

# 关于磁流体力学激波稳定性 理论的几个问题

徐 复

(中国科学院力学研究所,北京)

## 摘 要

本文讨论一类特殊的 MHD 激波的稳定性问题(或进化性问题),即此激波与二维斜入射小扰动波的相互作用问题,相当于推广气动力学激波的结果<sup>[1]</sup>. 过去的稳定性理论,即一维小扰动波与 MHD 激波相互作用的结果是,只有快激波与慢激波是稳定的,中间激波不稳定. 本文的结果是:当小扰动波为 Alfvén 波时,得到与激波前后参数有关的新的稳定条件. 当小扰动波为熵波与快、慢磁声波时,则稳定条件还与小扰动波的频率有关. 并且作为一种极限情形,取垂直入射(反射、折射)时,快激波与慢激波都不稳定. 本文计算还表明,Конторович 一文<sup>[2]</sup>的结论不能应用于激波稳定性理论.

## 一、序 言

磁流体力学激波的研究大体上从 1950 年开始. 满足守恒定律和热力学第二定律的磁流体力学激波可以多到六个,即快激波、慢激波和四个中间激波. 一个问题是,是否所有这些激波在实际上都能实现. 人们从不同途径寻求这个问题的答案. 一条途径就是根据朗道和栗弗席兹关于激波稳定性的概念<sup>[3]</sup>. 假定在无耗散介质中,有一平面、定常激波,在激波两边,有一个或数个平面、单色小扰动波入射到激波上. 如果认为入射波的振幅给定,若能从扰动激波上的条件唯一决定各离散波(折射波与反射波)的振幅,则称激波是稳定的. 否则称为激波不稳定. 朗道和栗弗席兹讨论一维小扰动波与气动力学激波的相互作用<sup>[3]</sup>,得到的稳定性条件是

$$M_1 > 1, M_2 < 1,$$

即和热力学第二定律相一致.

1958 年,苏联学者 Ахиезер 等<sup>[4]</sup>和 Сыроватский<sup>[5]</sup>把朗道和栗弗席兹的激波稳定性概念,用到磁流体力学激波上去. 他们都讨论一维小扰动波与磁流体力学激波的相互作用问题. 得到的结论是,只有快激波与慢激波是稳定的,而中间激波不稳定. 这些结果可参看文献 [6—9].

1958 年,Конторович 讨论了二维小扰动波与磁流体力学激波的相互作用问题<sup>[2,6]</sup>. 他用群速度的方向定义入射波与离散波,并用作图方法证明了离散波的个数不随入射角而变化. 本

本文于 1982 年 3 月 4 日收到; 1984 年 3 月 2 日收到修改稿.

文用解析方法证明,这个结论不能用于讨论激波稳定性.

在空间物理学中,也讨论二维小扰动波与地球弓形激波的相互作用问题.但他们一般限于激波上游只有一个人射的小扰动波<sup>[10]</sup>.问题的提法本身决定了他们不可能全面回答磁流体力学激波稳定性定义所提出的问题.

本文把二维小扰动波与气动力学激波相互作用的结果<sup>[1]</sup>,推广到磁流体力学激波上去.入射波与离散波的定义既可根据相速度方向,也可根据群速度方向.在文献[1]中,得出了某些频率的二维小扰动波,会使气动力学激波不稳定的结论.实际情形也许是,还需要小扰动波的

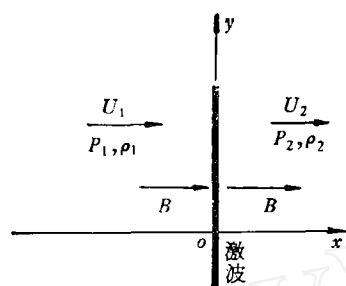


图 1

振幅超过某一临界值时,才会出现不稳定现象.本文采用解析方法,针对一种特殊的磁流体力学激波,重新讨论了二维小扰动波与激波的相互作用问题.结果与一维小扰动波的情形不同.本文给出了存在唯一解的参数范围.当小扰动波为 Alfvén 波时,得到与激波前后参数有关的新的稳定性条件.而当小扰动波为熵波与快、慢磁声波时,则稳定性条件还与频率有关.并且,无论按相速度方向还是群速度方向来定义入射波与离散波,当取一种极限情形,即小扰动波垂直入射(反射与折射)时,快激波与慢激波都不稳定.所有这些不同都说明, MHD 激波稳定性理论都还有不少值得进一步讨论和完善之处.

明, MHD 激波稳定性理论都还有不少值得进一步讨论和完善之处.

## 二、一类磁流体力学激波

我们取直角坐标系  $oxyz$ . 激波前后的速度  $\mathbf{u}$ , 磁场  $\mathbf{B}$  均位于  $xy$  平面. 激波阵面取为  $yz$  平面.

我们假定

- (1)  $\mathbf{u} = (U, 0, 0)$ ,
- (2)  $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$ ,
- (3) 等离子体是理想可压缩的.

采用高斯单位.

激波前后物理量的关系为:

$$\begin{aligned} B_{x_1} &= B_{x_2} = B, \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2, \\ P_1 + \rho_1 U_1^2 &= P_2 + \rho_2 U_2^2, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} U_1^2 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} U_2^2, \end{aligned}$$

式中  $\gamma$  为比热比. 由这些方程可以看出,目前考虑的激波是在气动力学激波上,迭加上垂直于激波阵面的一个均匀磁场  $B$ .

## 三、二维小扰动波

如果在激波前后发生了二维小扰动,则支配小扰动的方程是:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}_x + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}_v + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= -\frac{B}{4\pi} \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial y} + \frac{B}{4\pi} \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}_z &= \frac{B}{4\pi} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\rho} + \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (\tilde{p} - C^2 \tilde{\rho}) &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{B}_x + B \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{B}_y - B \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{B}_z - B \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

以及

$$\frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial y} = 0,$$

式中  $C^2 = \gamma p / \rho$  为声速平方,  $\tilde{q}$  表示未扰量  $q$  的扰动.

我们寻找平面波形式的解, 即假定各扰动量均正比于

$$\cos(K_x x + K_y y + \omega t),$$

式中  $\mathbf{K} = (K_x, K_y, 0)$  为波矢,  $\omega$  为频率.

各种小扰动波是

(1) 熵波 色散关系  $\omega + UK_x = 0$ , 解为:  $\tilde{p} = \tilde{u} = \tilde{\mathbf{B}} = 0$ ,  $\tilde{\rho} \neq 0$ .

(2) Alfvén 波 色散关系为:

$$(\omega + UK_x)^2 - \frac{B^2}{4\pi\rho} K_x^2 = 0,$$

解为

$$\begin{aligned} \tilde{p} = \tilde{\rho} = \tilde{u}_x = \tilde{u}_y = \tilde{B}_x = \tilde{B}_y &= 0, \\ \tilde{u}_z = \pm \tilde{B}_z / \sqrt{4\pi\rho}. \end{aligned}$$

(3) 快、慢磁声波 色散关系为:

$$\left( \frac{(\omega + UK_x)^2}{K_x^2 + K_y^2} \right)_{+,-} = \frac{1}{2} \left( \frac{B^2}{4\pi\rho} + C^2 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{B^2}{4\pi\rho} + C^2 \right)^2 - C^2 \frac{B^2}{4\pi\rho} \frac{K_x^2}{K_x^2 + K_y^2}},$$

解为:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z = \tilde{B}_z &= 0, \\ \tilde{u}_x &= -\frac{K_x}{\rho(\omega + UK_x)} \tilde{p}, \\ \tilde{u}_y &= \frac{K_y}{\frac{B^2}{4\pi} \frac{K_x^2 + K_y^2}{\omega + UK_x} - \rho(\omega + UK_x)} \cdot \tilde{p}, \\ \tilde{B}_x &= -\frac{BK_y}{\omega + UK_x} \cdot \tilde{u}_y, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_y = \frac{BK_x}{\omega + UK_x} \cdot \tilde{u}_v,$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{C^2} \tilde{p}.$$

以上在激波前后的气流中,各有七个小扰动波. 如果已知在静止坐标系中的色散关系,通过坐标系之间的频率变换公式:

$$\omega_0 = \omega + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u},$$

也可得到上面运动坐标系中的色散关系.

注意,所有的小扰动波中,  $\omega$ ,  $K_y$  都分别取为同一值,且为正.

#### 四、扰动激波上的守恒定律

设扰动激波的形状为:

$$\tilde{x} = x_0 \sin(K_y y + \omega t).$$

由此,扰动激波速度为:

$$\tilde{N} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = x_0 \omega \cos(K_y y + \omega t),$$

法向为:

$$\mathbf{n} = (1, -x_0 K_y \cos(K_y y + \omega t), 0).$$

激波上的守恒定律或边界条件,可以写成以下矢量形式:

$$[\rho\theta] = 0, \quad \theta = N - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

$$[\rho] \cdot \mathbf{n} - \rho\theta[\mathbf{u}] = -\frac{1}{8\pi} [\mathbf{B}^2] \mathbf{n} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{B}],$$

$$-\rho\theta \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right] = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})],$$

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]_\tau = 0,$$

$$[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} = 0,$$

式中符号[ ]表示激波前后物理量的间断,  $\tau$  表示切向. 在本文中

$$N = \tilde{N}.$$

经过线性化,可以得到以下一组扰动激波上应满足的条件

$$\rho_1(\tilde{u}_{x_1} - \tilde{N}) + \tilde{\rho}_1 U_1 = \rho_2(\tilde{u}_{x_2} - \tilde{N}) + \tilde{\rho}_2 U_2,$$

$$\tilde{p}_1 + 2\rho_1 U_1 \tilde{u}_{x_1} - \rho_1 U_1 \tilde{N} + \tilde{\rho}_1 U_1^2 = \tilde{p}_2 + 2\rho_2 U_2 \tilde{u}_{x_2} - \rho_2 U_2 \tilde{N} + \tilde{\rho}_2 U_2^2,$$

$$p_1 \tilde{n}_y + \rho_1 U_1 \tilde{u}_{y_1} - \frac{B}{4\pi} \tilde{B}_{y_1} = p_2 \tilde{n}_y + \rho_2 U_2 \tilde{u}_{y_2} - \frac{B}{4\pi} \tilde{B}_{y_2},$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 U_1 \left( \frac{\tilde{p}_1}{p_1} - \frac{\tilde{\rho}_1}{\rho_1} \right) - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} U_1^2 \right) \{ \rho_1(\tilde{u}_{x_1} - \tilde{N}) + \tilde{\rho}_1 U_1 \} + \rho_1 U_1^2 \tilde{u}_{x_1}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 U_2 \left( \frac{\tilde{p}_2}{p_2} - \frac{\tilde{\rho}_2}{\rho_2} \right) - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} U_2^2 \right) \{ \rho_2(\tilde{u}_{x_2} - \tilde{N}) + \tilde{\rho}_2 U_2 \}$$

$$+ \rho_2 U_2^2 \tilde{u}_{x_2},$$

$$U_1 \tilde{B}_{y_1} - B \tilde{u}_{y_1} = U_2 \tilde{B}_{y_2} - B \tilde{u}_{y_2},$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{x_1} &= \tilde{B}_{x_2}, \\ \rho_1 U_1 \tilde{u}_{z_1} - \frac{B}{4\pi} \tilde{B}_{z_1} &= \rho_1 U_1 \tilde{u}_{z_2} - \frac{B}{4\pi} \tilde{B}_{z_2}, \\ B \tilde{u}_{z_1} - U_1 \tilde{B}_{z_1} &= B \tilde{u}_{z_2} - U_2 \tilde{B}_{z_2}.\end{aligned}$$

由于  $K_y, \omega$  均相同, 且为正. 所以以上各扰动量有一公共因子  $\cos(K_y y + \omega t)$ . 消去后, 得到八个方程, 可以决定八个扰动量的振幅.

注意, 最后两个方程只含  $\tilde{u}_z$  与  $\tilde{B}_x$ .

## 五、激波稳定性与 Alfvén 小扰动

假定在磁流体力学激波两边, 有一个或数个平面、单色小扰动波入射到激波上. 如果认为入射波或趋向波的振幅给定, 若能从扰动激波上的条件唯一决定各离散波 (折散波与反射波) 的振幅, 则称激波是稳定的 (进化的), 否则称为激波不稳定 (非进化的).

问题是, 什么波叫入射波? 什么波叫离散波? 和气动力学激波的讨论一样<sup>[1]</sup>, 我们可以用小扰动波的相速度方向来定义入射波与离散波, 也可以用群速度方向.

按相速度方向来定义入射波与离散波, 即看平面波的相速度方向是指向激波还是背向激波. 存在离散波的条件是:

$$\text{对激波前: } -\frac{K_x}{\omega} < 0 \text{ 或 } K_x > 0,$$

$$\text{对激波后: } -\frac{K_x}{\omega} > 0 \text{ 或 } K_x < 0.$$

按群速度方向来定义入射波与离散波, 即看平面波的群速度方向是指向激波还是背向激波. 存在离散波的条件是:

$$\text{对激波前: } -\frac{\partial \omega}{\partial K_x} < 0 \text{ 或 } \frac{\partial \omega}{\partial K_x} > 0,$$

$$\text{对激波后: } -\frac{\partial \omega}{\partial K_x} > 0 \text{ 或 } \frac{\partial \omega}{\partial K_x} < 0.$$

扰动激波上的条件可以分为两组. 一组是前六个方程, 联系激波前后  $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{B}_x, \tilde{B}_y$  等 12 个量. 后两个方程联系激波前后  $\tilde{B}_z, \tilde{u}_z$  等四个量. 我们先考虑后两个方程, 即考虑 Alfvén 波与 MHD 激波的相互作用.

定义

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{\omega}{C_1 K_y}, \quad M_1 = \frac{U_1}{C_1}, \quad M_2 = \frac{U_2}{C_2}, \\ X &= \frac{K_x}{K_y}, \quad A_1 = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_1} \cdot C_1}, \quad A_2 = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_2} \cdot C_1}.\end{aligned}$$

这时 Alfvén 波的色散关系是:

$$\bar{\omega} + M_1 X = \pm A_1 X$$

和

$$\bar{\omega} + M_2 \frac{C_2}{C_1} X = \pm A_2 X,$$

式中

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}}, \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{\sqrt{2(\gamma-1)}}{(\gamma+1)M_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1\right) \left(\frac{\gamma-1}{2} M_1^2 + 1\right)}.$$

由于扰动激波上的方程是两个,因此无论对一维还是二维小扰动波,激波对 Alfvén 扰动是稳定的,其条件是激波前后四个 Alfvén 波中有且仅有两个是离散的. 一维时稳定条件是

$$A_1 > M_1, A_2 > M_2$$

或

$$A_1 < M_1, A_2 < M_2.$$

而在二维时,由于对第二个条件

$$X_1 = \frac{\bar{\omega}}{-M_1 \pm A_1} < 0,$$

$$X_2 = \frac{\bar{\omega}}{-M_2 \frac{C_2}{C_1} \pm A_2} < 0,$$

即仅有激波后的两个 Alfvén 波是离散波,从而第二个稳定条件不变. 第一个条件则要改成

$$A_1 > M_1, A_2 > M_2 \cdot \frac{C_2}{C_1}.$$

这时激波前后各有一个离散的 Alfvén 波. 这样我们得到的结论是,对我们所考虑的 MHD 激波来说,相对 Alfvén 小扰动波为稳定的条件是

$$A_1 > M_1, A_2 > M_2 \cdot \frac{C_2}{C_1}$$

或

$$A_1 < M_1, A_2 < M_2.$$

## 六、慢激波与熵波、快、慢磁声波小扰动

我们现在来看另一种情况,假定小扰动波是熵波和快、慢磁声波. 这时方程组的数目为 6 个. 消去  $x_0$  之后,独立的方程是 5 个. 在激波前,熵波总是入射的,而在激波后,熵波总是离散的. 因此对这些扰动波而言,激波稳定的充要条件是在激波前后的八个快、慢磁声波中,有且仅有四个是离散波. 下面找出存在四个离散波的条件.

我们考虑一种特殊情况,即

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg p_1, \quad \frac{B^2}{8\pi} \gg p_2$$

或

$$A_1^2 \gg 1,$$

$$A_2^2 \gg \frac{C_2^2}{C_1^2}.$$

这时, 快磁声波的色散关系可近似为:

$$(\bar{\omega} + M_1 X)^2 = A_1^2 (X^2 + 1),$$

$$\left(\bar{\omega} + M_2 \frac{C_2}{C_1} X\right)^2 = A_2^2 (X^2 + 1).$$

慢磁声波的色散关系可近似为:

$$(\bar{\omega} + M_1 X)^2 = X^2,$$

$$\left(\bar{\omega} + M_2 \frac{C_2}{C_1} X\right)^2 = \frac{C_2^2}{C_1^2} X^2.$$

我们现在假定, 一维小扰动波与激波相互作用问题中, 稳定性条件

$$1 < M_1 < A_1, M_2 < 1,$$

即此激波为慢激波的条件已经满足. 现在看二维小扰动波与慢激波相互作用问题中, 慢激波是否稳定.

未扰激波的各无量纲参数, 取决于

$$\gamma, M_1, A_1.$$

在图 2 中

$$A_2 = M_2 \frac{C_2}{C_1},$$

相当于

$$A_1 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \cdot \sqrt{M_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}.$$

对  $\gamma > 1$ , 见图 2. 从图 2 可以看出, 满足条件

$$1 < M_1 < A_1, M_2 \frac{C_2}{C_1} < A_2$$

的参数范围, 是存在的.

1. 首先来分析激波前后的快磁声波, 当

$$1 < M_1 < A_1$$

时, 激波前的色散关系是一双曲线. 我们只取  $\bar{\omega} > 0$  的一支. 点  $p$  以上是一个快磁声波, 点

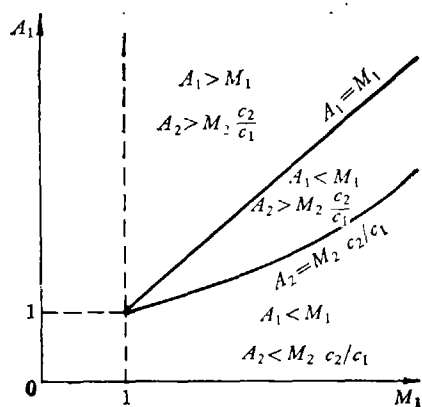


图 2  $\gamma > 1$

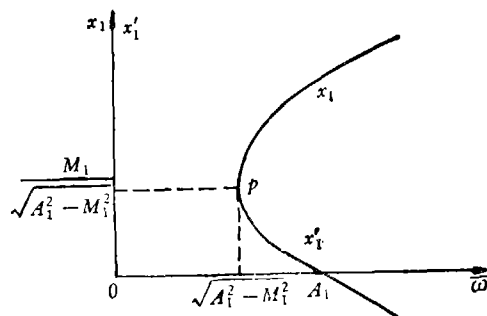


图 3  $M_1 < A_1, \gamma > 1$

$p$  以下是另一个.

我们可以从解析上证明,也可以简单地从图 3 上看出.

用相速度方向定义入射波与离散波时,

对于激波前

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\omega} < \sqrt{A_1^2 - M_1^2} & \quad \text{无快磁声波,} \\ \sqrt{A_1^2 - M_1^2} < \bar{\omega} < A_1 & \quad \text{有两个离散的快磁声波,} \\ A_1 < \bar{\omega} & \quad \text{有一个离散的快磁声波.} \end{aligned}$$

用群速度方向定义入射波与离散波时,

对于激波前

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\omega} < \sqrt{A_1^2 - M_1^2} & \quad \text{无快磁声波,} \\ \sqrt{A_1^2 - M_1^2} < \bar{\omega} & \quad \text{有一个离散的快磁声波.} \end{aligned}$$

对于激波后的快磁声波,其色散关系见图 4.

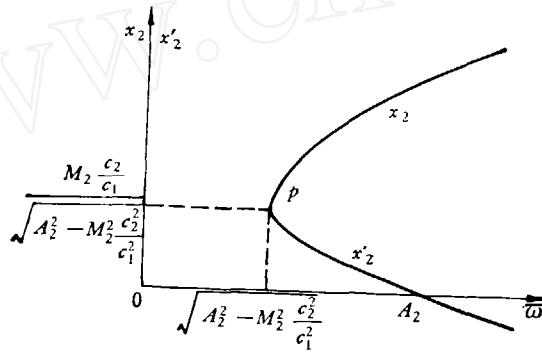


图 4  $A_2 > M_2 \frac{C_2}{C_1}$ ,  $r > 1$

我们不作解析上的证明,而只从图上看出:

对于激波后,用相速度方向定义入射波与离散波:

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\omega} < \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} & \quad \text{无快磁声波,} \\ \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} < \bar{\omega} < A_2 & \quad \text{无离散的快磁声波,} \\ A_2 < \bar{\omega} & \quad \text{有一离散快磁声波;} \end{aligned}$$

用群速度方向定义入射波与离散波:

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\omega} < \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} & \quad \text{无快磁声波,} \\ \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} < \bar{\omega} & \quad \text{有一离散快磁声波.} \end{aligned}$$

现在把激波前后的快磁声波数目总结如下: 用相速度方向定义入射波与离散波时,

(1) 若  $A_2 < \sqrt{A_1^2 - M_1^2}$ , 则



$0 < \bar{\omega} < A_2$	无离散的快磁声波,
$A_2 < \bar{\omega} < \sqrt{A_1^2 - M_1^2}$	有一离散的快磁声波,
$\sqrt{A_1^2 - M_1^2} < \bar{\omega} < A_1$	有三离散的快磁声波,
$A_1 < \bar{\omega}$	有二离散的快磁声波.

(2) 若  $\sqrt{A_1^2 - M_1^2} < A_2 < A_1$ , 则

$0 < \bar{\omega} < \sqrt{A_1^2 - M_1^2}$	无离散的快磁声波,
$\sqrt{A_1^2 - M_1^2} < \bar{\omega} < A_2$	有二离散的快磁声波,
$A_2 < \bar{\omega} < A_1$	有三离散的快磁声波,
$A_1 < \bar{\omega}$	有二离散的快磁声波.

按群速度方向定义入射波与离散波时,

$$0 < \bar{\omega} < \min \left( \sqrt{A_1^2 - M_1^2}, \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} \right) \quad \text{无快磁声波,}$$

$$\min \left( \sqrt{A_1^2 - M_1^2}, \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} \right) < \bar{\omega} < \text{Max} \left( \sqrt{A_1^2 - M_1^2}, \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} \right)$$

有一离散快磁声波,

$$\text{Max} \left( \sqrt{A_1^2 - M_1^2}, \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}} \right) < \bar{\omega} \quad \text{有二离散快磁声波.}$$

2. 下面来分析激波前后的慢磁声波

激波前后的色散关系分别是:

$$\bar{\omega} = (-M_1 \pm 1)X,$$

$$\bar{\omega} = (-M_2 \pm 1) \frac{C_2}{C_1} X.$$

由于已满足条件  $M_1 > 1$ ,  $M_2 < 1$ , 所以无论按相速度方向还是群速度方向来定义入射波与离散波, 仅在激波后有一离散的慢磁声波.

慢激波的稳定条件, 即激波前后具有四个离散的快、慢磁声波的条件, 也就是具有三个离散的快磁声波的条件. 前面已给出按相速度方向和群速度方向来定义入射波与离散波时, 存在不同数目离散的快磁声波的参数范围. 按群速度方向定义时, 整个  $\bar{\omega} > 0$  都不存在三个离散的快磁声波.

结论是, 满足一维小扰动波与激波相互作用时激波的稳定条件

$$1 < M_1 < A_1, \quad M_2 < 1$$

的激波是慢激波. 而此慢激波与二维小扰动波相互作用, 仍存在某些频率范围的快、慢磁声波, 使慢激波不稳定.

对于激波前如果  $\bar{\omega} > \sqrt{A_1^2 - M_1^2}$ , 对于激波后如果  $\bar{\omega} > \sqrt{A_2^2 - M_2^2 \frac{C_2^2}{C_1^2}}$ , 这时  $\bar{\omega}$  的变化实际上即为入射角的变化. 计算表明离散波的个数不变, 也就是说, Конторович 的结论<sup>[2]</sup> 是对的. 但在激波稳定性理论中, 要考虑整个频率范围  $\bar{\omega} > 0$ , 上面的计算表明, 离散波的个数在变化, 我们不能引用 Конторович 的结果. 有些文献<sup>[6]</sup> 仍引用是不对的.

特别是,取  $K_y \rightarrow 0$ ,  $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ . 这时小扰动波为垂直入射(反射和折射),则无论按相速度方向还是群速度方向来定义入射波与离散波,慢激波都不稳定. 这个问题值得讨论.

## 七、快激波与熵波、快、慢磁声波小扰动

本文中关于慢激波的讨论,也可应用于快激波. 这里假定

$$\frac{B^2}{4\pi\rho_1} \ll C_1^2 < U_1^2, \quad \frac{B^2}{4\pi\rho_2} \ll U_2^2 < C_2^2.$$

这一快激波对二维小扰动波而言,稳定的条件是存在二个离散的快磁声波. 计算表明,无论按相速度方向还是群速度方向来定义入射波与离散波,整个频率范围都不存在两个离散的快磁声波,即快激波不稳定. 特别地,当  $K_y \rightarrow 0$ ,  $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ , 即小扰动波均为垂直入射(反射和折射)时,快激波也不稳定. 这个问题值得讨论.

### 参 考 文 献

- [1] 徐复,力学学报,1982, 2: 144—153.
- [2] Конторович, В. М., ЖЭТФ., Т. 35 (1958), 1216—1225.
- [3] 朗道,栗弗席兹,连续介质力学第二册,人民教育出版社,1960, 425—427.
- [4] Ахизер, Л. И. и др., ЖЭТФ., 35 (1958), 731—737.
- [5] Сыроватский С. П., ЖЭТФ., 35 (1958), 1456—1470.
- [6] Anderson, J. E., *Magnetohydrodynamic Shock Waves*, MIT. Press, 1963, 31—84.
- [7] 库里柯夫斯基,留比莫夫(徐复等译),磁流体力学,上海科学技术出版社,1966, 101—108.
- [8] Cabannes, H., *Theoretical Magnetofluidynamics*, Academic Press, 1970, 67—80.
- [9] Akhiezer, A. I. et al., *Plasma Electrodynamics*, Vol.1, Pergamon Press, 1975, 115—121.
- [10] Zhuang, H. C. & Russell, C. T., *Phys. Fluids*, 25 (1982), 5: 748—758.