中国科学

1984 年 9 月　　A 辑　　第 9 期

部分浸润三维振荡物体的辐射短表面波

陈嗣熊

(中国科学院力学研究所,北京)

摘　要

本文讨论了水面上三维物体的任意振荡运动所产生的短表面波. 在离开物体的远场区,用射线法确定了辐射波的位相与振幅函数,在振幅函数中包含了一个未定常数因子. 由文献[1]的结果,求得了接近物体水线处的近场边界层解,其振幅依赖于物体的整体壁面形状与在水线的垂直横截面上物体壁面在水线的斜度. 由远场解与近场边界层解的匹配确定了远场辐射波的振幅函数中的未定常数. 对于半浸润球体作垂直振荡运动的特殊情形,本文的结果与文献[2]的结果完全一致.

一、引　言

如果水面上的物体对固定平衡位置作小振幅周期振荡，它将在流体中产生小振幅周期重力波 .我们希望在重力波的波长远较物体的特征尺度为小的情形下，由物体的振荡条件来确定这些波. 在文献[1]中,我们已讨论了具任意横截面形状的二维振荡柱体的情形. 但实际上我们更多遇到的是三维振荡物体的情形. 对它的研究可使我们进一步了解一般造波机理，同时,能使我们计算出流体作用在振荡物体上的力与力矩,这是海洋工程中人们所关心的问题之一.

早在 1953 年 Ursell[3] 就开始了对二维振荡柱体所产生的表面波问题的研究. 这以后又有许多学者[4-15]对这一问题作了进一步深入的研究. 但是,大部分的研究都是对于水线点柱体壁面是垂直的情形而进行的. 文献[1]解决了一般形状柱体作任意振荡运动时,所产生的短表面波问题. 在文献[16]中给出了一般形状柱体的任意振荡运动的附加质量矩阵与辐射阻尼矩阵. 对于三维问题，目前讨论尚不多. Hermans[2] 讨论了在水线各处壁面都为垂直的三维物体作垂直振荡运动时所产生的短表面波. 本文讨论了一般形状的三维物体（在水线处物体壁面可以垂直亦可倾斜)作任意振荡运动时,所产生的短表面波.

我们用朴实渐近展开[17]的零级近似作为基本流动,它是位势流问题的解,一般可用数值方法求解. 为了满足辐射条件，在这基本流动上叠加波动解. 流体自由表面上的小振幅短表面波是沿着射线传波的. 由于流体介质均匀各向同性，射线为直线. 由于波浪由物体的振荡运动所产生，射线都从物体的水线 C 发出. 又由于物体的运动是刚体运动（这里我们不考虑物体的变形运动),物体上所有的点有相同的位相,因此,沿物体水线 C 上所有点的波浪运动有相

本文 1984 年 1 月 27 日收到.

同的位相，这说明水线 C 是波前，射线都垂直于水线 C. 由于介质均匀各向同性，在每一根射线上的波浪位相随离开水线的距离线性增加．由于沿二邻近射线内的能量守恒，可以推得波振幅与离水线 C 的曲率中心的距离的平方根成反比．因此，沿每一根射线，只要振幅的初值确定后，波动解就完全被确定了．在每一根射线上的振幅初值由接近水线处的流体近场流动的解所确定．这就是我们求解三维振荡物体的水波问题的基本思想．

二、问题的公式表达

假定流体为不可压缩，无粘性的，并且由静止开始运动，因此，运动是无旋的．设流体的运动是由部分浸润的三维物体的小振幅周期运动所产生．假定坐标轴 oy 垂直向下指向流体，坐标轴 ox 与 oz 在未扰动自由表面上，坐标原点 o 在物体内部．我们用 S 表示物体的湿润曲面的平衡位置，其曲面方程由 $f(x, y, z)=0$ 给出．流体在下半空间 $(y>0)$ 以角频率 ω 的运动，可以用速度势 $\phi(x, y, z)\exp(-i\omega t)$ 来描述，这里 t 表示时间变量．$\phi(x, y, z)$ 满足以下方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\ \text{在}\ S\ \text{外},\ y\geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$K\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,\ \text{在}\ C\ \text{外},\ y=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=V(x, y, z),\ \text{在}\ S\ \text{上}, \tag{2.3}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\phi}{\partial r}=0,\ \text{在水线}\ C\ \text{上}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\phi=0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{R\to\infty}R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}-iK\phi\right)=0, \tag{2.6}$$

这里(2.2)式中，$K=\omega^2/g$，g 为重力加速度；(2.3) 式中，$V(x, y, z)$ 表示在物体表面 S 上 (x, y, z) 点的法向速度，$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示在 S 上沿 S 的外法线方向的导数；在正则性条件(2.4)式中，r 表示离开水线 C 的距离；在辐射条件 (2.6)式中，R 表示离开 S 内某点的距离．我们考虑一般的振荡运动，$V(x, y, z)$ 假定为任意解析函数．辐射条件 (2.6) 式表示在无穷远处波是向外传播的．当 S 位于通过 C 的垂直柱面内，John[18] 证明了问题 (2.1)—(2.6) 式的解的唯一性．由 Bernoulli 方程，波高 $\eta(x, z)$ 可用速度势 ϕ 表示为：

$$\eta(x, z)=-\frac{i\omega}{g}\phi(x, 0, z).$$

我们的目的是希望求得当 $KL\to\infty$ 时，ϕ 的渐近形式，这里 L 为物体的典型尺度．由于波长是 $2\pi/K$，因此，$KL\to\infty$ 意即波长远较物体的典型尺度为小．

假定问题(2.1)—(2.6)式的解 $\phi(x, y, z)$ 可以展开为下列关于 K^{-1} 的渐近幂级数：

$$\phi(x, y, z)\sim\sum_{i=0}^{\infty}K^{-i}\phi^{(i)}(x, y, z),\ \text{当}\ K\to\infty. \tag{2.7}$$

渐近展开式(2.7)称为朴实渐近展开．把(2.7)式代入(2.1)—(2.6)式，我们得到以下关于 $\phi^{(0)}$ 的

方程:

$$\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial z^2}=0,\ \text{在}\,S\,\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$\phi^{(0)}=0,\ \text{在}\,C\,\text{外},\ y=0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial n}=V(x,y,z),\ \text{在}\,S\,\text{上}, \tag{2.10}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial r}=0,\ \text{在水线}\,C\,\text{上}, \tag{2.11}$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{\frac{1}{2}}\phi^{(0)}=0\ \text{与}\ \lim_{y\to+\infty}\nabla\phi^{(0)}=0. \tag{2.12}$$

对于 $\phi^{(i)}(i\geqslant 1)$，我们得到以下方程:

$$\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi^{(i)}}{\partial z^2}=0,\ \text{在}\,S\,\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{2.13}$$

$$\phi^{(i)}=\frac{\partial\phi^{(i-1)}}{\partial y},\ \text{在}\,C\,\text{外},\ y=0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial n}=0,\ \text{在}\,S\,\text{上}, \tag{2.15}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial r}=0,\ \text{在水线}\,C\,\text{上}, \tag{2.16}$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{\frac{1}{2}}\phi^{(i)}=0\ \text{与}\ \lim_{y\to+\infty}\nabla\phi^{(i)}=0. \tag{2.17}$$

由条件(2.9)式,我们可以令 $\phi^{(0)}(x,-y,z)=-\phi^{(0)}(x,y,z)$，则 $\phi^{(0)}(x,y,z)$ 被延拓到了 $y<0$ 的区域. 因此,问题(2.8)—(2.12)式相当于物体使得在物体表面的法向速度为 $V(x,y,z)$ 而在流体中运动时的位势流问题. 它一般可以用数值方法来求解[2]. 它的解不显示波动性. 下面我们将指出 $\phi^{(1)}(x,y,z)$ 不能满足正则性条件(2.16),这说明 $\phi^{(1)}(x,y,z)$ 在水线 C 处有较强的奇异性. 因此,为了使 $\phi(x,y,z)$ 能满足条件(2.4)式,我们应该使 $\phi(x,y,z)$ 中包含的最低阶波动函数 $\tilde{\phi}(x,y,z)$ 与 $\frac{1}{K}\phi^{(1)}(x,y,z)$ 一起满足条件(2.4)式,也即我们应该令

$$\phi(x,y,z)\sim\phi^{(0)}(x,y,z)+\tilde{\phi}(x,y,z)+\frac{1}{K}\phi^{(1)}(x,y,z)+\cdots,\ \text{当}\ K\to\infty. \tag{2.18}$$

这里 $\tilde{\phi}(x,y,z)$ 在无穷远处应满足辐射条件(2.6)式.

三、用射线法求外部波动解

我们首先来讨论远离物体的外部波动解. $\phi^{(1)}(x,y,z)$ 除了在水线 C 附近外，能满足(2.13)—(2.15)式与(2.17)式. 把(2.18)式代入(2.1),(2.2),(2.5)与(2.6)式. 由于这里考虑远离物体的外部区,我们省略了边界上的条件(2.3)与(2.4)式, 因此, 在外部区 $\tilde{\phi}(x,y,z)$ 应满足以下方程:

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}=0,\ y\geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$K\tilde{\phi}+\tilde{\phi}_y=0,\ 在\ y=0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\tilde{\phi}=0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{R\to\infty}R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial R}-iK\tilde{\phi}\right)=0. \tag{3.4}$$

对于 $KL\gg 1$ 的情形，波浪主要集中在接近自由表面的层中，即波浪应随 y 的增加而指数地衰减，因此，我们可以令

$$\tilde{\phi}(x,y,z)=e^{-Ky}\tilde{\phi}(x,z). \tag{3.5}$$

显然，$\tilde{\phi}$ 的(3.5)式已满足条件(3.2)，(3.3)式. 把(3.5)式代入(3.1)式，我们可得

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}+K^2\tilde{\phi}=0. \tag{3.6}$$

由于 $K\gg 1$，对方程(3.6)，我们可以用几何光学渐近近似展开式[19,20]

$$\tilde{\phi}\sim\left[\sum_{n=0}^{\infty}(iK)^{-n}W_n\right]\exp[iKS_1(x,z)]. \tag{3.7}$$

把(3.7)式代入(3.6)式，并令K的同次幂的系数等于零，最后可得下列 eiconal 方程与输运方程：

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2=1, \tag{3.8}$$

$$2\nabla S_1\cdot\nabla W_0+W_0\nabla^2S_1=0, \tag{3.9}$$

$$2\nabla S_1\cdot\nabla W_m+W_m\nabla^2S_1=-\Delta W_{m-1},\ m\geqslant 1. \tag{3.10}$$

用特征理论解一阶偏微分方程(3.8)[19]. 设 τ 为从水线C上一点起算的特征线的长度，则

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=0,\ \frac{d^2z}{d\tau^2}=0,\ \frac{dS_1}{d\tau}=1. \tag{3.11}$$

假定在C上位相 $S_1=0$，则由(3.11)式的第三式，可得

$$S_1=\tau. \tag{3.12}$$

由(3.11)式的第一、二式，我们知道特征线为直线. 由(3.8)式的特征方程，我们知道，特征线沿着 S_1 的等值线的法线方向，因此，特征线垂直于 C.

现在 $y=0$ 平面上引入曲线坐标. 设沿水线C的弧长为 σ，水线C上任意一点P的曲率半径为 $\rho(\sigma)$，从P点沿C的外法线方向的距离为 τ，则正交曲线坐标 (τ,σ) 的 Lamè 系数分别为 1，$\frac{\rho+\tau}{\rho}$. (3.8)式的特征方向正好沿 τ 方向. 在此曲线坐标下，我们有

$$\nabla^2S_1=\frac{\rho}{\rho+\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\rho+\tau}{\rho}\frac{\partial S_1}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\rho}{\rho+\tau}\frac{\partial S_1}{\partial\sigma}\right)\right].$$

把(3.12)式代入上式，得

$$\nabla^2S_1=\frac{1}{\rho+\tau}. \tag{3.13}$$

把(3.12)与(3.13)式代入(3.9)式，我们得到

$$2\frac{dW_0}{d\tau}+\frac{1}{\rho+\tau}W_0=0. \tag{3.14}$$

由于 $\rho=\rho(\sigma)$，解方程(3.14)，可得

$$W_0 = D\left(\frac{\rho}{\rho+\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

这里D为积分常数．同理，我们可解出输运方程(3.10)．由于本文主要讨论波函数的最低阶近似，因此，我们不再列出 $W_m(m \geqslant 1)$ 的表达式．把(3.12)式与(3.15)式代入(3.7)式，并忽略高阶近似项，我们得到

$$\tilde{\phi} \sim D\left(\frac{\rho}{\rho+\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(iK\tau). \tag{3.16}$$

把(3.16)式代入(3.5)式，我们最后得到最低阶波函数在外部区的表达式：

$$\tilde{\phi} \sim D\left[\frac{\rho(\sigma)}{\rho(\sigma)+\tau}\right]^{\frac{1}{2}} \exp(iK\tau - Ky). \tag{3.17}$$

这里常数D亦为σ的函数，它将通过与接近水线区域的内部波动解的匹配来确定．

四、水线附近 $\phi^{(1)}$ 的行为

我们将指出，在接近水线C处，$\phi^{(1)}$不能满足正则性条件(2.16)．为此，设水线C的方程为

$$x = x_0(\sigma), \quad y = 0, \quad z = z_0(\sigma), \tag{4.1}$$

这里σ是沿曲线C的弧长．引入曲线坐标(τ, σ, y)，这里τ与上节中的τ有相同的含义，则正交曲线坐标(τ, σ, y)的 Lamè 系数分别为 $1, \dfrac{\tau+\rho}{\rho}, 1$，这里$\rho(\sigma)$为$y=0$平面上水线$C$上一点的曲率半径．正交曲线坐标$(\tau, \sigma, y)$也可用显式表示如下[2]：

$$x = x_0(\sigma) - \tau\rho\frac{d^2x_0(\sigma)}{d\sigma^2}, \quad y = y, \quad z = z_0(\sigma) - \tau\rho\frac{d^2z_0(\sigma)}{d\sigma^2}. \tag{4.2}$$

在正交曲线坐标(τ, σ, y)下，Laplace 方程(2.8)成为

$$\nabla^2\phi^{(0)} = \frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\rho+\tau}\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial y^2} + \left[\frac{\rho}{\rho+\tau}\right]^2\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial\sigma^2} + \frac{\tau\rho\rho'_\sigma}{(\rho+\tau)^3}\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial\sigma} = 0. \tag{4.3}$$

由于在接近水线的近场区，波沿着垂直C的τ方向传播，并且沿y方向指数衰减，因此，我们引入以下伸展坐标：

$$\tau_1 = K\tau, \quad \sigma = \sigma, \quad y_1 = Ky. \tag{4.4}$$

在伸展坐标系(τ_1, σ, y_1)下，方程(4.3)成为

$$K^2\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial\tau_1^2} + \frac{K}{\rho+\tau_1/K}\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial\tau_1} + K^2\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial y_1^2} + \left(\frac{\rho}{\rho+\tau_1/K}\right)^2\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial\sigma^2} \cdot \frac{\tau_1\rho\rho'_\sigma}{K(\rho+\tau_1/K)^3}\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial\sigma} = 0. \tag{4.5}$$

用K^2除(4.5)式二边，忽略含$\dfrac{1}{K}$与$\dfrac{1}{K^2}$的项，(4.5)式成为

$$\frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\phi^{(0)}}{\partial y^2} = 0. \tag{4.6}$$

这里我们在取了极限 $K \to \infty$ 后，又用原始自变量τ，y来表示．由(4.6)式可见，三维 Laplace 方程在近场区可化为以σ为参数的二维坐标系(τ, y)下的 Laplace 方程来处理．

在 (τ, σ, y) 坐标系下，条件(2.9)式仍为

$$\phi^{(0)}(\tau, \sigma, 0) = 0, \text{ 在}C\text{外}. \tag{4.7}$$

现在来看物体上的边界条件(2.10)式在近场区的表达式. 假定物体表面 S 在 (τ, σ, y) 坐标系下的方程为:

$$f(\tau, \sigma, y) = 0. \tag{4.8}$$

用伸展坐标 (τ_1', σ, y_1') 来表示，(4.8)式成为:

$$f(\tau_1/K, \sigma, y_1/K) = 0. \tag{4.9}$$

假定函数 $f(\tau, \sigma, y)$ 连续并有连续导数，则在 $(0, \sigma, 0)$ 点对(4.9)式用 Taylor 展开，可得

$$f(0, \sigma, 0) + \frac{\tau_1}{K} f_\tau(0, \sigma, 0) + \frac{y_1}{K} f_y(0, \sigma, 0) + O\left(\frac{1}{K^2}\right) = 0. \tag{4.10}$$

由于 $(0, \sigma, 0)$ 点在水线 C 上，因此，$f(0, \sigma, 0) = 0$. 忽略 $\frac{1}{K^2}$ 以上的高阶小量，(4.10) 式成为

$$y = -\frac{f_\tau(0, \sigma, 0)}{f_y(0, \sigma, 0)} \tau. \tag{4.11}$$

因此，在近场区，当 $K \to \infty$ 时，物体壁面可以看作在通过 C 上一点 P 而与 C 垂直的横截面上，物体壁面在 P 点的切线 d，这里直线 d 的方程由(4.11)式给出. 在近场区，条件(2.10)式成为

$$\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial n_1} = 0, \text{ 在直线 } d \text{ 上}. \tag{4.12}$$

这里 n_1 为 (τ, y) 平面上直线 d 的指向流体的法向单位矢量.

条件(2.11)式在近场区的新坐标系下变成

$$\lim_{\tau \to 0} \tau \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial \tau} = 0, \text{ 在 } C \text{ 上}. \tag{4.13}$$

文献 [1] 给出了二维问题 (4.6), (4.7), (4.12) 与 (4.13) 式在水线 C 上一点 P 附近 $\frac{\partial \phi^{(0)}(\tau, \sigma, 0)}{\partial y}$ 的行为:

$$-\frac{\partial \phi^{(0)}(\tau, \sigma, 0)}{\partial y} = V_0 B_0(\sigma) \left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)-1} + V_0 B_1(\sigma) \left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)} + o\left[\left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)}\right]. \tag{4.14}$$

这里 $\mu(\sigma) = \frac{\pi}{2\alpha(\sigma)}$, $\alpha(\sigma)$ 为直线 d 的指向流体的方向与 τ 的正方向间的夹角；L 为物体的特征长度；V_0, $B_0(\sigma)$, $B_1(\sigma)$ 为与 τ 无关的常数，V_0 与 σ 无关. $B_0(\sigma)$ 与物体表面 S 的整体形状有关，而 $B_1(\sigma)$ 可用 $B_0(\sigma)$ 来表示.

由(2.14)式，我们有

$$\phi^{(1)}(\tau, \sigma, 0) = \frac{\partial \phi^{(0)}(\tau, \sigma, 0)}{\partial y}. \tag{4.15}$$

在 $\tau = 0$ 附近，把(4.14)式代入(4.15)式，并二边对 τ 微分，我们可得

$$\tau \frac{\partial \phi^{(1)}(\tau, \sigma, 0)}{\partial \tau} = [\mu(\sigma) - 1] V_0 B_0(\sigma) \left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)-1}$$

$$+\mu(\sigma)V_0B_1(\sigma)\left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)}+o\left[\left(\frac{\tau}{L}\right)^{\mu(\sigma)}\right]. \tag{4.16}$$

当 $\alpha(\sigma)>\frac{\pi}{2}$,即 $\mu(\sigma)<1$ 时,由(4.16)式,可得

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\frac{\partial\phi^{(1)}(\tau,\sigma,0)}{\partial\tau}=\infty.$$

因此,在一般情形下,$\phi^{(1)}$ 不能满足正则性条件(2.16). $\phi^{(1)}$ 在水线 C 上有较强的奇异性.

五、内部波动解及其与外部解的匹配

由于在一般情形下,$\phi^{(1)}$ 不能满足正则条件(2.16)式,在水线 C 附近的内部区,展开式(2.18)式中的 $\tilde{\phi}(x,y,z)+\frac{1}{K}\phi^{(1)}(x,y,z)$ 应看作整体,也就是我们将使 $\tilde{\phi}(x,y,z)+\frac{1}{K}\times\phi^{(1)}(x,y,z)$ 的和式满足正则条件(2.4)式. 为此,在近场区,我们令

$$\phi(x,y,z)=\phi^{(0)}(x,y,z)+\tilde{\chi}(x,y,z). \tag{5.1}$$

这里 $\tilde{\chi}(x,y,z)$ 表示近场波动函数. 把(5.1)式代入(2.1)—(2.5)式,并利用 $\phi^{(0)}(x,y,z)$ 所满足的方程(2.8)—(2.12)式,我们可得 $\tilde{\chi}(x,y,z)$ 满足以下方程:

$$\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial z^2}=0,\ \text{在}\,S\,\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{5.2}$$

$$K\tilde{\chi}+\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial y}=-\varphi_y^0,\ \text{在}\,C\,\text{外},\ y=0, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial n}=0,\ \text{在}\,S\,\text{上}, \tag{5.4}$$

$$\lim_{r\to 0}r\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial r}=0,\ \text{在水线}\,C\,\text{上}, \tag{5.5}$$

$$\lim_{y\to\infty}\nabla\tilde{\chi}=0. \tag{5.6}$$

辐射条件改为波 $\tilde{\chi}$ 沿离开物体的方向传播. 用类似于上节对 $\phi^{(0)}$ 的处理方法,我们可以把方程(5.2)—(5.6)变换到在正交曲线坐标系 (τ_1,σ,y_1) 下的方程,令 $K\to\infty$,忽略高阶小量,最后可得以下方程组:

$$\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial\tau_1^2}+\frac{\partial^2\tilde{\chi}}{\partial y_1^2}=0,\ \text{在}\,S\,\text{外},\ y_1\geqslant 0, \tag{5.7}$$

$$\tilde{\chi}+\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial y_1}=-\frac{1}{K}\varphi_y^{(0)}\left(\frac{\tau_1}{K},\sigma,0\right),\ \text{在}\,C\,\text{外},\ y_1=0, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial n_1}=0,\ \text{在直线}\,d\,\text{上}, \tag{5.9}$$

$$\lim_{\tau_1\to 0}\tau_1\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\tau_1}=0,\ \text{在}\,C\,\text{上}, \tag{5.10}$$

$$\lim_{y_1\to\infty}\nabla\tilde{\chi}=0. \tag{5.11}$$

辐射条件为波向 τ_1 的正方向传播. $\varphi_y^{(0)}(\tau,\sigma,0)$ 在 $\tau=0$ 附近的表达式由(4.14)式给出. 文献[1]给出了问题(5.7)—(5.11)式的解 $\tilde{\chi}(\tau_1,\sigma,y_1)$,当 $\tau_1\to\infty$ 时的渐近表达式. 我们直接

引用文献[1]的结果如下：

$$\tilde{\chi}(\tau_1, \sigma, y_1) \sim A(\sigma)\exp[i\tau_1 - y_1], \quad \text{当} \ \tau_1 \to \infty. \tag{5.12}$$

这里

$$A(\sigma) = \frac{-iLV_0\exp\{-i[1-\mu(\sigma)]\pi/4\}}{(KL)^{\mu(\sigma)}} \cdot \left\{\frac{\pi B_0(\sigma)}{\mu^{\frac{1}{2}}(\sigma)[-\mu(\sigma)]!}\right.$$

$$\left. - \frac{2B_1(\sigma)\mu(\sigma)\Gamma[\mu(\sigma)]\sin[3\mu(\sigma)-1]\pi/4}{KL}\right\}. \tag{5.13}$$

(5.12)与(5.13)式就是问题的内部解．由(5.12)式可以看出内部波动解近似为一平面波，其振幅 $A(\sigma)$ 与 τ', y' 无关．

(3.17)式是问题的外部波动解．(3.17)与(5.12)式它们都是叠加在基本势流 $\phi^{(0)}(x, y, z)$ 上的，因此，我们只需对波动部分进行匹配，来确定常数 $D(\sigma)$．匹配规则为：

$$(\tilde{\chi}_{内部})_{外部} = (\tilde{\phi}_{外部})_{内部}. \tag{5.14}$$

由(5.12)式，可得

$$(\tilde{\chi}_{内部})_{外部} = A(\sigma)\exp(iK\tau - Ky). \tag{5.15}$$

这里 $A(\sigma)$ 由(5.13)式给出．

由(3.17)式，可得

$$(\tilde{\phi}_{外部})_{内部} = \lim_{K\to\infty}\left\{D(\sigma)\left(\frac{\rho}{\rho+\frac{\tau'}{K}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(i\tau' - y')\right\}$$

$$= D(\sigma)\exp(i\tau' - y'). \tag{5.16}$$

把(5.15)与(5.16)式代入(5.14)式，我们得到

$$D(\sigma) = A(\sigma). \tag{5.17}$$

因此，外部波动解为：

$$\tilde{\phi} \sim A(\sigma)\left[\frac{\rho(\sigma)}{\rho(\sigma)+\tau}\right]^{\frac{1}{2}}\exp(iK\tau - iKy). \tag{5.18}$$

这里 $A(\sigma)$ 由(5.13)式给出．(5.18)式就是我们要求的在无穷远处的波动解的渐近形式．

让我们来看一个例子．对于半径为 a 的半浸润圆球，以最大速度为 V_0 作垂直小振幅振荡运动的情形，取坐标原点 0 在球心，则有

$$\phi^{(0)}(x, y, z) = -\frac{1}{2}V_0\frac{a^3}{R^3}y. \tag{5.19}$$

这里 $R=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $y=R\cos\theta$, θ 为径矢量与 y 正方向的夹角．很易验证，(5.19)式满足(2.8)—(2.12)式的所有条件，这里 $V(x, y, z) = \left(\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial R}\right)_{R=a} = V_0\cos\theta$. 由(5.19)式，可得

$$-\left(\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2}\frac{V_0a^3}{r^3}. \tag{5.20}$$

这里 $r=(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$. 对函数 $-\left(\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial y}\right)_{y=0}$，在 $r=a$ 作 Taylor 展开，可得

$$-\left(\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{1}{2}V_0-\frac{3V_0}{2a}(r-a)+\cdots. \tag{5.21}$$

对于半浸润圆球，$\alpha(\sigma)=\frac{\pi}{2}$,因此，

$$\mu(\sigma)=1. \tag{5.22}$$

取特征长度为:

$$L=a. \tag{5.23}$$

比较(5.21)式与(4.14)式,并考虑到(5.22)式,我们得到

$$B_0(\sigma)=\frac{1}{2},\ B_1(\sigma)=-\frac{3}{2}. \tag{5.24}$$

把(5.22)—(5.24)式代入(5.13)式,可得

$$A(\sigma)=\frac{-iaV_0}{Ka}\left\{\frac{+3\sin\frac{\pi}{2}}{Ka}\right\}=-\frac{3iaV_0}{(Ka)^2}. \tag{5.25}$$

把(5.25)式代入(5.18)式,并考虑到这里 $\rho(\sigma)=a$, $\tau=r-a$, 最后我们可得

$$\tilde{\phi}\sim-\frac{3iaV_0}{(Ka)^2}\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\exp[iK(r-a)-iKy],$$

$$\text{当 } Ka\to\infty. \tag{5.26}$$

(5.26)式就是半浸润球体作小振幅垂直振荡运动时的渐近波动解. 它与 Hermans[2] 所获得的结果完全一致.

公式(5.18)与(5.13)所表示的波动解适用于一般三维物体的任何振荡运动.

致谢 本文的大部分工作是作者在1982年访问美国斯坦福大学数学系期间在 Keller 教授的资助与指导下完成的,特致以深切的感谢.

参 考 文 献

[1] 陈嗣熊,中国科学, 1983, 9: 832—840.
[2] Hermans, A. J., *J. Engng. Math.*, **7**(1973), 75—84.
[3] Ursell, F., *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, **220**(1953), 90—103.
[4] Grim, O., *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, **47**(1953), 277—299.
[5] Ursell, F., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **7**(1954), 427—437.
[6] Karp, S. et al., *Technical Report*, No. 1, Technical Research Group, Inc., Melville, N. Y., 1960.
[7] Rhodes-Robinson, P. F., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **67**(1970), 423—442.
[8] ——————, *ibid.*, **67**(1970), 443—468.
[9] ——————, *ibid.*, **72**(1972), 83—94.
[10] Leppington, F. G., *J. Fluid Mech.*, **56**(1972), 101—119.
[11] Hermans, A. J., *J. Engng. Math.*, **6**(1972), 323—330.
[12] Alker, G., *ibid.*, **9**(1975), 197—205.
[13] Davis, A. M. J., *J. Fluid Mech.*, **75**(1976), 791—807.
[14] Evans, D. V., *J. Inst. Math. Applications*, **17**(1976), 135—140.

[15] Rhodes-Robinson, P. F., *Tech. Rep. Dept. Math.*, Stanford University, 1982.
[16] 陈嗣熊,科学通报，**28**(1983)，17：1039--1042.
[17] 陈嗣熊,中国科学A辑，1984，1:52—60.
[18] John, F., *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**(1950), 45—101.
[19] 陈嗣熊,力学学报，1980，4:373—378.
[20] 陈嗣熊,中国科学，1979，4:413—421.