

# 弱扭转非轴对称磁场的静力学平衡

胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 北京)

我们曾证明非轴对称磁流体静力学位形的存在性, 并讨论了其基本特征<sup>[1,2]</sup>。从观测上看, 宇宙磁场往往有三维位形。比如太阳黑子有明、暗的纤维。从理论上分析, 外加重力场引进以后改变了宇宙磁场必须有某种对称性的结论。高分辨率的白光观测还表明, 太阳黑子磁场及其暗条经常扭转呈螺旋形。本文将文献[1]的结论推广到具有扭转位形的非轴对称磁流体静力学平衡, 仍然采用摄动展开的方法求解。

磁流体静力学方程为

$$\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad (3)$$

其中  $p, \rho, T$  分别为等离子体压力, 密度和温度,  $\mathbf{g}$  是外加重力, 在柱坐标系中沿  $z$  轴方向,  $\mathcal{R}$  是气体常数,  $\mathbf{B}$  为磁场强度。线性微扰理论中, 扰动态的量小于基态的量。我们记

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(r, z) + \varepsilon \mathbf{B}_1(r, \theta, z), \\ p(\mathbf{r}) = p_0(r, z) + \varepsilon p_1(r, \theta, z), \\ \rho(\mathbf{r}) = \rho_0(r, z) + \varepsilon \rho_1(r, \theta, z), \\ T(\mathbf{r}) = T_0(r, z) + \varepsilon T_1(r, \theta, z), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\varepsilon$  为一小参数,  $(r, \theta, z)$  为柱面坐标。

将(4)代入(1)–(3)式, 可分别得到基态和扰动态的方程, 基本磁场位形可表示为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{B}_0(r, z) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right). \quad (5)$$

不难得到基态关系为<sup>[1,3]</sup>

$$p_0(r, z) = p_0[\psi_0] \exp \left( - \int_0^z \frac{g dz}{\mathcal{R} T[\psi_0, z]} \right), \quad (6)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial p[\psi_0, z]}{\partial \psi_0} = 0. \quad (7)$$

这个基态关系已进行过广泛的讨论(如见文献[1, 3])。

再讨论扰动态, 其线性方程组为

$$\mathcal{L}(\psi_0) \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \mathcal{L}(\psi_1) + 4\pi r^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}(\psi_0) \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \mathcal{L}(\psi_1) + 4\pi r^2 \frac{\partial p_1}{\partial z} + 4\pi r^2 \rho_1 g = 0, \quad (9)$$

本文 1982 年 12 月 28 日收到。

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + 4\pi r^2 p_1 \right) = 0, \quad (10)$$

其中定义微分算子

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

而扰动态磁场可表示为

$$\mathbf{B}_1(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_1(r, \theta, z)}{\partial z}, G_1(r, z), -\frac{\partial \psi_1(r, \theta, z)}{\partial r} \right). \quad (11)$$

状态方程(3)的扰动关系为

$$p_1 = \mathcal{R}(\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0). \quad (12)$$

这样,线性扰动理论就是要求解方程(8)–(10)式和(12)式. 这里与文献[12]不同的是(10)式中增加了前二项,它们都与 $\theta$ 无关. 如果记

$$r \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial G_1}{\partial r} \right) = w(r, z), \quad (13)$$

由(10)式可导出

$$4\pi r^2 p_1 + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = w(r, z)\theta + w_1(r, z), \quad (14)$$

其中 $w_1(r, z)$ 为任意函数. 利用(14)式对 $r$ 求微商,消去(8)式中的 $\partial p_1 / \partial r$ ,就可以得到 $\psi_1$ 的方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \\ & = -4\pi r^2 \left[ \frac{\partial w(r, z)}{\partial r} \theta + \frac{\partial w_1(r, z)}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

由于我们主要对于非轴对称分量有兴趣而方程又是线性的,不失一般性地可取<sup>[1]</sup>

$$w_1(r, z) = 0. \quad (16)$$

这样,由给定的基态磁势 $\psi_0$ 和弱扭转关系 $G_1(r, z)$ 可定出 $w(r, z)$ ,然后可由方程(15)求出 $\psi_1$ .

讨论一个特殊情况,取

$$G_1(r, z) = G_1[\psi_0(r, z)]. \quad (17)$$

这时,方程(15)简化为

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad (18)$$

方程(18)与文献[1]中的相同. 这样,我们就将非轴对称磁流体静力学平衡位形存在性的证明推广到包括扭转分量的情况.

在文献[1]中曾给出方程(18)的三个具体的解. 这里,我们做进一步的讨论. 如果基态和扰动态的解都可以分离变量,则记

$$\psi_0 = R(r)Z(z), \quad (19)$$

$$\psi_1 = R_1(r, \theta)Z_1(z, \theta), \quad (20)$$

将(19)和(20)代入(18)式,可导出

$$\frac{R'}{R} \frac{Z_1''}{Z_1} + \left( \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) \frac{Z_1''}{Z} + \left( \frac{2}{r} - \frac{R'}{R} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) \frac{Z'}{Z} \frac{Z_1''}{Z_1} = 0, \quad (21)$$

其中撇号表示对  $r$  或  $z$  的微分。若令

$$\frac{Z''}{Z} = \pm k^2, \quad \frac{Z_1''}{Z_1} = \pm k_1^2, \quad (22)$$

其中  $k_1$  是  $\theta$  的函数。方程(22)的解为

$$Z(z) = ae^{-kz} + be^{kz}, \quad (23)$$

$$Z_1(z, \theta) = a_1(\theta)e^{-k_1 z} + b_1(\theta)e^{k_1 z}, \quad (24)$$

或者

$$Z(z) = a_2 \sin(kz) + b_2 \cos(kz), \quad (25)$$

$$Z_1(z, \theta) = a_3(\theta) \sin(k_1 z) + b_3(\theta) \cos(k_1 z). \quad (26)$$

将(22)式代入(21)式,可得到解

$$R_1(r, \theta) = C(\theta) R^{k_1/k} r^{2k_1/(k_1-k)}. \quad (27)$$

对于基态磁势

$$\psi_0(r, z) = \sum_k R(r) [ae^{-kz} + be^{kz} + a_2 \sin(kz) + b_2 \cos(kz)], \quad (28)$$

扰动磁势则可表示为

$$\psi_1(r, \theta, z) = \sum_{k, k_1} [a_1 e^{-k_1 z} + b_1 e^{k_1 z} + a_3 \sin(k_1 z) + b_3 \cos(k_1 z)] \cdot R^{k_1/k} r^{2k_1/(k_1-k)}. \quad (29)$$

例如,若取

$$\begin{aligned} \psi_0(r, z) &= \sum R(r) e^{-kz}, \\ R(r) &= \frac{B_0}{2} r^2 \exp(-r), \end{aligned} \quad (30)$$

则

$$\psi_1(r, \theta, z) = \sum_{k_1} a_1(\theta) e^{-k_1 z} [R(r)]^{k_1/k} r^{2k_1/(k_1-k)}. \quad (31)$$

这就是文献[1]中讨论过的例3.

同样地,如果变量变换将  $(r, z)$  变到  $(r, u)$ , 其中  $u = u(r, z)$ . 再寻求分离变量  $(r, u)$  的解. 可得到类似的结果,而文献[1]中讨论过的例2即可作为普遍解的一个特例.

这样,我们更一般地论证了非对称磁场位形的存在性,而将文献[1]的结果作为本文一般结论的一个特例.

应用上述结果于黑子磁场的扭转位形,取(31)式中的  $a_1(\theta) = ae^{im\theta}$ . 此位形具有  $m$  臂,而环向磁场分量为

$$B_{\theta 1} = \frac{1}{r} G_1[\psi_0(r, z)]. \quad (32)$$

对于线性情况

$$G_1(\psi_0) = \alpha \psi_0. \quad (33)$$

这时的环向磁场分量为

$$B_{\theta 1} = \frac{\alpha B_0 r}{2} \exp(-r - kz). \quad (34)$$

此分量在对称轴处为零,在无穷远处亦趋于零.对于固定的  $z$  值,  $r = 1$  处的值最大.由于太阳活动往往与暗条的扭转有密切关系,具有扭转分量的非对称磁场位形比非扭转场更为重要.图 1 给出  $m = 8$  时扭转场的位形.

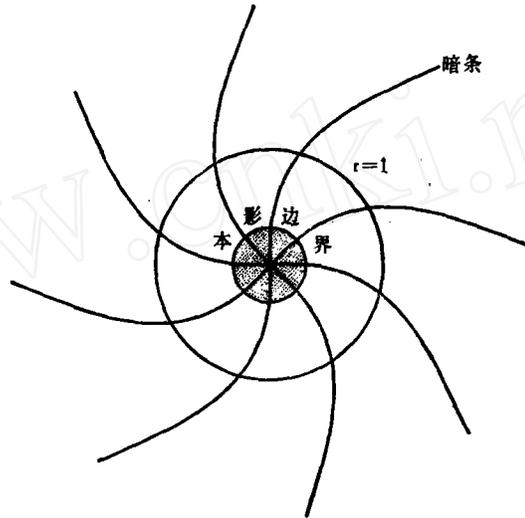


图 1 具有八个臂的扭转磁场位形

最后,我们讨论等离子体参数与磁场的耦合过程. Beckers 和 Schroter 曾发现暗条中的磁场相对地较强<sup>[4]</sup>.但同时, Mattig 和 Mehlretter 却发现亮条中的磁场相对地较强<sup>[5]</sup>.这要从理论上给予论证.在假设条件(17)的情况下,(10)式给出总压  $p + B^2/8\pi$  或  $\theta$  无关.这意味着较高的压力  $p$  对应于较弱的磁场强度  $B$ .因此,暗条中的磁场将相对地较强.因为,一般而言,低压气体对应于低温状态.上述结论与文献[4]的观测相符,这也是通常流行的观点.但是,对于某些情况,总压可以与  $\theta$  有关,如(14)式所示.这时,等离子体和磁场的耦合关系将会比较复杂,理论模型可能提供与文献[5]相符的结果.而且,若考虑存在较强的扭转效应,耦合关系将更复杂.这些问题需要进一步分析.

#### 参 考 文 献

- [1] 胡文瑞等, *Solar Physics*, 83(1983), 195.
- [2] Parker, E. K., *Astrophysical J.*, 174(1972), 499.
- [3] Low, B. C., *Astrophysical J.*, 67(1975), 251.
- [4] Becker, J. M. & Schroter, E. H., *Solar Phys.*, 4(1968), 142.
- [5] Mattig, W. & Mehlretter, J. P., *IAU Symp.*, 35(1968), 187.