_0, z), \quad \text{当 } x_0 < (U_1 + U_0)t \quad (2.1)$$

$$\varepsilon v_0 = \varepsilon U_1 f_{x_0}(x_0, z), \quad \text{当 } x_0 > (U_1 + U_0)t \quad (2.2)$$

强爆震波相对波前气流的速度一定是超音速的,所以波前气流不受强爆震波影响.因此波前区域的流动情况为绕薄物体的定常流动,马赫数为  $Ma_1$ . 此定常流动的压力分布为

$$p'_0(x_0, y, z) = \frac{\rho_0 U_1^2}{\pi \nu} \iint \frac{f_{x_0 x_0}(\xi_0, \zeta) d\xi_0 d\zeta}{\{(x_0 - \xi_0)^2 - (Ma_1^2 - 1)[(z - \zeta)^2 + y^2]\}^{1/2}} \quad (2.3)$$

亚音速情况  $Ma_1 < 1$ , 积分域为全部薄物体,  $\nu = 2$ ; 超音速情况  $Ma_1 > 1$ , 积分域为位于双曲线

$$\xi_0 < x_0 - \{(Ma_1^2 - 1)[(z - \zeta)^2 + y^2]\}^{1/2}$$

之内的那部分薄物体,  $\nu = 1$ .

对波后区域,流动是非定常的,所以变量为  $x, y, z$  和  $t$ . 线性化控制方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho'_t + \rho(u'_x + v'_y + w'_z) &= 0 \\ \rho u'_t &= -p'_x, \quad \rho v'_t = -p'_y, \quad \rho w'_t = -p'_z, \\ p'_t &= c^2 \rho'_t \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

由此可知,扰动压力满足波动方程

$$\square p' = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p' = 0 \quad (2.5)$$

要唯一地确定  $p'$  还要给出边界条件和初始条件.

经过与文献[3]类似的冗长推导,可得

初始条件:

$$p'(x < Ut, y, z, t) \rightarrow 0, \quad p'_t(x < Ut, y, z, t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } t \rightarrow -\infty \quad (2.6)$$

边界条件:

$$p'(x < Ut, y, z, t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

$$p'_y(x < Ut, 0^+, z, t) = -\rho \tilde{U}_0^2 f_{x_0 x_0}(x_0, z) \quad (2.8)$$

$$D_{x_t} p'(x = Ut, y, z, t) = K c^2 p'_{0, x_0 x_0}(x_0 = (U_1 + U_0)t, y, z) \quad (2.9)$$

$$p'_y(x = (Ut)^-, y = 0, z, t) = -\rho \tilde{U}_0^2 f_{x_0 x_0}[(U_0 + U_1)t, z] \quad (2.10)$$

$$p'_y(x = Ut, y = 0^+, z, t) = \left[ \frac{\rho(U_0 - U)(U_1 + U_0)}{\mathcal{Q}_2} + \frac{\mathcal{Q}_5}{\mathcal{Q}_2} \cdot \rho_0 U_1^2 \right] f_{x_0 x_0}[(U_0 + U_1)t, z] \quad (2.11)$$

其中:

$$D_{x_t} = (\mathcal{Q}_1 + Ma + \mathcal{Q}_2 Ma) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (1 + Ma^2 + 2Ma\mathcal{Q}_1)c \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + (\mathcal{Q}_1 Ma^2 + Ma - Ma\mathcal{Q}_2)c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$K = - \left\{ (\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0)^2 \left[ \mathcal{Q}_4 - \frac{\bar{M}a_0}{Ma\bar{M}a_1} \right] + Ma(Ma_1^2 - 1) \times \left[ \mathcal{Q}_5 - \frac{\bar{M}a_0}{Ma\bar{M}a_1} (\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0 + \mathcal{Q}_6(Ma - \bar{M}a_0)) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= (1 - Ma^2) \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) / \bar{\Omega}, \quad \Omega_1 = Ma \left(1 - \frac{1}{\gamma - 1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1 + \gamma Ma^2}{Ma^2} \cdot \frac{U}{U_0}\right) / \bar{\Omega} \\ \Omega_2 &= (1 - Ma^2) / [(\gamma - 1)\bar{\Omega}], \quad \Omega_3 = (Ma_0^2 - 1) \left(\frac{U}{U_0} - 1\right) / \bar{\Omega} \\ \Omega_4 &= Ma \left[ Ma_0^2 \left(\frac{U}{U_0} - 1\right) + \frac{1 + Ma_0^2}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{\bar{Ma}_0 Ma} \right] / \bar{\Omega} \\ \Omega_5 &= \left[ Ma_0^2 \cdot \frac{U}{U_0} \left( Ma^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) - (1 + Ma_0^2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( Ma^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) + \bar{Ma}_0 Ma \right] / \bar{\Omega} \\ \Omega_6 &= \left\{ Ma^2 \left[ \frac{U_0}{U} + \frac{U}{U_0} - 2 \right] + \frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{U}{U_0} - 1 \right) \right\} / \left\{ \left( \frac{U_0}{U} - 1 \right) \bar{\Omega} \right\} \\ \bar{\Omega} &= Ma^2 \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) - \frac{2}{\gamma - 1} \cdot \frac{U}{U_0} \end{aligned}$$

方程(2.9)中的非齐次项是由于薄物体相对波前气体运动而产生的扰动所引起的贡献。

### 三、绕射问题的数学描述(洛伦兹空间)

为使强爆震波这个动边界变为定边界,作洛伦兹变换:

$$\bar{x} = \frac{x - Ut}{\sqrt{1 - Ma^2}}, \quad \bar{t} = \frac{ct - Ma \cdot x}{\sqrt{1 - Ma^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z. \quad (3.1)$$

经变换,动边界  $x = Ut$  成为定边界  $\bar{x} = 0$ . 洛伦兹空间  $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}-\bar{t}$  中关于  $p'$  的数学描述如下:

方程:

$$p'_{\bar{x}\bar{x}} + p'_{\bar{y}\bar{y}} + p'_{\bar{z}\bar{z}} - p'_{\bar{t}\bar{t}} = 0 \quad (3.2)$$

初始条件:

$$p'(\bar{x} < 0, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = p'_{\bar{t}}(\bar{x} < 0, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = 0, \quad \text{当 } \bar{t} \rightarrow -\infty \quad (3.3)$$

边界条件:

$$p'(\bar{x} < 0, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \rightarrow 0, \quad \text{当 } \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

$$p'_{\bar{y}}(\bar{x} < 0, 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 A_0 f_{x_0 x_0} [x_0 = \bar{a}(\bar{t} + \bar{\lambda}_0 \bar{x}), \bar{z}] \quad (3.5)$$

$$\bar{D}_{\bar{x}\bar{t}} p'(\bar{x} = 0, \bar{y} > 0, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{K} p'_{0, x_0 x_0} [x_0 = \bar{a}\bar{t}, \bar{y} > 0, \bar{z}] \quad (3.6)$$

$$p'_{\bar{y}}(\bar{x} = 0^-, \bar{y} = 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 A_0 f_{x_0 x_0} [x_0 = \bar{a}\bar{t}, \bar{z}] \quad (3.7)$$

$$p'_{\bar{y}}(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0^+, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 \mu f_{x_0 x_0} [x_0 = \bar{a}\bar{t}, \bar{z}] \quad (3.8)$$

其中

$$\bar{D}_{\bar{x}\bar{t}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{Ma^2 - 1}{\Omega_2 Ma} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} - \frac{\Omega_1 (1 - Ma^2) + \Omega_2 Ma}{\Omega_2 Ma} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}$$

$$\bar{K} = -K / (\Omega_2 Ma), \quad \bar{a} = (\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0) / (1 - Ma^2)^{1/2}$$

$$\bar{\lambda}_0 = Ma + (1 - Ma^2) / (\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0), \quad A_0 = -\tilde{M}a_0^2 = -(\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0 - Ma)^2$$

$$\mu = \frac{(\bar{M}a_0 - Ma)(\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0)}{Q_2} + \frac{Q_5}{Q_2} \cdot \frac{\bar{M}a_1^2 Ma}{\bar{M}a_0}$$

#### 四、解 析 解

波动方程(3.2)在初始条件(3.3)及无限远处条件(3.4)下的解可用克希荷夫公式表示<sup>[3]</sup>:

$$p'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{p'_y(\xi, 0, \zeta, \bar{t} - \bar{r})}{\bar{r}} d\xi d\zeta \quad (4.1)$$

其中  $\bar{r} = [(\bar{x} - \xi)^2 + \bar{y}^2 + (\bar{z} - \zeta)^2]^{1/2}$ .

在  $\bar{y} = 0$  平面左半部分 ( $\bar{x} > 0$ ),  $p'_y$  已由(3.5)式给出;而在右半部分 ( $\bar{x} < 0$ ) 的  $p'_y$  尚待确定, 即求  $p'_y(\bar{x} < 0, 0, \bar{z}, \bar{t})$ , 使它满足强爆震波处条件(3.6)和强爆震波与物面交点处条件(3.7)(3.8).

先消去强爆震波条件(3.6)中的非齐次项. 为此, 设

$$p' = \bar{p} + p^* \quad (4.2)$$

其中  $\bar{p}$  和  $p^*$  均为波动方程(3.2)的解, 并且取

$$p^* = -\frac{\rho c^2 A^*}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\zeta}{\bar{r}} \cdot f_{x_0 x_0}[\bar{a}^*(\bar{\lambda}^* \xi + \bar{t} - \bar{r}), \zeta], \quad (4.3)$$

要求: (1)  $p^*$  满足波动方程(3.2); (2) 在强爆震波上  $x_0 = x^*$ , 注意  $x_0 = \bar{a}(\bar{t} + \bar{\lambda}_0 \bar{x})$ ,  $x^* = \bar{a}^*(\bar{t} + \bar{\lambda}^* \bar{x})$ ; (3)  $p^*$  满足非齐次强爆震波条件:

$$\bar{D}_{\bar{x}\bar{t}} p^*(\bar{x} = 0, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{K} p'_{0, x_0 x_0}(x_0 = \bar{a}\bar{t}, \bar{y}, \bar{z}). \quad (4.4)$$

根据上述三个条件即可定出:

$$\bar{a}^* = \bar{a} = (\bar{M}a_1 + \bar{M}a_0)/(1 - Ma^2)^{1/2} \quad (4.5)$$

$$\bar{\lambda}^* = [1 - (Ma_1^2 - 1)/\bar{a}^2]^{1/2} \quad (4.6)$$

$$A^* = -(Ma/\bar{M}a_0)\bar{M}a_1^2 \bar{K}/[\bar{a}^2 H(-\bar{\lambda}^*)] \quad (4.7)$$

其中

$$H(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 - \frac{Ma^2 - 1}{Q_2 Ma} \cdot \bar{\lambda} - \frac{Q_1(1 - Ma^2) + Q_2 Ma}{Q_2 Ma}. \quad (4.8)$$

在(4.3)式中  $f[\bar{a}^*(\bar{\lambda}^* \bar{x} + \bar{t}), \bar{z}]$  代表洛伦兹空间中以速度  $1/\bar{\lambda}^*$  运动的假想物体.

现在求  $\bar{p}$ . 因为由(4.1)和(4.3)表示的  $p'$  和  $p^*$  满足波动方程和初始条件、无限远处条件, 所以  $\bar{p}$  也满足上述方程和条件. 余下的边界条件用  $\bar{p}$  表示的话就是:

$$\bar{p}_y(\bar{x} < 0, 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 \{A_0 f_{x_0 x_0}[\bar{a}(\bar{t} + \bar{\lambda}_0 \bar{x}), \bar{z}] + A_5 f_{x_0 x_0}[\bar{a}(\bar{t} + \bar{\lambda}_0 \bar{x}), \bar{z}]\} \quad (4.9)$$

$$\bar{D}_{\bar{x}\bar{t}} \bar{p}(\bar{x} = 0, \bar{y} > 0, \bar{z}, \bar{t}) = 0 \quad (4.10)$$

$$\bar{p}_y(\bar{x} = 0^-, \bar{y} = 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 [A_0 + A_5] f_{x_0 x_0}(\bar{a}\bar{t}, \bar{z}) \quad (4.11)$$

$$\bar{p}_y(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0^+, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 [\mu + A_5] f_{x_0 x_0}(\bar{a}\bar{t}, \bar{z}) \quad (4.12)$$

其中

$$A_5 = -A^*, \quad \bar{\lambda}_5 = \bar{\lambda}^*.$$

因为关于  $\bar{p}$  的强爆震波处条件(4.10)是齐次的, 所以可如文献[2]那样来求  $\bar{p}$ . 根据克希荷夫公式,  $\bar{p}$  可用  $\bar{y} = 0$  平面上的  $\bar{p}_y$  表示如下:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x} < 0, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = & -\frac{\rho c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^0 d\xi \{A_0 f_{\xi_0 \xi_0}[\xi_0, \zeta] + A_5 f_{\xi_0 \xi_0}[\xi_5, \zeta]\} / \bar{r} \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\xi \{\bar{p}_y(\xi, 0, \zeta, \bar{t} - \bar{r})\} / \bar{r} \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中  $\xi_i = (\bar{\lambda}_i \xi + \bar{t} - \bar{r})\bar{a}$ ,  $i = 0, 5$ .

波前的  $\bar{p}_y(\bar{x} > 0, 0, \bar{z}, \bar{t})$  是未知的, 必须由边界条件(4.10)–(4.12)来决定. 经运算可知  $\bar{p}_y(\bar{x} > 0, 0, \bar{z}, \bar{t})$  满足

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\bar{x}\bar{t}} \bar{p}_y(\bar{x} > 0, 0, \bar{z}, \bar{t}) = & -\rho c^2 \bar{a}^2 \{A_0 H(-\bar{\lambda}_0) f^{(IV)}[\bar{a}(\bar{t} - \bar{\lambda}_0 \bar{x}), \bar{z}] \\ & + A_5 H(-\bar{\lambda}_5) f^{(IV)}[\bar{a}(\bar{t} - \bar{\lambda}_5 \bar{x}), \bar{z}]\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\bar{p}_y(0^+, 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 (2\mu - A_0 + A_5) f_{x_0 x_0}[\bar{a}\bar{t}, \bar{z}] \quad (4.15)$$

$$\bar{p}_{y\bar{x}}(0^+, 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 \bar{a} \left[ \frac{2(Ma^2 - 1)}{\Omega_2 Ma} (A_0 - \mu) + A_5 \bar{\lambda}_5 + A_0 \bar{\lambda}_0 \right] f_{x_0 x_0}[\bar{a}\bar{t}, \bar{z}] \quad (4.16)$$

对  $r \geq r_0$  时任何  $\alpha$  值以及对  $r < r_0$  时的  $\alpha \geq 2$ , 方程(4.14)总是双曲型的. 其中  $\alpha = Q/(c_p T_0)$ ,  $Q$  为单位质量未燃气体反应热,  $c_p$  和  $T_0$  分别为波前未燃气体的定压比热和绝对温度. 实际问题中的强爆震波总满足  $\alpha \geq 2$  条件, 因此可按文献[2]的方法求得:

$$\bar{p}_y(\bar{x} > 0, 0, \bar{z}, \bar{t}) = \rho c^2 \sum_{i=1}^4 A_i f_{x_0 x_0}[\bar{a}(\bar{t} - \bar{\lambda}_i \bar{x}), \bar{z}] \quad (4.17)$$

其中

$$A_1 = -A_0 H(-\bar{\lambda}_0) / H(\bar{\lambda}_0), \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_0$$

$$A_4 = -A_5 H(-\bar{\lambda}_5) / H(\bar{\lambda}_5), \quad \bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_5$$

$\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$  为二次方程  $H(\bar{\lambda}) = 0$  的两个根.  $A_2$  和  $A_3$  是下列线性代数方程组的解:

$$A_2 + A_3 = 2\mu - A_0 - A_1 - A_4 + A_5 \quad (4.18)$$

$$\bar{\lambda}_2 A_2 + \bar{\lambda}_3 A_3 = \frac{2(Ma^2 - 1)}{\Omega_2 Ma} \cdot (\mu - A_0) - A_0 \bar{\lambda}_0 - A_1 \bar{\lambda}_1 - A_4 \bar{\lambda}_4 - A_5 \bar{\lambda}_5 \quad (4.19)$$

最后, 得到强爆震波后的扰动压力为

$$p'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{i=0}^5 p_i + p^* \quad (4.20)$$

当  $i = 0, 5$  时

$$p_i = -\frac{\rho c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^0 d\xi \{A_i f_{\xi_i \xi_i}(\xi_i, \zeta) / \bar{r}\}, \quad \xi_i = \bar{a}(\bar{\lambda}_i \xi + \bar{t} - \bar{r})$$

当  $i = 1, 2, 3, 4$  时

$$p_i = -\frac{\rho c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\xi \{A_i f_{\xi_i \xi_i}(\xi_i, \zeta) / \bar{r}\}, \quad \xi_i = \bar{a}(-\bar{\lambda}_i \xi + \bar{t} - \bar{r})$$

$$p^* = -\frac{\rho c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \{A^* f_{\xi^* \xi^*}(\xi^*, \zeta) / \bar{r}\}, \quad \xi^* = \bar{a}(\bar{\lambda}^* \xi + \bar{t} - \bar{r})$$

扰动压力公式(4.20)中各项的物理意义如下:  $p_0$  是由于薄物体在波后区域的定常运动所致;  $p_1$  是  $p_0$  在波前区域的镜象;  $p^*$  是由于洛伦兹空间中以速度  $(1/\bar{\lambda}^*)$  运动的假想物体在波后区域的定常运动所致, 是对应强爆震波条件中非齐次项的特解;  $p_5$  的作用是抵消

$p^*$  在波后区域的贡献;  $p_4$  是  $p_5$  在波前区域的镜像;  $p_2$ 、 $p_3$  是由于强爆震波受到弯曲所引起的。

利用洛伦兹逆变换即可从  $p'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  求得  $p'(x, y, z, t)$ , 然后可求出其他线性扰动量。

强爆震波绕射解形式上与激波绕射解基本相同, 但公式中的某些系数不同了, 有些参数(如  $\Omega_i$ 、 $\mu$  等)的定义也复杂了。

强爆震波绕射解包括了激波绕射解, 后者是前者在  $\gamma_0 = \gamma$  和  $\alpha = 0$  时的特例。

至于具体计算, 除了某些系数及参数有所变动外, 在其他方面强爆震波绕射解与激波绕射解完全一样。有关激波绕射解中积分的加速计算方向以及对机翼问题的计算机程序, 已有很详尽的研究结果, 这些方法和研究结果同样适用于强爆震波绕射情况。关于强爆震波计算的有关内容请参阅文献[3, 4, 7, 9, 10]。

## 五、结 束 语

本文研究了强爆震波对运动薄物体的绕射问题, 求得了解析解。研究表明, 奇点分布法同样可以用来研究强爆震波对运动薄物体的绕射问题。

作者感谢美国纽约大学柯朗数学研究所丁汝教授宝贵的建议和讨论。

## 参 考 文 献

- [1] Lighthill, M. J. The Diffraction of Blast I, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **198**, (1949), 454.
- [2] Ting, L. and Ludloff, H. F. Aerodynamics of Blasts, *J. A. S.*, **19**, (1952), 317.
- [3] Ting, L. and Gunzburger, M. Diffraction of Shock Waves by a Moving Thin Wing, *J. F. M.*, **42**, (1970), 585.
- [4] Gunzburger, M. and Yang, V. K. Antisymmetric Problems in Shock Diffraction Theory, *Z. A. M. P.*, **24**, (1973), 83.
- [5] Arora, N. L. An Integral-Transforms Method for Shock-Shock Interaction Studies, *J. F. M.*, **34**, (1968), 209.
- [6] Ting, L. Transmission of Singularities Through a Shock Wave and the Sound Generation, *Physics of Fluids*, **17**, (1974), 1518.
- [7] 庄峰青, 平面强爆震波对静止二维薄翼的绕射, 力学学报1983年第5期456页。
- [8] Courant, R. and Friedrichs, K. O. *Supersonic Flow and Shockwaves*, Interscience Publishers, Inc., New York (1948).
- [9] Chow, F. and Gunzburger, M. Numerical Program and Examples for Diffraction of Shock by Wings, New York University Report NYU-AA-69-8 (1969).
- [10] Gunzburger, M. Diffraction of Shock Wave by a Thin Wing—Symmetric and Antisymmetric Problem. Ph. D. Thesis, School of Engineering and Science, New York University (1969).

## DIFFRACTION OF STRONG DETONATION WAVES BY A MOVING THREE-DIMENSIONAL THIN BODY

Zhuang Fengqing

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### Abstract

An analytical solution is obtained for the diffraction of a strong detonation wave by a three-dimensional thin body moving in the opposite direction. The planform and the thickness distribution of the body can be arbitrary and the speed of the body can be either supersonic or subsonic relative to the undisturbed stream ahead of the wave or to that behind the wave. The solution is a generalization of the previous solution of Ting and Gunzburger for the shock diffraction.