

可膨胀塑性本构方程及其在 轴对称试棒韧性断裂分析中的应用

李国琛

(中国科学院力学研究所)

提要 由于大应变和三轴张力的作用,在许多韧性材料中将出现空洞的形成与扩展,从而产生塑性条件下的体积膨胀。本文提出了一组可以计及这类塑性可膨胀性的本构方程。利用轴对称试棒颈缩实验的结果、空洞模型的分析 and 计算模拟,可以标定方程中有关的切线模量值。为检验这类本构方程的合理性和核对所标定的模量数值,可再用之分析轴对称试棒的韧性断裂行为,以获取更逼近实验的结果。

一、引言

经典的塑性理论是建立在塑性不可压缩(即塑性体应变为零)的假设基础上。在小应变的情况下一般来说是对的。但在大应变及三轴张应力的作用下,许多韧性材料的微观组织会发生变化而产生空洞,它们随着变形及受力的增大而扩展。于是从宏观上的连续介质角度来看材料的体积有了塑性的可膨胀性。众所周知,在研究韧性断裂时,裂纹顶端附近的材料正是处在这类力学的环境与历史之中。但以往的分析常是建立在不可压缩的塑性理论的基础上。若计及塑性可膨胀性将会如何?这正是近年来韧性断裂研究的一个新动向。

很久以来人们已从实验中观察到了韧性断裂与空洞成长的密切关系,近年 Iricibar 等^[1]从实验中量测了在碳钢中空洞面积随应变值的增大而按指数规律变化的现象。Gurson^[2]通过对多种含空洞的模型材料的分析,修改了 Von-Mises 屈服准则而计及了塑性可膨胀性。Brown 等^[3]利用 Gurson 的模型研究了塑性可膨胀性在应力分析中的影响。Rousselier^[4]提出了带有韧性损伤因子的本构方程并用之分析了三点弯曲梁的断裂问题。

本文将 Prandtl-Reuss 塑性理论推广到计及大应变及塑性可膨胀性后,给出了一组形式较为简单的本构方程组。方程中所涉及的塑性模量可利用轴对称试棒颈缩实验的结果、空洞模型的分析 and 计算模拟的办法来标定。这一方法在作者以及作者与 Howard 合写的论文中^[5,6,7]曾分别有说明,以下将做系统的归纳。最后将此组本构方程用在拉伸试棒(包括带缺口)的韧性断裂分析并与有关的实验进行了比较,结果良好。

二、可膨胀的塑性本构方程

现有的推广经典的不可压缩塑性理论的方法常是建立在纯理性基础上,如 Gurson^[2]

本文于 1983 年 5 月 5 日收到。

和 Rousselier^[4] 的工作。其不足之处是缺乏利用实验来标定其中的参数以及对空洞模型的基体材料做了过多的限制(如文献[2]中假定材料为理想塑性的)。作者认为,既然本构关系是反映材料的力学性质,因此其方程中的有关参数应由实验来标定才更为恰当。

以下给出一个较为简单的推广方法,即在应变率中增加一项反映塑性体应变率的部分。用混合张量表示时则为:

$$D_j^i = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\mathcal{D}\tau_j^i}{\mathcal{D}t} - \nu \delta_j^i \frac{\mathcal{D}\tau_k^k}{\mathcal{D}t} \right] + \mathcal{L} \frac{9}{4E_{ic}^{(p)}} \frac{S_j^i S_k^k}{\sigma_c^2} \frac{\mathcal{D}\tau_j^k}{\mathcal{D}t} + \mathcal{L} \frac{1}{3E_{im}^{(p)}} \delta_j^i \frac{\mathcal{D}\tau_k^k}{\mathcal{D}t} \quad (1)$$

其中 τ 是 Kirchhoff 应力, $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ 代表 Jaumann 导数, s 和 σ_c 分别是真(或称 Cauchy)应力的偏量部分和等效真应力。又

$$\mathcal{L} = \begin{cases} 0 & \text{弹性情况} \\ 1 & \text{塑性情况} \end{cases}$$

E, ν 是弹性模量和 Poisson 系数, 塑性(偏)切线模量应是^[5]

$$E_{ic}^{(p)} = \frac{\mathcal{D}\sigma_c}{\mathcal{D}t} / D_c^{(p)} \quad (2)$$

其中 $D_c^{(p)} = \left(\frac{2}{3} d_j^i d_i^j \right)^{1/2}$, $d_j^i = D_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i D_k^k$

现定义塑性(体)切线模量为

$$E_{im}^{(p)} = \frac{\mathcal{D}\tau_k^k}{\mathcal{D}t} / D_k^k \quad (3)$$

于是显见,(1)式中的前三项是对 Prandtl-Reuss 理论用到大应变条件下的自然推广(见文献[5]中方程(6)和(7))而最后一项则代表了塑性的体应变率部分,即平均应变率 $\dot{\epsilon}_m^{(p)}$ 。

方程(1)的逆形式是

$$\frac{\mathcal{D}\tau_j^i}{\mathcal{D}t} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + g^{ij} g^{kl} \left(\frac{\nu}{(1 - 2\nu) + \mathcal{L} \frac{E}{E_{im}^{(p)}}} - \mathcal{L} \frac{E}{3E_{im}^{(p)}} \frac{1}{\left(1 - 2\nu + \frac{E}{E_{im}^{(p)}}\right)} \right) - \mathcal{L} \frac{3}{2\sigma_c^2} \frac{E}{E_{ic}^{(p)}} \frac{S^i S^{kl}}{\left(\frac{2}{3}(1 + \nu) + \frac{E}{E_{ic}^{(p)}}\right)} \right] D_{kl} \quad (4)$$

其中 g^{ij} 是度量张量,当 $E_{im}^{(p)} \rightarrow \infty$ 时即为常见的不可压缩塑性理论的方程。在应变硬化阶段, $E_{ic}^{(p)}$ 和 $E_{im}^{(p)}$ 的数值都是正的。但当不可逆的软化效应产生时将分别转为负值。导致材料软化的原因可以是: 1)被包含的空洞的扩展; 2)包含空洞的介质本身的软化(见文献[6]); 3)材料中出现空洞的联结并形成裂纹。

从文献[6,7]可以将这类软化效应出现的临界条件归并为

(a) 在等效应力-应变 $\sigma_c - \epsilon_c$ 曲线上

$$\sigma_m + \lambda_c \sigma_c = \sigma_{cc} \quad (5)$$

1) 在大应变实际计算中可略去全应变率与塑性应变率的数值区别而取 $E_{ic}^{(p)} = E_{ic} = \frac{\mathcal{D}\sigma_c}{\mathcal{D}t} / D_c$ 。

(b) 在平均应力-应变 $\sigma_m - \varepsilon_m$ 曲线上

$$\sigma_m + \lambda_m \sigma_c = \sigma_{cm} \quad (6)$$

其中 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$; λ_e 、 σ_{ce} 、 λ_m 和 σ_{cm} 都是待标定的材料常量。

为标定这些常量以及两个塑性切线模量 $E_{t_e}^{(p)}$ 、 $E_{t_m}^{(p)}$ 可以采取以下各步骤:

1) 由单向拉伸圆棒的预缩实验测定载荷-伸长曲线或者载荷-预缩之间的变化关系。

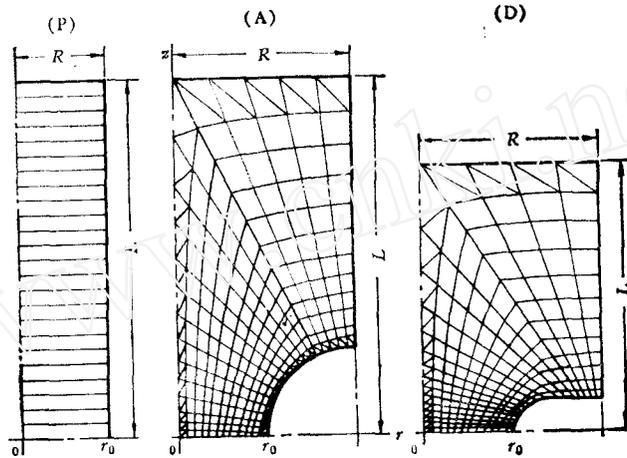


图1 网格划分图

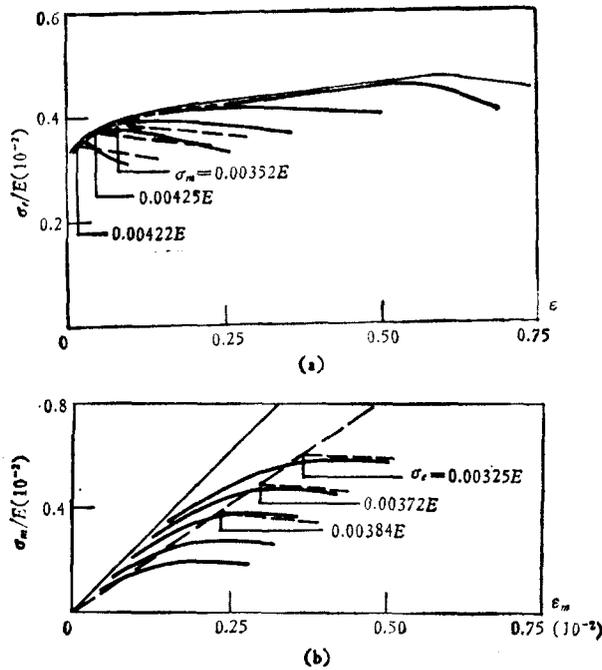


图2 Q1(ST) 的转换应力-应变曲线

—— 连续介质 —— 孔洞模型
 ···· 转换的应力-应变曲线

2) 假定 $E_{tm} \rightarrow \infty$ 并适当地选取切线模量 E_{te} 随等效应变 ϵ_e 的变化值以使模拟颈缩的计算结果尽可能地逼近 1) 中实验的宏观现象^[5]。

3) 利用带缺口的圆棒拉伸可以在试件中心造成不同的应力、应变状态。缺口愈尖则三轴张力参数 σ_m/σ_e 愈高而初始断裂时的等效应变值 ϵ_f 愈小。图 1 中的 (A)、(D) 即为 Hancock^[8] 等曾试验过的试样形状。他们所测得的 Q1 (ST) 钢材的实验结果都用细实线绘制在图 3 中，其中包括了无缺口的颈缩试样 P。这里所提供的在最小断面上的平均应力 σ_e 与颈缩 r_0/r (即初始半径与瞬时半径之比) 的关系可供以下计算模拟时使用。

4) 由同一实验还可测得在初始断裂时的三轴张力参数 σ_m/σ_e 与等效应变 ϵ_f 的关系，如图 4 中的细实线所示。这一结果是通过 Bridgman^[9] 的近似公式推算出的^[8]。

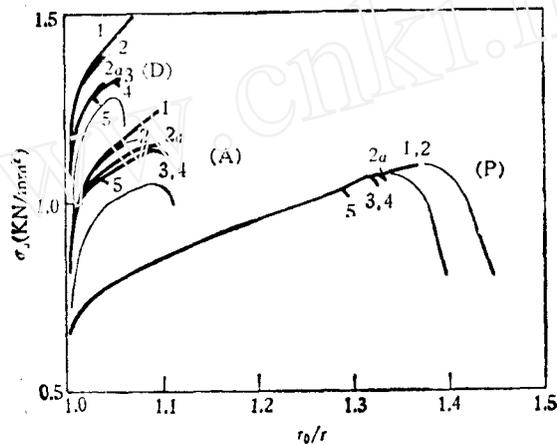


图 3 最小断面上的平均应力与颈缩关系

—— 计算 —— 实验

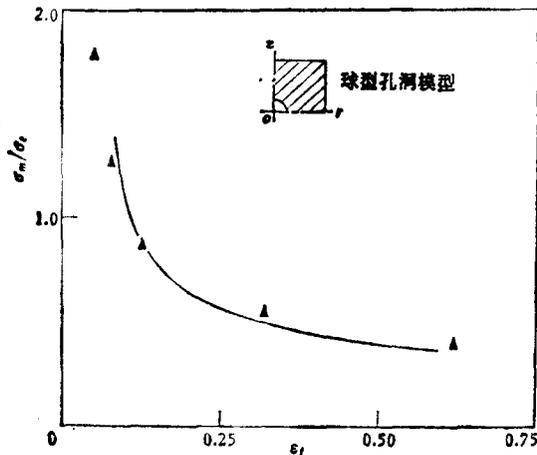


图 4 初始断裂时的 $\sigma_m/\sigma_e - \epsilon_f$ 图

▲ 计算的失稳点 —— 实验曲线(文献[8] Q1(ST)材料)

5) 设有一圆柱体微元包含一初始球型空洞 (如图 4 中所示的四分之一角)。微元的边界是受位移控制加载。不同的径向 r 对轴向 x 的位移比值可以模拟该微元的总体受

力、变形情况。因此可用之代表宏观的连续介质材料在一点的特征,适当地选取这一模型的几何比值及包含空洞的介质材料的力学参数,可以使它的失稳点轨迹线尽可能地逼近实验的统计曲线^[7,10]。图 4 中的实三角点即为用空洞模型算出的 Q1(ST) 材料在不同受力、变形情况下的失稳点(摘自文献[7]中的图 3)。

6) 由式(5)中的计算还可导出它的宏观响应图,反映在两组应力-应变曲线,如图 2 所示(摘自文献[7]的图 4)。一个是代表偏量部分的等效应力-应变 $\sigma_e-\varepsilon_e$, 另一个是体量部分的平均应力-应变 $\sigma_m-\varepsilon_m$ 。图 2 中的粗实线即是由空洞模型计算所导出的结果。细实线是由不可压缩塑性理论所算得的连续介质材料的关系。

7) 为简化起见可用图 2 中的虚线代替粗实线部分并在各转化虚线上标明开始软化时的相应应力值。利用统计运算可以求得公式(5)、(6)中 λ_e , σ_{ce} , λ_m 和 σ_{cm} 的算术平均值。

8) 公式(3)所定义的塑性(体)切线模量 $E_{tm}^{(p)}$ 值可用以下近似式求得,即

$$E_{tm}^{(p)} \doteq \Delta\sigma_m / \Delta\varepsilon_m^{(p)} = \Delta\sigma_m / (\Delta\varepsilon_m - \Delta\varepsilon_m^{(e)}) \quad (7)$$

其中上标(e)代表弹性部分,上标(p)为塑性部分。

9) 由上所得的 $E_{te}^{(p)}$ 、 $E_{tm}^{(p)}$ 、 λ_e 、 λ_m 、 σ_{ce} 及 σ_{cm} 给出了运用公式(4)、(5)、(6)计算时需要标定的力学参数。以下将用之计算拉伸试棒(包括带缺口)的平均应力-颈缩关系曲线并与前面第 3) 项的实验相比较以核对所标定的参数值。必要时可作适当的调整。这也就是本文的主要目的之一。

表 1

计算情况	弹塑性应变硬化理论	塑性的体应变情况 $E/E_{tm}^{(p)}$	弹塑性解包括应变软化
1	+	0	× ×
2	+	0	$\lambda_e = 2.5, \sigma_{ce} = 5\sigma_Y, E/E_{te}^{(p)} = -800$ ×
2a	+	0.1	$\lambda_e = 2.5, \sigma_{ce} = 5.0\sigma_Y, E/E_{te}^{(p)} = -800$ $\lambda_m = 4.0, \sigma_{cm} = 7.5\sigma_Y, E/E_{tm}^{(p)} = -10$
3	+	0.2	同 上
4	+	0.5	同 上
5	+	0.2	$\lambda_e = 2.5, \sigma_{ce} = 5.0\sigma_Y, E/E_{te}^{(p)} = -800$ $\lambda_m = 4.0, \sigma_{cm} = 7.1\sigma_Y, E/E_{tm}^{(p)} = -10$

本文所用的求解方法是基于逐级更新的拉氏坐标体系下(up-dated Lagrangian formulation)的增量型大应变分析,其基本原理是由 McMeeking 和 Rice^[11] 所提供,即所得之解的位移速率应使泛函

$$I = \frac{1}{2} \int_v \left[\frac{\mathcal{D}r^{ij}}{\mathcal{D}t} D_{ij} - \sigma^{ij}(2D_{ik}D_{jl}g^{kl} - V^k|_i V_k|_j) \right] dv - \int_s \dot{F}^i V_i ds \quad (8)$$

为最小。其中除已说明的符号外, v 是体积, s 为面积, \dot{F} 是外力变化率, V 是位移速率。

以下将利用方程组(4)、(8)分析各种圆柱试棒的颈缩并与 Mackenzie 等^[2]所提供的 Q1 (ST) 高强度钢材的实验结果相比较。计算时取轴向 z 的伸长为广义时间 t 。六种计算情况所涉及的参数范围可见表 1 (其中 σ_y 是材料的屈服应力)。材料的塑性(偏)切线模量与等效应变的关系(摘录自文献[7]表 1)并列在表 2。

表 2 $\epsilon_e - (E/E_t^{(p)})$

ϵ_e	0.01	0.03	0.04	0.08	0.10
$E/E_t^{(p)}$	20	230	270	300	350
ϵ_e	0.12	0.14	0.50	>0.60	
$E/E_t^{(p)}$	470	710	910	-800	

三、圆柱试棒的颈缩分析

作者曾用差分法计算过圆柱试棒的颈缩^[5],如图 1(P)所示,取其四分之一部分,在 z 轴上划分为 24 个等间距差分格子。在 r 轴上采用幂级数展开,取 11 个数值积分点,同时进行拉氏乘子法修正边界情况以逼近侧向应力为零的条件。试样的尺寸比值取为 $L/R = 4$ 。计算方法和步骤见文献[5]。在需要计及塑性体膨胀性时只需将文献[5]中塑性不可压缩的本构方程更换为这里的方程(4)及软化条件(5)、(6)。

由此算得在最小断面上的平均轴向应力 σ_a 与颈缩 r_0/r (即初始最小断面半径与瞬时的半径之比)可见图 3 所示。总的来看,随着计及塑性体膨胀的影响(如情况 2a、3、4)以及平均应力软化开始的临界应力 σ_{em} 数值的变化(如情况 5),关系曲线的极值点位置可以有显著的变化。考虑到实际实验过程在不稳定阶段的分散性(见图 3 情况 p 的同一材料的两条实验曲线),以上各类情况的差别可视作对计算结果影响不大,由此可见,对于无缺口的圆柱试棒可以忽略塑性体膨胀的影响(由于三轴张力值相对有缺口的情况是较小的)作为初步的颈缩分析计算。

由此也就论证了上一节中所述的为标定两个塑性切线模量时所需采取的各步骤中的第(2)步。

四、缺口试棒的颈缩分析

设有轴对称的带缺口试样其外形如图 1(A)、(D)所示。取其四分之一并划分为 456 个等应变三角单元(共 260 个节点)。对缺口(A)取 $L/R = 2$,而对(D)则取作 1.5。计算方法类似于求解空洞模型时所用的步骤(详见文献[6]),一般需用 400 个以上的增量来完成整个计算。

按表 1 中所列六类情况进行计算后所得的最小断面上的轴向应力平均值与颈缩的关系曲线也都被绘制在图 3 中。与圆柱棒(P)的结果相比,可以显见,计及塑性可膨胀性及

应变软化后(如情况 2a, 3, 4) 结果更接近实验. 再者, 情况 1 (纯弹塑性应变硬化解) 与情况 3、4 的差距百分数随着三轴张力的增大(从缺口(A)的约 6% 转为(D)的约 9%) 而增加. 按文献[7]直接从空洞模型的分析所导出的各材料参数本应是接近第 5 情况, 而图 3 中的结果表明, 情况 3、4 更为接近实验. 这一情况是可以理解的. 因为在与实验曲线相比较时其中包含了两重近似性, 即 (a) 实验值(图 4) 本身是由 Bridgman^[9] 的近似计算式导出的 (b) 以空洞模型的总体响应代表材料在宏观意义上一点的特性也有近似性. 因

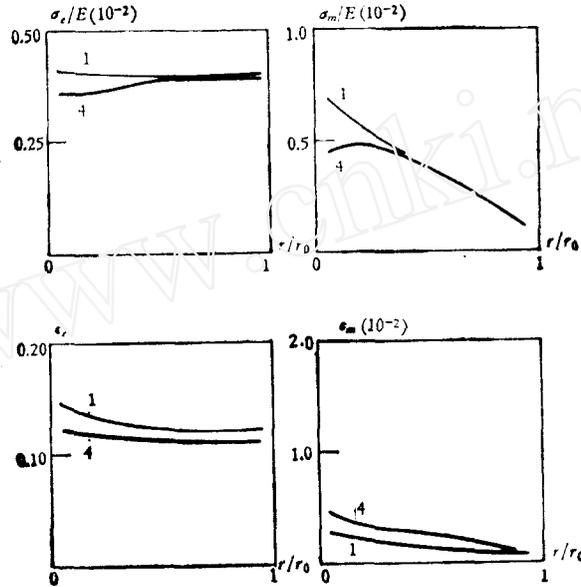


图 5 A 试样在最小断面上的应力、应变分布 ($r_0/r = 1.056$)

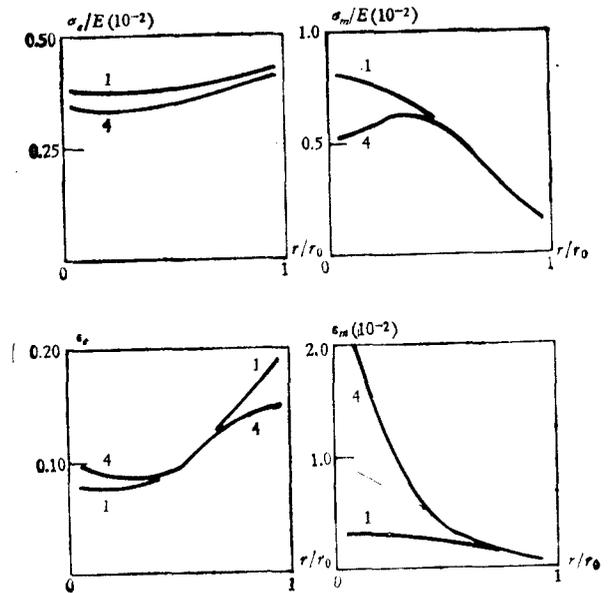


图 6 D 试样在最小断面上的应力、应变分布 ($r_0/r = 1.058$)

此有必要用这里的计算重新核实一下或说再标定一次。如以情况 3、4 为准则平均应力-应变曲线的软化点临界应力 σ_{cm} 应从情况 5 的 $7.1\sigma_Y$ 改为 $7.5\sigma_Y$ 。

图 5 及图 6 给出了在最小断面上的等效应力 σ_e 、平均应力 σ_m 、等效应变 ϵ_e 和平均应变 ϵ_m 在径向的分布。可以看出,在大体相同的颈缩值 r_0/r 下,试样 (D) 比试样 (A) 具有更显著的平均应力的软化或平均应变的增殖。在 $r_0/r = 1.058$ 时,对于试样 (D) 已刚刚超过图 3 中的极值点,在等效应力、应变的分布图上软化作用虽有一定影响但不如平均应力、应变的分布图上显著。这当然也和软化后所取的塑性(偏)切线模量值的大小有关。

图 7 展示了应力软化区域的扩展情况。总的看来,直至最小断面上平均 σ 向应力 σ_a 达到峰值之后(如图 3 所示,对于缺口(A)是 $r_0/r = 1.101$ 而(D)为 $r_0/r = 1.056$),应力软化区主要局限在缺口区域内。联系到在裂纹顶端,随着受力和变形的加大,周围的材料将逐渐空洞化。为此,继续用弹塑性的应变硬化理论来描述它们,显然是不合理的。而采用目前的计算方法和模型则可以区分出材料的不同损伤程度。

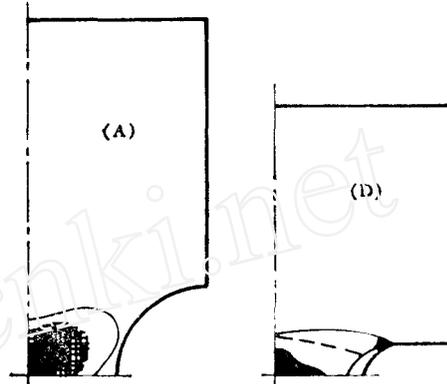


图 7 应力(σ_e 、 σ_m)软化的扩展(情况 4)
 σ_e 软化
 --- $r_0/r = 1.056$ --- $r_0/r = 1.028$
 ——— $r_0/r = 1.101$ ——— $r_0/r = 1.058$
 σ_m 软化
 ■ $r_0/r = 1.056$ ■ $r_0/r = 1.058$
 □ $r_0/r = 1.101$

五、结 论

1. 将本构方程(1)或其逆形式(4)用于分析轴对称试棒的韧性断裂后,结果表明了其合理性和计及塑性可膨胀性的重要性。
2. 比较试样(P)、(A)、(D) 中的各个情况 1、2 与 2a、3、4 等表明,随着三轴张力的增加塑性可膨胀的影响也将加大。比较 2a、3、4 各个情况又表明,在所选用的塑性可膨胀性的参数范围内 ($E/E_m^{(p)} = 0.1-0.5$),对图 3 中的结果影响较小。
3. 采用应变软化模型计算有利于区分材料所经受的不同程度的韧性损伤(如图 5、6、7 所表明的)。
4. 可以用试算的办法直接用轴对称试棒的实验(有和没有缺口的)模拟标定方程(1)或(4)中的两个塑性切线模量。由空洞模型分析所得的参数值可作为试算的初值。

参 考 文 献

- [1] Iricibar, R., Le Roy, G. and Embury, J. D., Relationship of Strain Hardening and Damage in Ductile Fracture, *Met. Sci.*, 14 (1980), 337.
- [2] Gurson, A. L., Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *J. Eng. Mat. Technol.*, 99(1977), 2.

- [3] Brown, D. K., Hancock, J. W. and Thomson, R., Parks, D. M., The Effect of Dilating Plasticity on Some Elastic-Plastic Stress and Strain Concentration Problems Relevant to Fracture, Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, U. K. (ed. by D. R. J. Owen and A. R. Luxmoore) (1980), 309.
- [4] Rousselier, G., Constitutive Relations Including Ductile Fracture Damage, Application to Cracked Bodies, Advances in Fracture Research (ed. D. Francois) ICF 5, Cannes, France, 2(1981), 803.
- [5] Li Guochen, Necking in Uniaxial Tension, *Int. J. Mech. Sci.*, 25(1983), 47.
- [6] Li Guochen and Howard, I. C., The Effect of Strain Softening in the Matrix Material During Void Growth, *J. Mech. Phys. Solids*, 31(1983), 85.
- [7] Li Guochen and Howard, I. C., A Computer Simulation of Ductile Behaviour in a High Strength Steel, ICF Int. Symposium on Fracture Mechanics, Beijing, China, Nov. (1983).
- [8] Hancock, J. W. and Mackenzie, A. C., On the Mechanisms of Ductile Fracture in High-Strength Steels Subjected to Multi-Axial Stress-States, *J. Mech. Phys. Solids*, 24(1976), 147.
- [9] Bridgman, P. W., Studies in Large Flow and Fracture, McGraw-Hill, New York (1952).
- [10] Li Guochen and Howard, I. C., The Sensitivity of the Macroscopic Consequences of Void Growth in Ductile Materials to Various Mechanical and Geometrical Micro-Parameters. *Int. J. Solid and Structures* (待发表).
- [11] McMecking, R. M. and Rice, J. R., Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation, *Int. J. Solids and Structures*, 11 (1975), 601.
- [12] Mackenzie, A. C. Hancock, J. W. and Brown, D. K., On the Influence of State of Stress on Ductile Failure Initiation in High Strength Steels, *Engng. Fracture Mech.*, 9(1977), 167.

DILATATIONAL PLASTIC CONSTITUTIVE EQUATIONS AND APPLICATION IN THE DUCTILE FRACTURE ANALYSIS OF AXISYMMETRIC SPECIMENS

Li Guochen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The effect of large strain and high triaxiality favours the initiation and growth of voids in many ductile materials. This causes volumetric dilatation in the plasticity. So, dilatational plastic constitutive equations are proposed as eq. (1) and the inverse form in eq. (4). In which, $E_{im}^{(p)}$ is the volumetric plastic tangent modulus. When $E_{im}^{(p)} \rightarrow \infty$, then yields the conventional Prandtl-Reuss equations. In eqs. (5) and (6) the criteria of strain softening are given, when either of these condition is met $E_{ie}^{(p)}$ or $E_{im}^{(p)}$ turns to negative. The six material constants $E_{ie}^{(p)}$, $E_{im}^{(p)}$, λ_c , σ_{ce} , λ_m and σ_{cm} can be calibrated and justified by using the necking tests of axisymmetric bars (with and without notches) and the computer simulation technique. The importance of the dilatational plastic effect and the strain softening is delineated in figs. 5, 6, 7.