运动学无作用力磁场的相似解

胡文瑞　　许乃怀

（中国科学院力学研究所，北京）

无力场概念常用以描述局部的强磁场区域，强磁场的演变所对应的动力学过程在天体物理中有广泛的应用．例如，磁场的扭绞、剪切以及挤压等都可与太阳活动密切相关[1-3]．运动学无力场的方程组为[2]

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha(t, \boldsymbol{r})\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为磁场和速度，α 为无力因子．

Gold 和 Hoyle[4] 曾提出磁通量管的扭绞储能机制．为了简单，人们假设 α 随时间缓变，然后求解方程(1)和(3)[5-8]．另一种途径是求出方程(1)和(3)的解，然后令其中的参数随时间变化[9,10]．这些解都可给出磁场随时间的变化，但由于未计及磁感应方程(2)，因此是非自洽的．

近来，Syrovatskii 和 Babrova 试图论证运动学无力场的不存在性[11,12]，而他们的论证是不充分的．例如，他们将感应方程写为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0, \tag{5}$$

由冻结条件可导出 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$．感应方程(4)的特解若记为 $\boldsymbol{E}_c$，则其通解为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_c - \nabla\varphi$．这就有

$$(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\varphi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E}_c, \tag{6}$$

(6)式的右端为确定值，而左端当 φ 任意时取任意值，由此导出无解的结论． 事实上，(4)和(5)式等价于磁感应方程(2)．我们可将(2)式改写为

$$\nabla \times (\nabla\varphi + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

显然，任意函数 φ 并不影响运动学无力场．

一般而言，运动学无力场必须同时考虑磁感应方程 (2)，以及无力场方程(1)和(3)．在速度场给定以后，方程(2)是双曲型的，其初值问题将描述磁场的传播特性．另一方面，无力场方程(1)和(2)为椭圆型的，其边值问题描述磁场的稳态位形．运动学无力场要求磁场在时间上有传播特性，而每个时刻在空间上满足特定的稳态位形关系[2]．所以，自洽的运动学无力场必

本文 1983 年 9 月 28 日收到．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

须对运动状态有严格的限制，或者说，磁场位形应有某种相似性.

由无源条件(2)，引入磁面函数 ψ：

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{e}_2) + r^{-N} G(\psi, t) \boldsymbol{e}_2, \tag{7}$$

其中坐标 (x_1, x_2, x_3) 分别对应于直角坐标的 (x, y, z) 或柱坐标的 (r, θ, z)，直角坐标系中取 $N = 0$，柱坐标系中取 $N = 1$. 代入(1)式可导出无力场方程

$$\mathscr{L}(\psi) = -G(\psi, t) \frac{\partial G(\psi, t)}{\partial \psi}, \tag{8}$$

其中微分算子

$$\mathscr{L}(\psi) = x_1^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x_1^N} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}. \tag{9}$$

若将速度记为 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$，则(2)式化为[2]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + w \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(\psi, t)}{\partial t} + \left[x_1^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u}{x_1^N} \right) + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right] G(\psi, t) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_1^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v}{x_1^N} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \tag{11}$$

其中(11)式左端第一项 $\partial G(\psi, t)/\partial t$ 是将 $G(\psi, t)$ 看成 (ψ, t) 的二元函数而对 t 的偏导数. 方程(8)与普通静力学的无力场方程相同. 在上边的推导中，我们只限于讨论磁场和速度与 x_2 无关.

可以先由(8)和(10)式讨论磁势 ψ 和极向速度，然后再由(11)式给出环向场. (10)式的特征方程为

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{u(x_1, x_3, t)} = \frac{dx_3}{w(x_1, x_3, t)},$$

它给出两个首次积分

$$\xi(x_1, x_3, t) = \text{常数}, \quad \zeta(x_1, x_3, t) = \text{常数}. \tag{12}$$

由此给出磁势函数的通解为

$$\psi(x_1, x_3, t) = F[\xi(x_1, x_3, t), \zeta(x_1, x_3, t)], \tag{13}$$

其中任意函数 F 由初值确定. 利用关系(12)，亦可导出极向速度场分量为

$$u = \frac{\dfrac{\partial \xi}{\partial x_3} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} - \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial \xi}{\partial x_1} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \xi}{\partial x_3} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1}}, \quad w = \frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \xi}{\partial x_1} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \xi}{\partial x_3} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1}}. \tag{14}$$

如果存在运动学无力场，解(13)亦应满足(8)式. 为此，作变换

$$\xi = \xi(x_1, x_3, t), \quad \zeta = \zeta(x_1, x_3, t). \tag{15}$$

将(15)式代入(8)式，可以导出算子

$$\mathscr{L}(\psi) = A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \, \partial \zeta} + C \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + D \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + E \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}, \tag{16}$$

其中 $\psi(x_1, x_3, t) = \Psi[\xi(x_1, x_3, t), \zeta(x_1, x_3, t)]$，而系数

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_3}\right)^2, \quad B = 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3}\frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\right), \\ C = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3}\right)^2, \quad D = \mathscr{L}(\xi), \quad E = \mathscr{L}(\zeta). \end{cases} \tag{17}$$

如果系数 A、B、C、D 和 E 都可化为 (ξ, ζ) 的函数与一公共时间 t 的函数的乘积，则无力场方程(8)就化为 (ξ, ζ) 的微分方程，其解必然满足(13)式，因而是自洽的.

经过一些繁杂的计算，可以推导出满足这些条件的自洽解. 在直角坐标系中，它们是

$$x = X(\xi, \zeta)/h(t) + h_1(t), \quad z = Z(\xi, \eta)/h(t) + h_2(t), \tag{18}$$

其中 X, Z, h 和 h_i 为任意函数，相应的速度为

$$u = -\frac{h'(t)}{h}(x - h_1) + h_1', \quad w = -\frac{h'(t)}{h}(z - h_2) + h_2'. \tag{19}$$

类似地，在柱坐标系中的变换关系为

$$r = R(\xi, \zeta)/h(t), \quad z = Z(\xi, \zeta)/h(t), \tag{20}$$

其中 R, Z 和 h 为任意函数，而相应的速度为

$$u = -\frac{h'(t)}{h} r, \quad w = -\frac{h'(t)}{h} z. \tag{21}$$

不难看出，这种类型的无力场在运动过程中将保持相似的位形.

具体讨论极向速度只是时间的函数:

$$u = u(t), \quad w = w(t). \tag{22}$$

它可描述许多太阳活动过程. 这时有变换关系

$$\xi = x - \int_0^t u(t)dt, \quad \zeta = z - \int_0^t w(t)dt. \tag{23}$$

在直角坐标系中，无力场方程(8)式化为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = G(\Psi)\frac{dG(\Psi)}{d\Psi}. \tag{24}$$

对于典型的日冕环，在 (x, z) 平面上可取初值[7]和边值为

$$\phi(x,0) \equiv f(x) = \begin{cases} \phi_0, & |x| < |a_1|, \\ \phi_0 \frac{a_2^2 - x^2}{a_2^2 - a_1^2}, & |a_1| \leqslant |x| \leqslant |a_2|, \\ 0, & |a_2| \leqslant |x|. \end{cases} \tag{25}$$

$$\phi|_{x^2+z^2 \to \infty} \to 0.$$

上述初边值相应于 (ξ, ζ) 平面的条件为

$$\Psi(\xi, 0) = f(\xi), \quad \Psi|_{\xi^2+\zeta^2 \to \infty} \to 0. \tag{26}$$

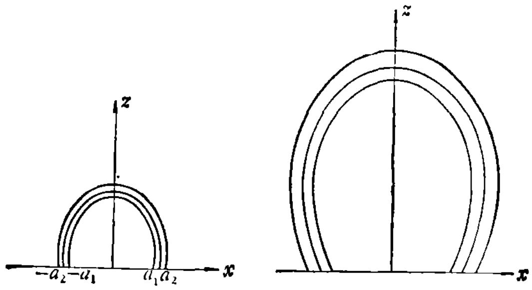
方程(24)和条件(26)给出 $|\xi| < +\infty$, $|\zeta| \geqslant 0$ 区域中磁环的运动. 在 $z \geqslant 0$ 和 $\zeta < 0$ 的区间内，由方程和边条件(25)可得到相应的解. 若(25)式中参数随时间变化，则根部的磁环可相应地膨胀或挤压. 将解代入磁感应方程(11)，可得到横向速度分量

$$v = v[\phi(x, z, t), t].$$

这样，我们就得到了一个自洽的运动学无力场，这种解没有奇异性. 它可以应用于日冕瞬变的磁环模型或者环状日珥的运动，其根部落在日面，而磁环向外运动，如图 1 所示.

再分析另一类运动学无力场，其速度为

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(a) $t=0$ (b) $t>0$

图 1 磁环的运动学无力场模型

环的根部可以不动或运动，其顶部向外运动，在运动过程中宽度不断膨胀．其运动位形与观测到的日冕瞬变一致[14]

$$u=\frac{x_1}{t^{n+1}},\quad w=\frac{x_3}{t^{n+1}}. \tag{27}$$

相应的变换为

$$\xi=\begin{cases}\dfrac{x_1}{t},\ n=0,\\ x_1\exp\left(\dfrac{1}{nt^n}\right),\ n\neq 0,\end{cases}\qquad \zeta=\begin{cases}\dfrac{x_3}{t},\ n=0,\\ x_3\exp\left(\dfrac{1}{nt^n}\right),\ n\neq 0.\end{cases} \tag{28}$$

这时，无力场方程化为

$$\xi^N\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi^N}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}=G_1(\Psi)\frac{dG_1(\Psi)}{d\Psi}, \tag{29}$$

其中

$$G(\phi,t)=G_1(\phi)G_2(t),\ G_2(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t},\ n=0,\\ \exp\left(\dfrac{1}{nt^n}\right),\ n\neq 0,\end{cases} \tag{30}$$

在适当边条件下，可由(29)式求出自洽解．将这些结果代入磁感应方程(11)，我们得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{v}{x_1^N}\right)-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v}{x_1^N}\right)=\frac{G_1(\phi)}{x_1^N}\frac{dG_2(t)}{dt}+\frac{2-N}{x_1^N}\frac{G_1(\phi)G_2(t)}{t^{n+1}}. \tag{31}$$

当(31)式右端非零时，磁面上 v/x_1^N 可以取不同的值，即横向速度或角速度有剪切或扭转．对于$N=0$，(31)式给出 $v=S(\phi)$．一般情况下，

$$\begin{aligned}\frac{v(x_1,x_3,t)}{x_1^N}&=G_1(\Psi)\left[\frac{dG_2(t)}{dt}+(2-N)\frac{G_1(t)}{t^{n+1}}\right]\\&\cdot\left\{S[\Psi(x_1,x_2,t)]+\int\frac{\partial\Psi[x_1,X(x_1,t,c),t]}{\partial X}\right.\\&\left.\cdot\frac{dx_1}{x_1^N}\right|_{c=\Psi(x_1,x_2,t)}\Bigg\},\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $x_3=X(x_1,t,c)$ 是由首次积分 $\Psi(x_1,x_2,t)=c$ 解出的关系．不难看出，这类自洽解具有很多应用．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

通过上述分析,我们证明了运动学无力场的存在性．更重要的是,运动学无力场具有许多的物理应用．观测发现许多日冕环时常在太阳大气中运动．如果环中的磁场相对较强，日冕环的运动应遵循运动学无力场的规律，如方程(24)和边条件(26)所示．这种运动磁环的无力场模型可以描述许多太阳活动过程．本文所讨论的另一个变换(28)式给出速度的横向分量解(32)式和磁场横向分量(30)式之间的联系．速度的剪切使磁场剪切，从而增加了磁能．过去人们基于直观的概念用静力学无力场的模型来分析这个过程,那显然是不自洽的．这里,我们从运动学无力场的关系重新讨论了此问题,对剪切储存磁能予以论证．

应该指出,维持无力场有许多条件,正如文献[11,12]所暗示的那样,复杂的磁场位形互相挤压和扭绞容易产生电流片等奇异面．另一种可能性是磁能转化为动能,使无力场条件破坏．这时就要讨论磁流体动力学过程[13]．

参 考 文 献

[1] 胡文瑞、林元章、吴林襄编,太阳耀斑,第六章,科学出版社，1983.
[2] 胡文瑞,中国科学，1977，1: 72.
[3] 胡文瑞,空间物理论文集,科学出版社，1980，88.
[4] Gold, T. and Hoyle, F., *Monthly Notice RAS,* **120** (1960), 89.
[5] Barnes, C. W. and Sturrock, P. A., *Astrophys. J.,* **174** (1972), 659.
[6] Jockers, K., *Solar Physics,* **56** (1978), 37.
[7] 马云丽、胡文瑞,黄山天体物理学术会议论文集,科学出版社，1981，222.
[8] 林元章、王正志,中国科学，1981，9: 1096.
[9] 苏庆瑞,天文学报，**21**(1980)，2:152.
[10] Low, B. C., *Astrophys. J.,* **254** (1982), 335.
[11] Syrovatskii,S. I., *Solar Phys.,* **58** (1978), 89.
[12] Babrova, N. A. and Syrovatskii, S. I., *Solar Phys.,* 61 (1979), 379.
[13] 刘新萍,空间科学学报，**3**(1983)，2:113.
[14] Hu, W. R., *Astrophys. Space Sci.,* **92** (1983), 373, 395.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net