用广义 WKB 方法解低 Froude 数的运动物体的水波问题

陈 嗣 熊

（中国科学院力学研究所，北京）

假定流体在 x 正方向以速度 U 运动，未扰自由表面位于 x 轴，y 轴垂直向上，坐标原点位于物体内部，并使得物体与未扰自由表面的交点分别位于 $(-x_0, 0)$ 与 $(x_0, 0)$．设所有的长度物理量已用物体的特征长度 L 无量纲化，问题的小参数 ε 定义为

$$\varepsilon = F^2 = U^2/gL, \tag{1}$$

这里 g 为重力加速度，F 为 Froude 数．为简单起见，这里我们仅讨论二维情形，所有的讨论很易推广到三维情形．假定自由表面的形状由关系式 $y = \varepsilon H(x)$ 给出，这里 $H(x)$ 是未知的，是问题需要求解的一部份．设流体为不可压缩，无粘性和无旋的，则流体的运动可以用速度势 $LU\phi(x, y)$ 来描述，这里 $\phi(x, y)$ 为无量纲速度势．$\phi(x, y)$ 满足以下方程：

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,\ \text{在流体中}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0,\quad \text{在物体上}; \tag{3}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}[1 - \phi_x^2 - \phi_y^2],\ \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\ \text{上}; \tag{4}$$

$$\phi_y = \varepsilon H_x \phi_x,\ \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\ \text{上}; \tag{5}$$

$$\phi_y + \varepsilon[\phi_x^2\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy}] = 0,\quad \text{在}\ y = \varepsilon H(x)\ \text{上}; \tag{6}$$

$$|\phi - x| \to 0,\ \text{当}\ x \to -\infty\ \text{或}\ y \to -\infty, \tag{7}$$

这里自由表面条件(6)是由条件(4)与条件(5)消去 $H(x)$ 而得到的[1]．显然，条件(6)是非线性的，而且这非线性条件是在未知自由表面波高 $y = \varepsilon H(x)$ 上． 我们假定问题(2)—(7)的解可以展开为

$$\phi(x, y) = \bar{\Phi}(x, y; \varepsilon) + \varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\phi}_1[x, y, \Theta(x, y)] + \varepsilon^{\alpha+2}\tilde{\phi}_2[x, y, \Theta(x, y)] + \cdots, \tag{8}$$

$$H(x) = \bar{H}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\alpha}\tilde{\eta}_1\{x, \Theta[x, \varepsilon H(x)]\} + \varepsilon^{\alpha+1}\tilde{\eta}_2\{x, \Theta[x, \varepsilon H(x)]\} + \cdots, \tag{9}$$

这里 $\bar{\Phi}(x, y; \varepsilon)$ 与 $\bar{H}(x, \varepsilon)$ 为问题的“朴实”渐近展开式[2,3]，α 是大于 1 的实数；

$$\Theta(x, y) = \theta(x, y)/\varepsilon, \tag{10}$$

$\theta(x, y)$ 为 x, y 的慢变函数．

由式(8)和式(10)，我们有以下微分公式：

本文 1984 年 1 月 13 日收到．

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial x}=\tilde{\phi}_{1x}+(\theta_x/\varepsilon)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta},\quad \frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial y}=\tilde{\phi}_{1y}+(\theta_y/\varepsilon)\tilde{\phi}_{1\Theta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}_1}{\partial x^2}=\tilde{\phi}_{1xx}+(\theta_x/\varepsilon)\tilde{\phi}_{1x\Theta}+(1/\varepsilon)(\theta_x\tilde{\phi}_{1\Theta})_x+(\theta_x^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}_1}{\partial y^2}=\tilde{\phi}_{1yy}+(\theta_y/\varepsilon)\cdot\tilde{\phi}_{1y\Theta}+(1/\varepsilon)\cdot(\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta})_y+(\theta_y^2/\varepsilon^2)\cdot\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta},$$

等等，对 $\tilde{\phi}_2[x,y,\Theta(x,y)]$，我们有类似的微分公式．把式(8)和式(10)，代入 Laplace 方程(2)中，由 $\varepsilon^{\alpha-1}$ 的系数，我们可得

$$\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta}\cdot(\theta_x^2+\theta_y^2)=0,\ \text{在流体中;}\tag{11}$$

由 ε^α 的系数，可得

$$(\theta_x^2+\theta_y^2)\tilde{\phi}_{2\Theta\Theta}=-[\theta_x\tilde{\phi}_{1x\Theta}+(\theta_x\tilde{\phi}_{1\Theta})_x+\theta_y\tilde{\phi}_{1y\Theta}+(\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta})_y],\ \text{在流体中.}\tag{12}$$

把式(8)—(10)代入自由表面动力学条件(4)中，由 ε^α 的系数，我们可得

$$\tilde{\eta}_1=-\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上;}\tag{13}$$

由 $\varepsilon^{\alpha+1}$ 的系数，可得

$$\tilde{\eta}_2=-\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{1x}-\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\phi}_{2\Theta}+\bar{\Phi}_x^2\bar{\Phi}_{xx}\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上.}\tag{14}$$

同理，把式(8)—(10)代入自由表面运动学条件(5)中，经整理后由 ε^α 的系数，可得

$$\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta}=\theta_x\bar{\Phi}_x\tilde{\eta}_{1\Theta},\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上;}\tag{15}$$

由 $\varepsilon^{\alpha+1}$ 的系数，我们得到

$$\tilde{\phi}_{1y}+\theta_y\tilde{\phi}_{2\Theta}+\bar{\Phi}_{yy}\tilde{\eta}_1=\bar{\Phi}_x\tilde{\eta}_{1x}+\bar{\Phi}_x\theta_y\bar{H}_x\tilde{\eta}_{1\Theta}+\bar{\Phi}_x\theta_x\tilde{\eta}_{2\Theta}+\theta_x\bar{H}_x\tilde{\phi}_{1\Theta},\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上.}\tag{16}$$

由式(11)，我们得到

$$\theta_x^2+\theta_y^2=0,\ y\leqslant\varepsilon\bar{H}.\tag{17}$$

由式(13)和式(15)消去 $\tilde{\eta}_1$，得到

$$\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta}+\theta_x^2\bar{\Phi}_x^2\tilde{\phi}_{1\Theta\Theta}=0,\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上.}\tag{18}$$

由式(17)，可得

$$\theta_y=i\theta_x,\ y\leqslant\varepsilon\bar{H}.\tag{19}$$

把式(19)代入(18)，在 $y=\varepsilon\bar{H}$ 上对 Θ 求解 $\tilde{\phi}_1$，此时 x 的函数 θ_x 与 $\bar{\Phi}_x$ 都可看作常数，最后得

$$\tilde{\phi}_1[x,\varepsilon\bar{H},\Theta(x,\varepsilon\bar{H})]=A(x,\varepsilon\bar{H})]\exp\{-(\theta_x\bar{\Phi}_x^2)^{-1}\Theta i\},\ \text{在}\ y=\varepsilon\bar{H}\ \text{上,}\tag{20}$$

这里 $A(x,\varepsilon\bar{H})$ 为 x 的任意函数，我们省略了另一个不显示波动性质的 x 的任意函数，因为它并不影响波动函数 $\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2,\cdots$，而且应该包含在不显示波动性质的“朴实渐近展开式”$\bar{\Phi}$ 中．对于广义 WKB 展开式(8)与式(9)中，我们一般要求波动函数 $\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2,\cdots,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots$，对位相函数 Θ 满足周期性．不失一般性，我们可假定周期为 2π，也即

$$\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta+2\pi)=\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta).\tag{21}$$

式(21)对 $y\leqslant\varepsilon\bar{H}$ 都成立，当然对于 $y=\varepsilon\bar{H}$ 也成立

$$[\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta+2\pi)]_{y=\varepsilon\bar{H}}=[\tilde{\phi}_1(x,y,\Theta)]_{y=\varepsilon\bar{H}}.\tag{22}$$

由式(20)和式(22)，我们可得

$$\theta_x[x,\varepsilon\bar{H}(x)]=\frac{1}{\bar{\Phi}_x^2[x,\varepsilon\bar{H}(x)]}.\tag{23}$$

由于 $$\frac{d\theta[x, \varepsilon\bar{H}(x)]}{dx} = \theta_x[x, \varepsilon\bar{H}(x)] + \varepsilon\bar{H}'(x)\cdot\theta_y[x, \varepsilon\bar{H}(x)],$$

因此,由式(23)可得

$$\theta(x, \varepsilon\bar{H}) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]} + O(\varepsilon). \tag{24}$$

把式(10)、式(23)和式(24)代入式(20),我们得到

$$\tilde{\phi}_1[x, \varepsilon\bar{H}, \Theta(x, \varepsilon\bar{H})] = A(x, \varepsilon\bar{H})\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2}\right],\ \text{在}\ y = \varepsilon\bar{H}\ \text{上}, \tag{25}$$

这里我们已把指数中与 $O(1)$ 成比例的项吸收到 x 的任意函数 $A(x, \varepsilon\bar{H})$ 中. 比较式(20)与式(25),我们看到,只要在式(24)中忽略 $O(\varepsilon)$ 项,我们可以直接把式(24)代入式(20),得到式(25),也即在式(24)中,我们可以忽略小量 $O(\varepsilon)$,因此

$$\theta(x, \varepsilon\bar{H}) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}. \tag{26}$$

现在我们来确定式(25)中的任意函数 $A(x, \varepsilon\bar{H})$. 由式(12)与式(17),我们得到

$$\theta_x\tilde{\phi}_{1x\Theta} + (\theta_x\tilde{\phi}_{1\Theta})_x + \theta_y\tilde{\phi}_{1y\Theta} + (\theta_y\tilde{\phi}_{1\Theta})_y = 0,\ \text{在流体中}. \tag{27}$$

式(27)在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上亦成立. 把式(19)、(25)、(26)代入在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上的式(27),经简化后,得

$$A_y = iA_x,\ \text{在}\ y = \varepsilon\bar{H}. \tag{28}$$

假定 $\tilde{\phi}_2$ 与 $\tilde{\phi}_1$ 有相同的位相因子,即在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上 $\tilde{\phi}_2$ 有位相因子 $\exp\left[-\frac{i}{\varepsilon}\theta(x,\varepsilon\bar{H})\right]$, 这里 $\theta(x, \varepsilon\bar{H})$ 由式(26)给出. 把式(13)、式(14)、式(25)与式(28)代入式(16),并考虑到 $\tilde{\phi}_2$ 满足与 $\tilde{\phi}_1$ 所满足的相同的方程(18)(这是因为 $\tilde{\phi}_2$ 与 $\tilde{\phi}_1$ 有相同的位相因子),经整理后,我们可得

$$A(x, \varepsilon\bar{H}) = A_0\bar{\phi}_x(x, \varepsilon\bar{H}), \tag{29}$$

这里 A_0 是任意常数. 把式(29)代入式(25),我们得到

$$\tilde{\phi}_1(x, \varepsilon\bar{H}, \Theta) = A_0\bar{\phi}_x(x, \varepsilon\bar{H})\cdot\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\bar{\phi}_x^2[\xi, \varepsilon\bar{H}(\xi)]}\right\},$$
$$\text{在}\ y = \varepsilon\bar{H}\ \text{上}, \tag{30}$$

把 $\tilde{\phi}_1[x, \varepsilon\bar{H}, \Theta(x, \varepsilon\bar{H})]$ 的表达式(30)代入式(8),我们求得了波动项在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上的一级近似表达式. 这里 A_0 与 α 为待定常数,将通过与物体附近的近场解的匹配来确定. 我们这里尚未用到物体表面的边界条件(3),我们将在另一文中专门讨论近场解及其匹配. 对于简单情形的物体,如薄物体或流线形物体,我们可以用 Keller[4] 的方法来确定这些常数. 我们可以用类似的方法求二级近似 $\tilde{\phi}_2$ 在 $y = \varepsilon\bar{H}$ 上的表达式.

致谢: 此工作是作者在 1980—1981 年访问美国密西根大学造船系期间, 在 T. F. Ogilvie 教授的指导与资助下开始的. 作者向他表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Inui, T. and Kajitani, H., *Schiffstechnik.*, **24**(1977), 178—213.
[2] 陈嗣熊,力学进展, **13**(1983), 314—319.
[3] 陈嗣熊,中国科学, A辑, 1984, 1: 52—60.
[4] Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, **92**(1979), 465—488.