等离子体转动对轴对称磁场位形的影响

胡文瑞

（中国科学院力学研究所，北京）

Gold 和 Hoyle 曾提出扭转磁场的概念来解释太阳耀斑的储能过程[1]．以后，人们研究了扭转磁场位形和剪切磁场位形的特征[2—4]．磁场的剪切和扭转特征是与等离子体的剪切或扭转运动密切相关联的[5]，另一方面，观测还发现，太阳黑子半影纤维有滚卷运动[6]．这要求讨论等离子体转动与磁场位形的关系．

在定常情况下，基本方程组可写为

$$\begin{cases}\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\nabla p-\rho r\Omega^2\boldsymbol{e}_r, & (1)\\ \nabla\times(r\Omega\boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{B})=0, & (2)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & (3)\\ p=\rho RT, & (4)\end{cases}$$

其中的符号皆通常的含义．采用柱坐标，$\boldsymbol{e}_r$ 为单位径向矢量．由无源条件(3)可定义磁势，

$$B_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad B_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{5}$$

将感应方程(2)展开，就导出

$$\Omega=\Omega(\psi). \tag{6}$$

由平衡方程(1)的环向分量得到

$$rB_\theta(r,z)=G(\psi), \tag{7}$$

其中 G 为待定函数，(1)式的极向分量导出

$$\begin{cases}[L(\psi)+GG']\frac{\partial\psi}{\partial r}=-4\pi r^2\left[\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{pr}{RT}\Omega^2(\psi)\right], & (8)\\ [L(\psi)+GG']\frac{\partial\psi}{\partial z}=-4\pi r^2\frac{\partial p}{\partial z}, & (9)\end{cases}$$

上述推导利用了对称条件 $\partial/\partial\theta=0$，其中算符

$$L(\psi)=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

将 (r,z) 平面变到 (ψ,r) 平面，记

$$p(r,z)=P[\psi(r,z),r],\ T(r,z)=\Theta[\psi(r,z),r], \tag{10}$$

相应的导数关系为

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial P}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial r},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{11}$$

本文 1980 年 8 月 19 日收到．1981 年 10 月 27 日收到修改稿．

利用(11),由关系(8)和(9)可求出压力的方程

$$\left\{\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{Pr\Omega^2}{R\Theta}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0.$$

一般而言 $\partial\psi/\partial z\neq 0$,故由上式得到

$$\frac{\partial P[\psi,r]}{\partial r}=\frac{r\Omega^2}{R\Theta}P[\psi,r], \tag{12}$$

或求解出

$$P[\psi(r,z),r]=P_0(\psi)\exp\left\{\Omega^2(\psi)\int_0^r\frac{rdr}{R\Theta(\psi,r)}\right\}, \tag{13}$$

其中 $P_0(\psi)$ 为待定函数. 将(13)式代人(8)式、(9)式,就得到极向动量平衡关系:

$$L(\psi)+G\frac{dG}{d\psi}+4\pi r^2\frac{\partial}{\partial\psi}\left\{P_0(\psi)\exp\left[\Omega^2(\psi)\int_0^r\frac{rdr}{R\Theta(\psi,r)}\right]\right\}=0. \tag{14}$$

(14)式第一项是极向磁场分量的应力部分,第二项除以 $4\pi r^2$ 为环向磁压垂直于磁面的梯度,第三项除去 $4\pi r^2$ 为压力垂直于磁面的梯度. 在(14)中有 $G(\psi)$、$P_0(\psi)$、$\Omega(\psi)$ 和 $\Theta[\psi,r]$ 四个待定函数,给定它们的分布后,就可由(14)式求解 ψ.

如果 $\Omega(\psi)=0$,(14)式就简化为

$$L(\psi)+GG'+4\pi r^2P_0'(\psi)=0, \tag{15}$$

这就是压力梯度与洛伦茨力平衡的静力学情况[7]. 考虑等离子体的转动实际上改变了压力梯度 $P(\psi,r)$,使每个磁面上满足径向压力梯度与离心力平衡,与包含重力的静力学平衡类似[8].

如果知道了子午面上磁场位形的分布,则

$$L(\psi)=-Q[\psi,r]=-\frac{\partial q[\psi,r]}{\partial\psi}$$

为 (ψ,r) 的已知函数. 将(14)式对 ψ 积分就得到

$$G^2(\psi)=2q[\psi,r]-8\pi r^2P_0[\psi]\exp\left\{\Omega^2(\psi)\int_0^r\frac{rdr}{R\Theta(\psi,r)}\right\}+f(r), \tag{16}$$

其中 $f(r)$ 为积分函数,(16)式左端除以 r^2 为环向磁场的平方,描绘了磁场的扭转程度;而右端第一项代表子午场的影响,第二项代表压力和转动的影响,由于 $P_0[\psi]$ 为正,故 Ω^2 较大处磁场扭绞弱,而较小处的扭绞强. 温度分布在同一磁面上可以不均匀,温度较低处扭绞强,而较高处磁场扭绞弱. 所以,磁场位形与多种因素耦合在一起.

为了具体讨论转动的影响,假设

$$G(\psi)=\alpha\psi,\ P_0[\psi]=p_0,\ \Theta[\psi,r]=T_0,$$

其中 α, p_0, T_0 皆为常数. 这时,(14)式化为

$$L(\psi)+\alpha^2\psi+4\pi r^2p_0\frac{r^2\Omega\Omega'(\psi)}{RT_0}\exp\left[\frac{r^2\Omega^2(\psi)}{2RT_0}\right]=0, \tag{17}$$

将方程无量纲化,取

$$\psi^*=\psi/\psi_0,\ \Omega^*=\Omega/\Omega_0,\ R=r/r_0,\ \alpha^*=\alpha r_0,$$

$$\beta=p_0/\frac{\psi_0^2}{4\pi r_0^4},\quad \varepsilon=\Omega_0^2r_0^2/RT_0,$$

其中下标 0 代表典型值. 为了简单略去无量纲的上标*号,方程(17)化为

$$L(\psi)+\alpha^2\psi+\varepsilon\beta R^4\Omega\Omega'\exp[\varepsilon R^2\Omega^2]=0, \tag{18}$$

太阳大气中常常有 $\varepsilon \ll 1$，将所有量对 ε 展开

$$\psi=\sum_0^\infty \varepsilon^n\psi^{(n)}, \quad \Omega=\sum_0^\infty \varepsilon^n\Omega^{(n)}. \tag{19}$$

零阶方程和边条件可化为

$$\begin{cases} L(\psi^{(0)})+\alpha^2\psi^{(0)}=0, \\ \psi^{(0)}(0,z)=\psi^{(0)}(1,z)=\psi^{(0)}(R,l)=0, \psi^{(0)}(R,0)=\varphi(R). \end{cases} \tag{20}$$

(20)式为二阶线性方程，其解为[4,9]

$$\psi^{(0)}=r\sum_0^\infty \psi_n\frac{\mathrm{sh}[\lambda_n(l-z)]}{\mathrm{sh}(\lambda_n l)}J_1(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha^2}r), \tag{21}$$

其中 ψ_n 为 $\psi(R)/R$ 傅里叶-贝塞尔系数，类似地，一阶方程和边条件为

$$\begin{cases} L(\psi^{(1)})+\alpha^2\psi^{(1)}=-\beta R^4\Omega(\psi^{(0)})\dfrac{d\Omega(\psi^{(0)})}{d\psi}, \\ \psi^{(1)}(0,z)=\psi^{(1)}(1,z)=\psi^{(1)}(R,0)=\psi^{(1)}(R,l)=0. \end{cases} \tag{22}$$

将非齐次项展开为傅里叶-贝塞尔函数：

$$R^3\Omega(\psi^{(0)})\frac{d\Omega(\psi^{(0)})}{d\psi}=\sum_{n=0}a_n(z)J_1(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha^2}r), \tag{23}$$

不难求出(22)式的解为

$$\psi^{(1)}(r,z)=\beta r\sum_{n=0}^\infty\left\{a_n(z)-\frac{a_n^*(l)\mathrm{sh}(\lambda_n z)+a_n(0)\mathrm{sh}[\lambda_n(l-z)]}{\mathrm{sh}(\lambda_n l)}\right\} \cdot J_1(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha^2}r), \tag{24}$$

其中 λ_n 为本征值，它满足 $J_1(\sqrt{\lambda_n^2+\alpha^2})=0$，与此类似，可求出更高阶的解。

上述讨论是对定常、理想流体而言，这时满足等旋转定理。应该指出，有时还须考虑重力的作用。

参 考 文 献

[1] Gold, T. & Hoyle, F., *Monthly Notices RAS.*, 129 (1960), 89.
[2] Barnes, G. W. & Sturrock, P. A., *Astrophys. J.*, 174 (1972), 659.
[3] 胡文瑞，中国科学，1977，1:69.
[4] Low, B. C. & Nakagawa, Y., *Astrophys. J.*, 199 (1975), 237.
[5] 胡文瑞，日地空间物理学文集 I，科学出版社，1980.
[6] Danielson, R. E., *Astrophys. J.*, 134 (1961), 275.
[7] Lerche, I. & Low, B. C., *Astrophys. J.*, 238 (1980), 1088.
[8] Low, B. C., *Astrophys. J.*, 197 (1975), 251.
[9] 胡文瑞，自然，2(1979)，595.