

## 柱状地幔上涌流动的力学结构和热结构

李荫亭

(中国科学院力学研究所,北京)

R. O. Meissner

(西德基尔大学地球物理研究所)

薛恩

(北京医学院)

## 摘 要

本文从流体力学基本方程组出发给出了粘度随温度和压力变化的牛顿流体的柱状上涌流的细致的力学结构和热结构,并对二组流变参数算出了各种深度上的上涌速度、温度和粘度的径向剖面以及上涌流动的半径。

为了解释地表热点的出现和线性岛链的成因,1972年 Morgan<sup>[1]</sup> 提出了柱状地幔上涌流(Plume)的概念。Morgan<sup>[2]</sup> 还利用一个热球在地幔中做上升运动的简单模式估算了柱状上涌流动的参数,但没有详细讨论上涌流动的细致结构。1973年 Khan<sup>[3]</sup> 考虑了上升运动的柱状结构,但没有考虑传热对流动参数的影响。1975年 Parmentier<sup>[4]</sup> 从柱坐标系中地幔流体力学方程组出发,对一个完整对流单元进行了数值实验,他们得到了柱状上涌流动的存在条件,但不能得到细致的热和力学结构。

当柱状上涌流动对称轴上的温度和上涌速度为已知时<sup>[5]</sup>,本文将确定变粘度牛顿流体柱状上涌流动径向结构的问题,归结为求解七个未知函数的一阶非线性常微分方程组的特征值问题,其中的特征值与柱状上涌流动的半径有关。用计算机求解这个数学问题,得到了温度、上涌速度和粘度在各种深度上的径向剖面,以及上涌流动半径随深度的变化。从而,给出了变粘度牛顿流体柱状地幔上涌流动的精确的热和力学结构。

## 一、数学分析

控制牛顿流体柱状地幔上涌流动的流体力学方程组,可以写为<sup>[6]</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho g \alpha (T - T_{\infty}) = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3)$$

本文 1983 年 1 月 25 日收到,1983 年 7 月 7 日收到修改稿。

公式(1)–(3)中各符号的意义与文献[6]相同。方程(2)中的粘性系数由下式给出<sup>[7]</sup>

$$\mu = \frac{T}{2B} \exp \frac{E^* + p_0(x)V^*}{RT}. \quad (4)$$

当对称轴  $r = 0$  上的温度  $T_w$  和上涌速度  $u_w$  为已知时<sup>[5]</sup>, 我们可引进二个无量纲函数

$$\frac{u}{u_w} = g(\eta), \quad \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = p(\eta). \quad (5)$$

其中  $\eta = r/\delta_T$  是一个新的独立变量,  $\delta_T(x)$  是在深度为  $x$  处柱状上涌流动的热半径。很显然,

$$g(0) = 1, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 0.$$

将方程(2)各项乘  $r$  后对  $r$  积分, 由 0 积到  $r$ , 得

$$r\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \int_0^r rn(T - T_\infty)dr = 0.$$

利用公式(5), 推出

$$g'(\eta) + \frac{n(T_w - T_\infty)\delta_T^2}{\eta\mu u_w} \int_0^\eta \eta p(\eta)d\eta = 0. \quad (6)$$

其中  $n = \rho g \alpha$ .

令

$$\frac{dQ}{d\eta} = p(\eta), \quad \text{或} \quad p d\eta = dQ, \quad (7)$$

则

$$\int_0^\eta p\eta d\eta = \int_0^\eta \eta dQ = \eta Q - \int_0^\eta Q d\eta. \quad (8)$$

令

$$\frac{dw}{d\eta} = Q(\eta). \quad \text{或} \quad dw = Q d\eta, \quad (9)$$

则

$$\int_0^\eta Q d\eta = w(\eta).$$

将公式(7)–(9)代入(6)式, 得到

$$g'(\eta) + \frac{n(T_w - T_\infty)\delta_T^2}{\mu u_w} \left( Q - \frac{w}{\eta} \right) = 0. \quad (10)$$

由公式(5), 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_w}{dx} g - u_w \cdot \frac{1}{\delta_T} \cdot \frac{d\delta_T}{dx} \cdot g'(\eta) \cdot \eta. \quad (11)$$

将公式(5)代入方程(1), 两边乘  $r$  后对  $r$  积分, 得

$$v = - \left( \delta_T \frac{du_w}{dx} + 2u_w \frac{d\delta_T}{dx} \right) \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \eta g d\eta + u_w \frac{d\delta_T}{dx} \eta g. \quad (12)$$

令

$$g = \frac{df}{d\eta}, \quad (13)$$

则

$$\int_0^{\eta} \eta g d\eta = \int_0^{\eta} \eta df = \eta f - \int_0^{\eta} f d\eta. \quad (14)$$

令

$$f = \frac{de}{d\eta}, \quad (15)$$

则

$$\int_0^{\eta} f d\eta = e(\eta). \quad (16)$$

将公式(13)–(16)代入(12)式,得

$$v = - \left( \delta_T \frac{du_w}{dx} + 2u_w \frac{d\delta_T}{dx} \right) \left( f - \frac{e}{\eta} \right) + u_w \frac{d\delta_T}{dx} g\eta. \quad (17)$$

将(5), (17)式代入方程(3), 可以得

$$\begin{aligned} & u_w g \left[ \left( \frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_\infty}{dx} \right) p + \frac{dT_\infty}{dx} - (T_w - T_\infty) \frac{1}{\delta_T} \frac{d\delta_T}{dx} p' \eta \right] \\ & + \left[ - \left( \delta_T \frac{du_w}{dx} + 2u_w \frac{d\delta_T}{dx} \right) \left( f - \frac{e}{\eta} \right) + u_w \frac{d\delta_T}{dx} g\eta \right] \frac{(T_w - T_\infty)}{\delta_T} p' \\ & = \frac{k(T_w - T_\infty)}{\delta_T^2} \left( \frac{p'}{\eta} + p'' \right). \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$R = \frac{dp}{d\eta}, \quad (19)$$

则

$$\frac{dR}{d\eta} = p''. \quad (20)$$

将(19), (20)式代入(18)式,整理后得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\eta} &= \frac{\left( \frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_\infty}{dx} \right)}{k(T_w - T_\infty)} u_w \delta_T^2 g p + \frac{\frac{dT_\infty}{dx}}{k(T_w - T_\infty)} u_w \delta_T^2 g \\ &\quad - \frac{1}{k} \left( \frac{du_w}{dx} \delta_T^2 + 2u_w \delta_T \frac{d\delta_T}{dx} \right) \left( f - \frac{e}{\eta} \right) R - \frac{R}{\eta}. \end{aligned} \quad (21)$$

方程(15), (13), (10), (9), (7), (19), (21)构成了本文要解的常微分方程组, 并重新写成

$$\frac{de}{d\eta} = f, \quad (22)$$

$$\frac{df}{d\eta} = g, \quad (23)$$

$$\frac{dg}{d\eta} = - \frac{n(T_w - T_\infty) \delta_T^2}{u_w \cdot \mu} \left( Q - \frac{w}{\eta} \right), \quad (24)$$

$$\frac{dw}{d\eta} = Q, \quad (25)$$

$$\frac{dQ}{d\eta} = p, \quad (26)$$

$$\frac{dp}{d\eta} = R, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\eta} = & \frac{\left(\frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_\infty}{dx}\right) u_w \delta_T^2 g p + \frac{dT_\infty}{dx} u_w \delta_T^2 g}{k(T_w - T_\infty)} \\ & - \frac{1}{k} \left( \frac{du_w}{dx} \delta_T^2 + u_w \frac{d\delta_T^2}{dx} \right) \left( f - \frac{e}{\eta} \right) R - \frac{R}{\eta}. \end{aligned} \quad (28)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} e(0) = 0, f(0) = 0, g(0) = 1, \omega(0) = 0, Q(0) = 0 \\ p(0) = 1, R(0) = 0, p(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

方程组(22)–(28)和边界条件(29)是一个具有七个未知函数的常微分方程组的特征值问题,特征值与 $\delta_T$ 和 $\frac{d\delta_T}{dx}$ 有关.进行数值计算时需要知道某一 $x_0$ 处的 $\delta_T(x_0)$ .方程(28)中的 $\frac{d\delta_T}{dx}$ 用 $\frac{\delta_T(x_0 + \Delta x) - \delta_T(x_0)}{\Delta x}$ 代替后,问题才能求解,为此,对能量方程(3)做能量积分.为了方便,令

$$C_2 = \frac{\frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_\infty}{dx}}{k(T_w - T_\infty)} u_w \delta_T^2, \quad (30)$$

$$C_3 = \frac{\frac{dT_\infty}{dx}}{k(T_w - T_\infty)} u_w \delta_T^2, \quad (31)$$

$$C_4 = -\frac{1}{k} \left( \frac{du_w}{dx} \delta_T^2 + u_w \frac{d\delta_T^2}{dx} \right). \quad (32)$$

则方程(28)变为

$$p'' = C_2 g p + C_3 g + C_4 \left( f - \frac{e}{\eta} \right) R - \frac{R}{\eta}. \quad (33)$$

将(33)式乘 $\eta$ 后对 $\eta$ 积分,由0积到1,得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta p'' d\eta = & C_2 \int_0^1 \eta g p d\eta + C_3 \int_0^1 \eta g d\eta + C_4 \int_0^1 f R \eta d\eta \\ & - C_4 \int_0^1 e R d\eta - \int_0^1 R d\eta. \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $\int_0^1 \eta p'' d\eta = p'(1) + 1$ ,  $\int_0^1 \eta g d\eta = f(1) - e(1)$ ,  $\int_0^1 e R d\eta = -\int_0^1 p f d\eta$ ,  $\int_0^1 f R \eta d\eta = -\int_0^1 p f d\eta - \int_0^1 \eta p g d\eta$ ,  $\int_0^1 R d\eta = -1$ .

将上述积分值代入(34)式,可得

$$p'(1) = C_2 \int_0^1 \eta g p d\eta + C_3 [f(1) - e(1)] - C_4 \int_0^1 \eta p g d\eta. \quad (35)$$

令

$$C_6 = -\frac{p'(1)}{\int_0^1 \eta g p d\eta}, \quad C_7 = \frac{f(1) - e(1)}{\int_0^1 \eta g p d\eta}, \quad (36)$$

$$C_4 = C_2 - C_6 + C_3 C_7. \quad (37)$$

由公式 (31), (32), (36) 和 (37), 可以得

$$\frac{d\delta_T^2}{dx} = C_9 - C_8 \delta_T^2. \quad (38)$$

其中

$$C_8 = \frac{1}{u_w} \frac{du_w}{dx} + \frac{\left(\frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_\infty}{dx}\right)}{T_w - T_\infty} + \frac{dT_\infty}{dx} \frac{C_7}{T_w - T_\infty}, \quad (39)$$

$$C_9 = \frac{k}{u_w} C_6. \quad (40)$$

将 (38)–(40) 式代入方程 (28), 方程组中不再出现  $\frac{d\delta_T}{dx}$ , 但出现了两个系数  $C_6$  和  $C_7$ .

开始可以从常粘度解<sup>[6]</sup>算出  $C_6$  和  $C_7$ , 然后对某一  $x_0$  求解方程组 (22)–(29), 从所得解可求出新的  $C_6$  和  $C_7$  值, 重复上述过程, 直到  $C_6$  和  $C_7$  的稳定值得到为止. 这样可以得到  $\delta_T(x_0)$ , 并可用  $\frac{\delta_T(x_0 + \Delta x) - \delta_T(x_0)}{\Delta x}$  代替 (28) 式中的  $\frac{d\delta_T}{dx}$ , 则可求出任一深度  $x$  处的方程组 (22)–(29) 的解.

## 二、柱状上涌流结构的数值结果

计算中, 采用典型的地幔物理参数<sup>[7]</sup>, 计算结果给在图 1—图 11 中.

图 1 和图 2 分别给出了牛顿流体 I 和牛顿流体 II 上涌流动的热结构, 在每一个深度上, 温度的径向分布, 都是从其中心处的最高温度单调地减少至该深度上的地幔环境温度. 还可

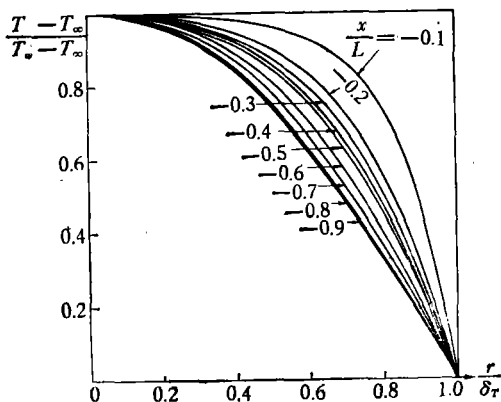


图 1 牛顿流体 I 上涌流动在不同的  $x/L$  处的无量纲温度的径向剖面

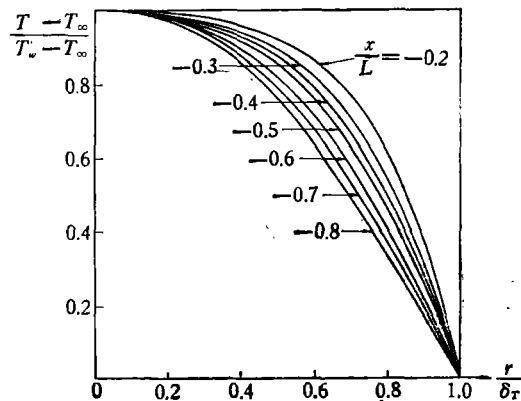


图 2 牛顿流体 II 上涌流动在不同  $x/L$  处的无量纲温度径向剖面

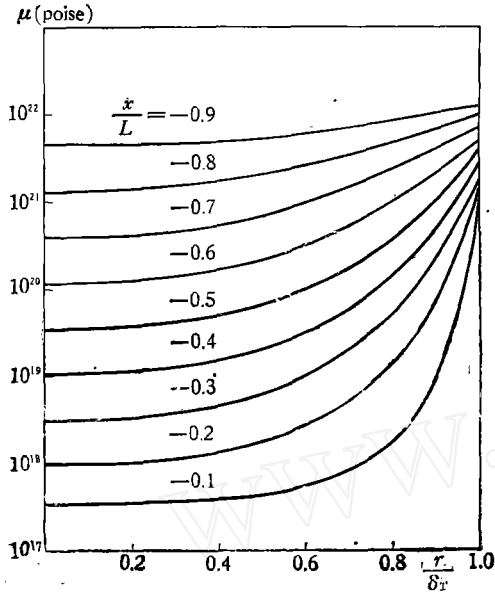


图 3 牛顿流体 I 上涌流动在不同  $x/L$  处的粘度径向剖面

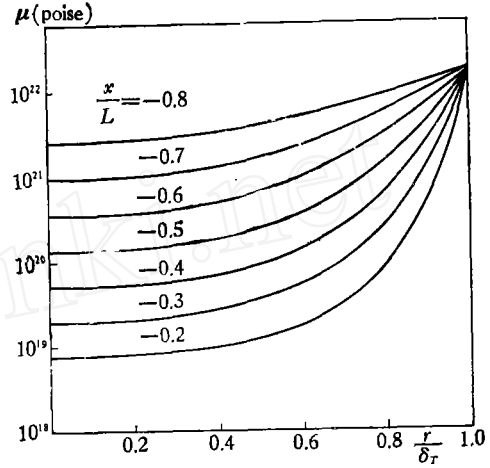


图 4 牛顿流体 II 上涌流动在不同  $x/L$  处的粘度径向剖面

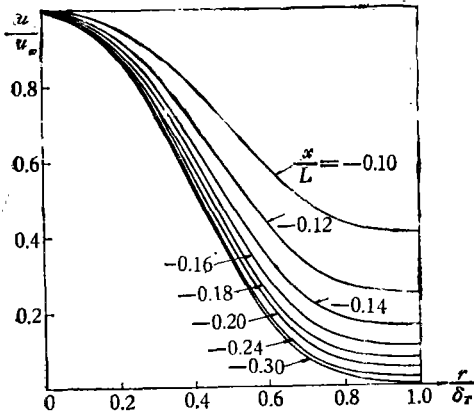


图 5 牛顿流体 I 上涌流动在属于区间  $[-0.3, -0.1]$  中的不同  $x/L$  值处的无量纲上涌速度径向剖面

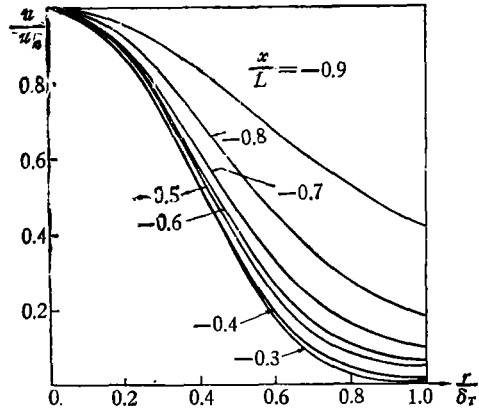


图 6 牛顿流体 I 上涌流动在属于区间  $[-0.9, -0.3]$  中不同  $x/L$  值处的无量纲上涌速度径向剖面

以看到,对同一个  $r/\delta_T$  值,越深的地方,无量纲温度越低。

图 3 和图 4 分别给出了牛顿流体 I 和牛顿流体 II 在不同深度的径向粘度分布剖面。对所有的径向粘度分布剖面,最小粘度均在对称轴上,然后单调上升到边界上的最大粘度值。对于较大的深度,最大粘度只是最小粘度的几倍,而在较浅处,最大粘度则比最小粘度大 2—3 个量级。

图 5 至图 8 给出了牛顿流体 I 和牛顿流体 II 上涌速度的径向剖面,每个剖面中,上涌速度都从其对称轴上的最大值单调地下降到其边界值  $u_b = u(x, \delta_T(x))$ , 这里的  $u_b(x)$  是上涌流动力学结构的一个重要参数。按讨论二维上涌流动力学结构时所采用的定义<sup>[7]</sup>, 当

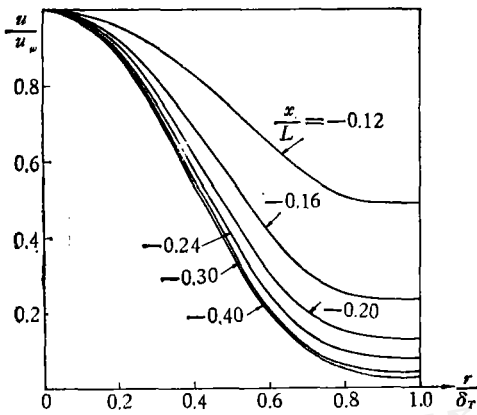


图 7 牛顿流体 II 上涌流动在属于区间  $[-0.4, -0.12]$  中不同  $x/L$  值处的无量纲上涌速度径向剖面

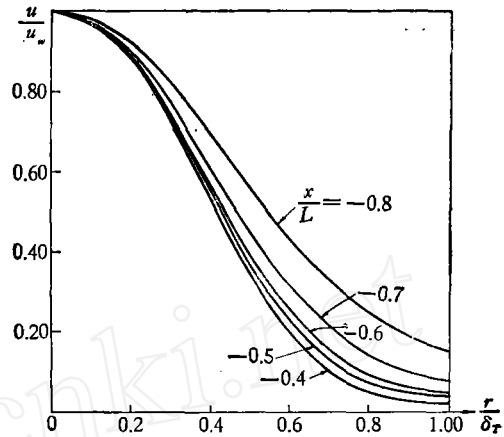


图 8 牛顿流体 II 上涌流动在属于区间  $[-0.80, -0.40]$  中不同  $x/L$  值处的无量纲上涌速度径向剖面

$\frac{u_b}{u_w} \leq 0.5$  时,  $\delta_T$  可以认为是上涌流动的半径; 当  $\frac{u_b}{u_w} > 0.5$  时, 上涌流动存在的前提将得不到满足, 方程 (1)–(3) 将不适用于这一区域。计算结果表明, 对牛顿流体 I,  $-0.10 \geq \frac{x}{L} \geq -0.90$ ; 对牛顿流体 II,  $-0.12 \geq \frac{x}{L} \geq -0.80$ ,  $\frac{u_b}{u_w} \leq 0.5$  将得到满足, 上述区域之外则为上涌流动的起动区域和接近岩石圈底部的由竖直流动为主转为水平流动为主的转换区域。从图 5—图 8 还可以看出, 对牛顿流体 I, 在  $\frac{x}{L} = -0.30$ , 对牛顿流体 II 在  $\frac{x}{L} = -0.40$ ,  $\frac{u}{u_w}$  取极小值。

图 9 和图 10 分别对牛顿流体 I 在  $\frac{x}{L} = -0.30$ , 对牛顿流体 II 在  $\frac{x}{L} = -0.40$ , 比较了

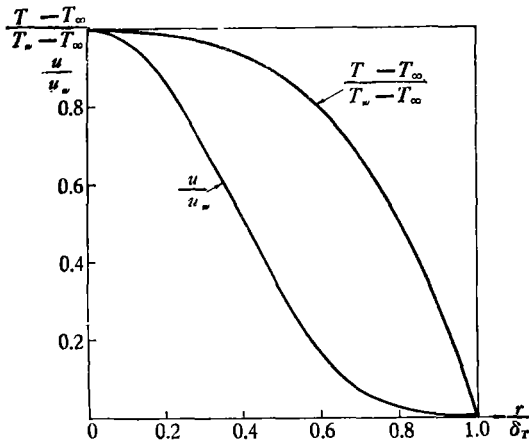


图 9 牛顿流体 I 上涌流动在  $x/L = -0.3$  处的无量纲上涌速度和无量纲温度径向剖面之比较

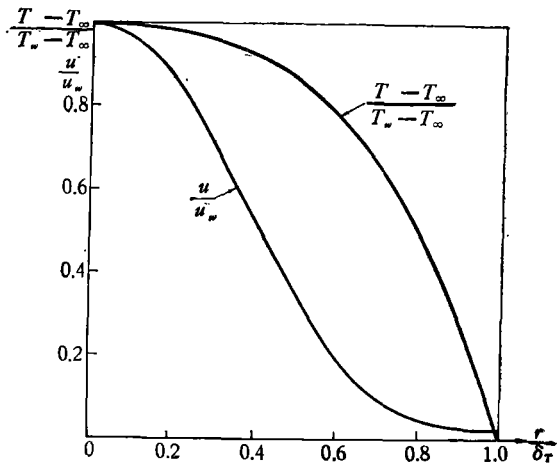


图 10 牛顿流体 II 上涌流动在  $x/L = -0.4$  处的无量纲上涌速度和无量纲温度径向剖面的比较

温度和上涌速度的径向分布剖面。

图 11 给出了柱对称地幔上涌流动半径随深度的变化曲线。在同一深度上,牛顿流体 II 比牛顿流体 I 有较大的流动半径。

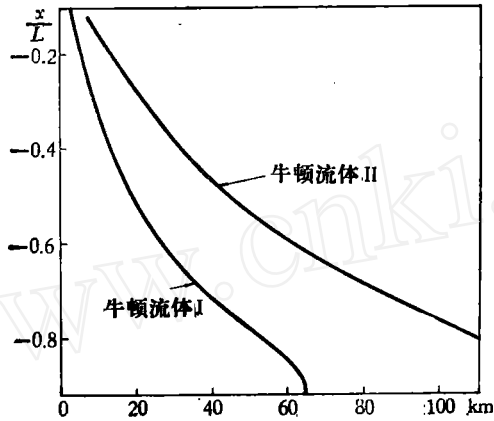


图 11 上涌流动半径随无量纲深度的变化

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Morgan, W. J., *Nature*, 230 (1972), 42—43.
- [ 2 ] —————, *Am. Assoc. Petrol. Bull.*, 56 (1972), 2.
- [ 3 ] Khan, M. A., *Plumes in the Mantle*, 2nd Inter. Symp. Geodesy Phy. Earth, 1973, 363—379.
- [ 4 ] Parmentier, E. M. et al., *Jour. of Geophysical Research.*, 80 (1975), 4417—4425.
- [ 5 ] 李荫亭等, 中国科学 B 辑, 1983, 12:1141—1145.
- [ 6 ] 关德相等, 中国科学, 1979, 7:689—697.
- [ 7 ] Yuen, D. A. and Schubert, G., *Jour. of Geophysical Research*, 81 (1976), 2499—2510.